МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE\perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED=45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2\leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 19$, $3\leqslant y\leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1.

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\le 0$$

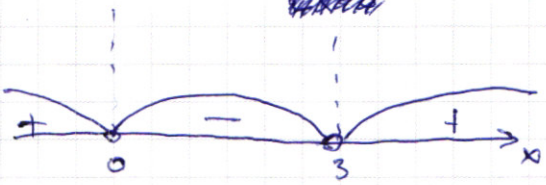
$$\begin{cases} x\ge 3 \\ \frac{x^2-2x+5-4(x-1)}{4x^2-12x+x(x-3)}\le 0 \quad (1)\end{cases}$$

(1) $\frac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-12x+x^2-3x}\le 0$; $\frac{x^2-6x+9}{5x^2-15x}\le 0$; $\frac{(x-3)^2}{5x(x-3)}\le 0$

$f(x)=\frac{(x-3)^2}{5x(x-3)}$; $f(x)\le 0$

$D(f)=(-\infty;0)\cup(0;3)\cup(3;+\infty)$

$f(x)=0$, при $x=3$



$f(x)\le 0$, при $x\in(0;3)$

$$\begin{cases} x\ge 3 \\ x\in(0;3)\end{cases} \Rightarrow \underline{\varnothing}$$

$$\begin{cases} 1\le x<3. \\ \frac{x^2-2x+5-4(x-1)}{4x^2-12x+x(3-x)}\le 0 \quad (2)\end{cases}$$

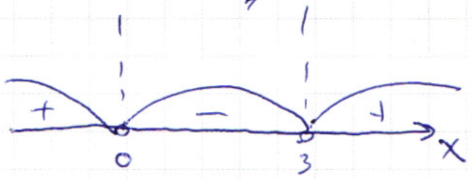
(2) $\frac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-12x+3x-x^2}\le 0$; $\frac{x^2-6x+9}{3x^2-9x}\le 0$; $\frac{(x-3)^2}{3x(x-3)}\le 0$

$g(x)=\frac{(x-3)^2}{5x(x-3)}$; $g(x)\le 0$

$D(g)=(-\infty;0)\cup(0;3)\cup(3;+\infty)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$g(x)=0$ при $x=3$



$g(x)\le 0$ при $x\in(0;3)$

$$\begin{cases} 1\le x<3 \\ x\in(0;3) \end{cases} \Rightarrow \underline{x\in[1;3)}$$

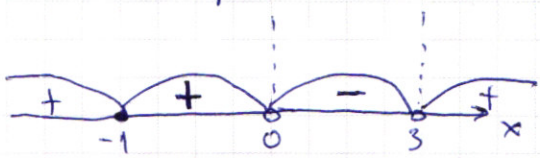
$$\begin{cases} 0\le x<1 \\ \dfrac{x^2-2x+5-4(1-x)}{4x^2-12x+x(3-x)}\le 0 \quad (3) \end{cases}$$

(3) $\dfrac{x^2-2x+5-4+4x}{4x^2-12x+3x-x^2}\le 0$; $\dfrac{x^2+2x+1}{3x^2-9x}\le 0$; $\dfrac{(x+1)^2}{3x(x-3)}\le 0$

$h(x)=\dfrac{(x+1)^2}{3x(x-3)}$; $h(x)\le 0$

$D(h)=(-\infty;0);(0;3)\cup(3;+\infty)$

$h(x)=0$ при $x=-1$



$h(x)\le 0$ при $x\in\{-1\}\cup(0;3)$

$$\begin{cases} 0\le x<1 \\ x\in\{-1\}\cup(0;3) \end{cases} \Rightarrow \underline{x=-1}$$

$$\begin{cases} x<0 \\ \dfrac{x^2-2x+5-4(1-x)}{4x^2-12x+(-x)(3-x)}\le 0 \quad (4) \end{cases}$$

(4) $\dfrac{x^2-2x+5-4+4x}{4x^2-12x-3x+x^2}\le 0$; $\dfrac{x^2+2x+1}{5x^2-15x}\le 0$; $\dfrac{(x+1)^2}{5x(x-3)}\le 0$

$t(x)=\dfrac{(x+1)^2}{5x(x-3)}$; $t(x)\le 0$

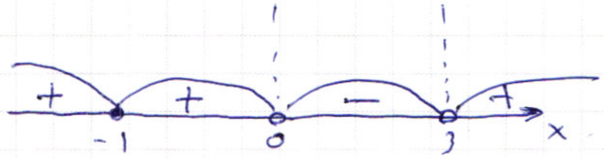
$D(t)=(-\infty;0)\cup(0;3)\cup(3;+\infty)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t(x)=0$ при $x=-1$



$t(x)\le 0$ при $x\in\{-1\}\cup(0;3)$

$$\begin{cases} x<0 \\ x\in\{-1\}\cup(0;3) \end{cases} \Rightarrow \underline{x=-1}$$

$$\left[\begin{array}{l} x\in\varnothing \\ x\in[1;3) \\ x=-1 \\ x=-1 \end{array}\right. \Rightarrow x\in\{-1\}\cup[1;3)$$

Ответ: $x\in\{-1\}\cup[1;3)$

Задача №3.

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} y-2x\ge 0 \\ xy\ge 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y\ge 2x \\ xy\ge 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} (y-2x)^2=(\sqrt{xy})^2 \\ 2y+x^2=9 \end{cases} ; \begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy \\ 2y+x^2=9 \end{cases} ; \begin{cases} y^2-5xy+4x^2=0 \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=4x \end{array}\right. \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=x \\ 2x+x^2=9 \ (*) \end{cases} \\ \begin{cases} y=4x \\ 2\cdot 4x+x^2=9 \ (**) \end{cases} \end{array}\right.$$

(*) $2x+x^2=9$

$x^2+2x-9=0$

$D=2^2-4\cdot(-9)=4+36=40$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -1 \pm \sqrt{10}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -1+\sqrt{10} \\ x = -1-\sqrt{10} \end{array}\right.$$

(**) $8x + x^2 = 9$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 9 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = x \\ \left[\begin{array}{l} x = -1+\sqrt{10} \\ x = -1-\sqrt{10} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} y = 4x \\ \left[\begin{array}{l} x = 9 \\ x = -1 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1+\sqrt{10} \\ y = -1+\sqrt{10} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1-\sqrt{10} \\ y = -1-\sqrt{10} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 9 \\ y = 36 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases} \end{array}\right.$$

Проверка:

$$\begin{cases} -1+\sqrt{10} \overset{?}{\geq} 2\cdot(-1+\sqrt{10}) \\ (-1+\sqrt{10})(-1+\sqrt{10}) \overset{?}{\geq} 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -1+\sqrt{10} \overset{?}{\geq} -2+2\sqrt{10} \\ (-1+\sqrt{10})^2 \overset{?}{\geq} 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \geq \sqrt{10} \text{ — неверно} \\ (\sqrt{10}-1) \geq 0 \text{ — верно} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1-\sqrt{10} \geq 2(-1-\sqrt{10}) \\ (-1-\sqrt{10})(-1-\sqrt{10}) \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -1-\sqrt{10} \geq -2-2\sqrt{10} \\ (-1-\sqrt{10})^2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \geq -\sqrt{10} \text{ - верно} \\ (-1-\sqrt{10})^2 \geq 0 \text{ - верно} \end{cases}$$

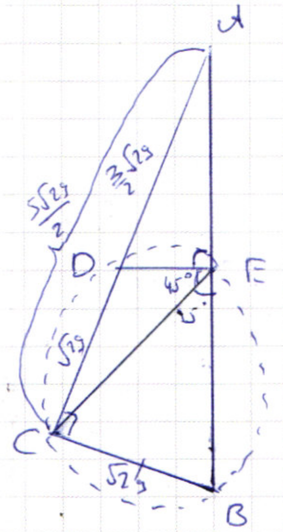
$$\begin{cases} 36 \geq 2\cdot 9 \\ 36\cdot 9 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 36 \geq 18 \text{ - верно} \\ 36\cdot 9 \geq 0 \text{ - верно} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 \geq 2\cdot(-1) \\ (-4)(-1) \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -4 \geq -2 \text{ - неверно} \\ 4 \geq 0 \text{ - верно} \end{cases}$$

Ответ: $(-1-\sqrt{10}; -1-\sqrt{10})$ или $(9; 36)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №5



Дано:

$\triangle ABC$; $\angle C = 90°$
$D \in AC$; $E \in AB$.
$BE \perp AB$
$AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$; $BC = \sqrt{29}$.
$\angle CED = 45°$

Найти:

$AD : AC$ и $S_{\triangle AED}$.

Решение.

1. Т.к $BE \perp AB$, то $\angle AED = \angle DEB = 90°$
2. Т.к $\angle DEC = 45°$, то $\angle CEB = \angle DEB - \angle DEC = 90° - 45° = 45°$, т.е $\angle DEC = \angle BEC = 45°$
3. Т.к $\angle DCB = 90°$ и $\angle DEB = 90°$, то $\angle DCB + \angle DEB = 180°$, т.к вокруг CDEB можно описать окружность.
4. $\angle DEC = \angle CEB = 45°$ - вписанные, значит $\smile DC = \smile CB$, а значит $DC = CB = \sqrt{29}$ как хорды ~~отрезки~~, стягивающие равные дуги.
5. $AD = AC - DC = \frac{5\sqrt{29}}{2} - \sqrt{29} = \frac{3}{2}\sqrt{29}$, значит $AD : AC = \frac{3}{2}\sqrt{29} : \frac{5}{2}\sqrt{29} = \frac{3}{5}$
6. В $\triangle ABE$ по т. Пифагора: $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\sqrt{29}\right)^2 + (\sqrt{29})^2} = \sqrt{\frac{25 \cdot 29}{4} + \frac{4 \cdot 29}{4}} = \sqrt{\frac{29 \cdot 29}{4}} = \frac{29}{2}$
7. $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ по двум углам т.к $\angle A$ - общий и $\angle E = C = 90°$ значит $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$; $\frac{\frac{3}{2}\sqrt{29}}{\frac{29}{2}} = \frac{DE}{\sqrt{29}} = \frac{AE}{\frac{5}{2}\sqrt{29}} \Rightarrow$

$\Rightarrow DE = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{29}\sqrt{29}}{\frac{29}{2}} = \frac{\frac{3}{2}\cdot 29}{\frac{1}{2}29} = \frac{3}{2}:\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\cdot 2 = 3.$

$\Rightarrow AE = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{29}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{29}}{\frac{29}{2}} = \frac{\frac{15}{4}\cdot 29}{\frac{29}{2}} = \frac{15}{4}:\frac{1}{2} = \frac{15}{2}$

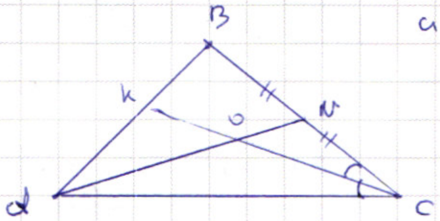
8. $S_{\triangle AED} = \frac{1}{2}\cdot AE\cdot DE = \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{2}\cdot 3 = \frac{45}{4}.$

Ответ: $AD:AC = \frac{3}{5}$ и $S_{\triangle AED} = \frac{45}{4}$

Задача №2.

Для начала докажем, что в тупоугольном и прямоугольном треугольниках медиана и биссектриса не могут одновременно выходить из двух острых углов:

Рассм. тупоугольный $\triangle ABC$, где $\angle B > 90^\circ$, пусть AM - медиана, а CK - биссектриса и пусть $AM \cap CK = O$



В $\triangle ABC$ $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ и в $\triangle AOC$: $\angle OAC + \angle AOC + \angle ACO = 180^\circ$, т.к $\angle OAC < \angle A$ и $\angle ACO < \angle C$, то $\angle AOC > \angle B > 90^\circ$, а значит тупой, т.е AM и CK пересекаются не под прямым углом.

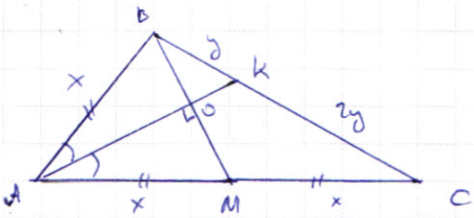
Аналогично если AM - биссектриса и CK - медиана, то $\angle AOC$ - тупой.

Для $\angle B = 90^\circ$: $\angle AOC > B = 90^\circ$, т.е $\angle AOC > 90^\circ$, т.е опять AM и CK пересекаются не под прямым углом.

~~Рассмотрим~~ Теперь будем решать эту задачу учитывая эти „ограничения" на то, откуда проводятся медиана и биссектриса.

• Рассмотрим если $\triangle ABC$ - тупоугольный $\angle B > 90^\circ$, тогда у нас могут быть два случая BM - медиана и AK - биссектриса (для случая где CK - биссектриса дает треугольник симметричный) или BK - биссектриса и AM - медиана (для случая CM - симметрично).

$AK \cap BM = O$



В $\triangle ABM$: AO – биссектриса и высота, т.е. он равнобедр. с осн BM и $AB = AM$ как боковые стороны.

пусть $AB = AM = MC = x$, тогда по св-ву биссектрисса $\frac{AC}{CK} = \frac{AB}{BK} \Rightarrow \frac{2x}{CK} = \frac{x}{BK} \Rightarrow CK = 2y$; $BK = y$,

тогда $P_{\triangle ABC} = 3x+3y = 300 \Rightarrow x+y=100$, а также чтобы $\triangle ABC$ существовал нужно, чтобы $\begin{cases} AC < AB+BC \\ BC < AB+AC \\ AB < AC+BC \end{cases}$, $\begin{cases} 2x < x+3y \\ 3y < x+2x \\ x < 2x+3y \end{cases}$ $\begin{cases} x<3y \\ y<x \\ -x<3y \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} y<x<3y \\ x+y=100 \\ x\in N, y\in N \end{cases}$ $\begin{cases} y<100-y<3y \\ x=100-y \\ x\in N, y\in N \end{cases}$ $\begin{cases} 2y<100<4y \\ x=100-y \\ x\in N, y\in N \end{cases}$ $\begin{cases} y<50<2y \\ x=100-y \\ x\in N, y\in N \end{cases}$

значит $y \in \{26; 27; \dots 49\}$ – 24 варианта

~~Рассмотрим $\triangle ABC$, $\angle B = 90$~~, тогда у нас получ

~~Зачем ? нужен BM – медиана, AK – биссектриса (CK – биссектриса~~ симметричный случай?

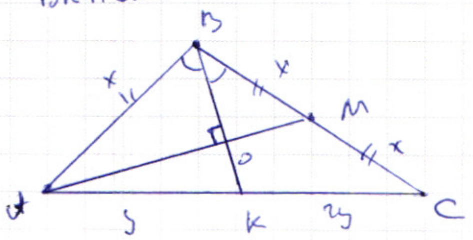
~~Биссектриса, т.к. чтобы BM и CK пересекались под прямым углом~~

~~за пределами △ABC т.к. с BM тупой. или ... CK – биссектри~~

~~... BK – биссектриса и AM – медиана (CM – медиана)~~

~~симметричный случай.~~

$BK \cap AM = O$



В $\triangle ABM$: BO – биссектриса и высота, т.е $\triangle ABM$ – равнобедр. с осн. AM, значит $AB = BM$, пусть $AB = BM = MC = x$, тогда по св-ву биссектрисы

$\frac{BC}{KC} = \frac{AB}{AK} \Rightarrow \frac{2x}{KC} = \frac{x}{AK} \Rightarrow KC = 2y$; $AK = y$, $P_{\triangle ABC} = 3x+3y = 300 \Rightarrow$

$x+y=100$, а чтобы $\triangle ABC$ существовал нужно, чтобы

$\begin{cases} AC < AB+BC \\ BC < AB+AC \\ AB < AC+BC \end{cases}$ $\begin{cases} 3y < 3x \\ 2x < x+3y \\ x < 3y+2x \end{cases}$ $\begin{cases} y<x \\ x<3y \\ -x<3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y<x<3y \\ x+y=100 \\ x\in N, y\in N \end{cases} \Rightarrow x \in$

$\{26; 27 \dots 49\}$ – 24 варианта

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

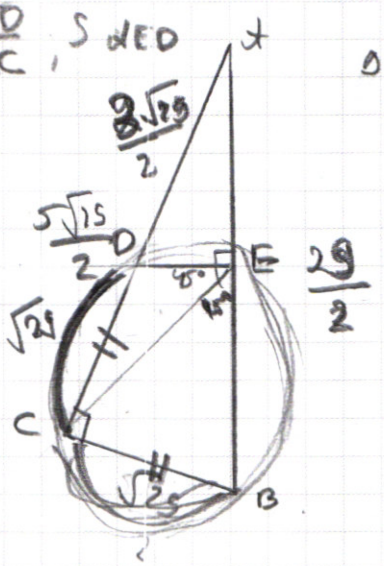
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{AD}{AC}$, S_{AED}



$\triangle AED \sim ACB$: $\frac{AE}{AC} = \frac{ED}{CB} = \frac{AD}{AB}$

$(\sqrt{29})^2 + \left(\frac{5\sqrt{29}}{2}\right)^2 = 29 + \frac{25 \cdot 29}{4} = \frac{29 \cdot 4}{4} + \frac{25 \cdot 29}{4} = \frac{29 \cdot 29}{}$

$\frac{AE}{AC} = \frac{ED}{CB} = \frac{AD}{AB}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{AD}{AD + D\cancel{C}}$

$\frac{\frac{3}{2}\sqrt{29}}{\frac{5}{2}\sqrt{29}}$ $\frac{3}{2} : \frac{5}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

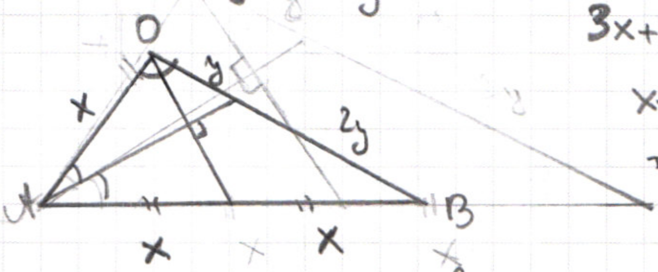
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4x^2 = x^2 + 9y^2 - 6xy \cdot \cos\angle O \to \frac{4x^2 - x^2 - 9y^2}{-6xy} = \cos\angle O$

$\frac{3x^2 - 9y^2}{-6xy} < 0$ $\quad \frac{3x^2 - 9y^2}{6xy} > 0$ $\quad \frac{x^2 - 3y^2}{2xy} > 0$



$3x + 3y = 300$

$x + y = 100 \Rightarrow x = 100 - y$

т.к. x и

$y + 2y < x + 2x$

$\underline{y < x}$

$100 - y < 3y$

$100 < 4y$

$x = 3y \Rightarrow 25 < y$

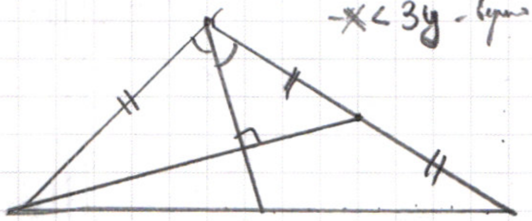
$2x < 2y + x$ $\quad 4y = 100$

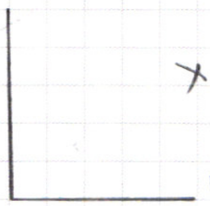
$\frac{x < 3y}{y < x < 3y}$ $\quad \underline{y > 25}$

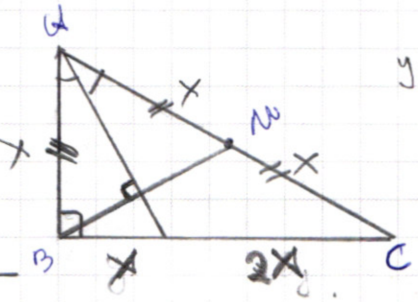
$x < 3y + 2x$

$-x < 3y$ – верно всегда, $y \in \{1, 2, 49\}$ $\quad x \in \{99, 50, 51\}$

49







$y = x = 50$

1

$1125 \,|\, 5$, 225

$5625 \,|\, 5$, 1125

$x^2 + 3y^2 = 4x^2$

$3y^2 = 3x^2$

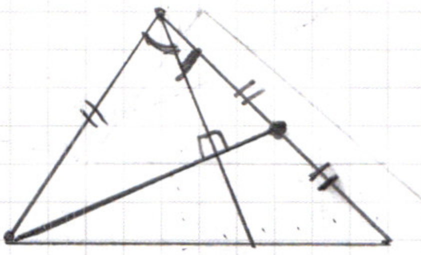
$y = x$

$225 = 25$

$15^2 \cdot 5^2$

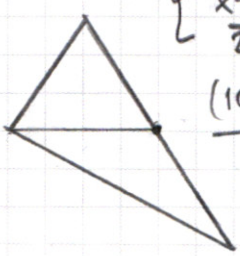
$15 \cdot 5$

$5625 \quad 75$



$\begin{cases} x = 100 - y \\ \frac{x^2 - 9y^2}{2xy} > 0 \end{cases}$

$\frac{(100-y)^2 - 9y^2}{2(100-y)y} > 0$

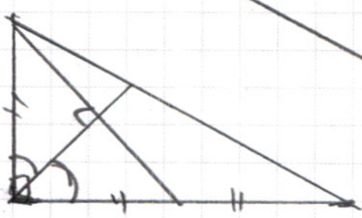


$\frac{100^2 - 200y + y^2 - 9y^2}{200y - 2y^2} > 0$

$\frac{-8y^2 - 200y + 10000}{-2y^2 + 200y} > 0$

$\frac{4y^2 + 100y - 5000}{y^2 - 100y} > 0$

$\frac{4(y^2 + 25y - 1250)}{y(y - 100)}$



$\frac{(y+50)(y-25)}{y(y-100)} > 0$

$5000 \,|\, 4$, 1250

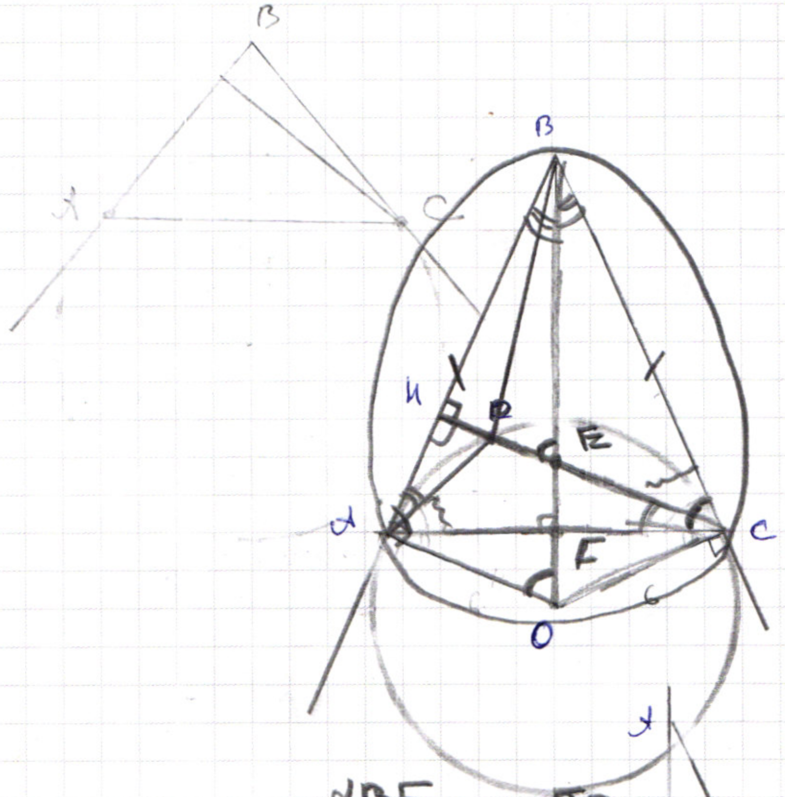
$y^2 + 25y - 1250 = 0$

$D = 25^2 - 4 \cdot 1250 = 625 + 5000$

$y = \frac{-25 \pm 75}{2}$

$y = -50$

$y = 25$



$S_{\triangle ABD}$?

Окр $(O; R = 6)$

$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot DH$

$\frac{AB}{CH} = \frac{AB}{CD+DH} = \frac{AB}{DH}$

$\frac{AB}{CH} = \frac{AB}{CD+DH} = \frac{AB(CD-DH)}{CD^2+DH^2}$

~~AB~~

~~AHC ~ BH~~

$\triangle AHD \sim CHA$

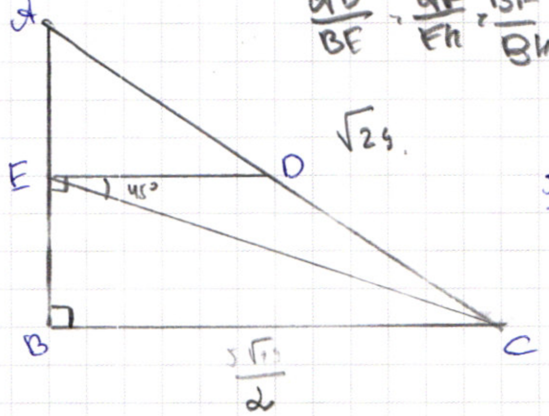
$\frac{AH}{CH} = \frac{HD}{HA} = \frac{AD}{CA}$

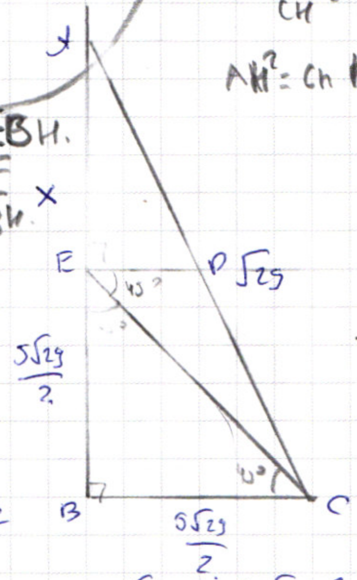
$AH^2 = CH \cdot HD$ $\frac{AB}{AC}$

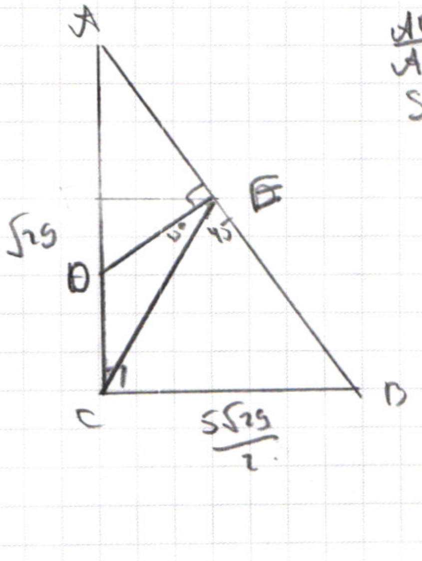
$S_{\triangle AED}$.

$\triangle ABF \sim \triangle EBH$.

$\frac{AB}{BE} = \frac{AF}{FH} = \frac{BF}{BH}$ x







$\frac{AD}{AC}$ - ?

$S_{\triangle ADE}$

$\left(x + \frac{5\sqrt{29}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{29}}{2}\right)^2 = (\sqrt{29})^2$.

$x^2 + 5\sqrt{29}x + \frac{25\cdot 29}{4} + \frac{25\cdot 29}{4} = 29$.

$4x^2 + 20\sqrt{29}x + 50\cdot 29 = 4\cdot 29$.

$4x^2 + 20\sqrt{29}x + 29(50-4) = 0$.

$2x^2 + 10\sqrt{29}x + 29\cdot 23 = 0$

$\frac{D}{4} = (5\sqrt{29})^2 - 2\cdot 29\cdot 23 = 25\cdot 29 -$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\le 0$$

если $x \geq 3$, то $\cancel{x\in(0;3)}$ $\varnothing$

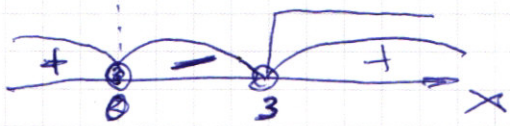
$$\frac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-12x+x(x-3)}\le 0$$

$$\frac{x^2-6x+9}{4x^2-12x+x^2-3x}\le 0$$

1: $\frac{(+)}{(+)(-)} \le (-)$

$$\frac{(x-3)^2}{5x^2-15x}\le 0 \qquad \frac{(x-3)^2}{5x(x-3)}\le 0 \qquad \frac{(+)}{(-)(-)}=(+)$$

4: $\frac{(+)}{(+)(+)}$ ...



если $1\le x<3$, то $x\in(0;3) \Rightarrow x\in[1;3)$

$$\frac{x^2-2x+5-4(x-1)}{4x^2-12x+x(3-x)}=\frac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-12x+3x-x^2}=\frac{x^2-6x+9}{3x^2-9x}=\frac{(x-3)^2}{3x(x-3)}\le 0$$

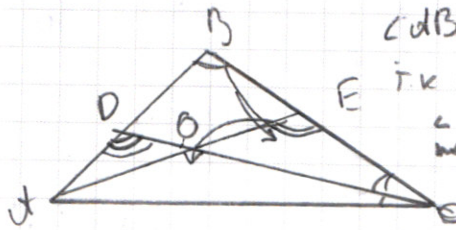
$x=-2$: $\frac{(+)}{(-)(-)}$; $x=0{,}5$: $\frac{(+)}{(-)(-)}$

если $0\le x\le 1$

$$\frac{x^2-2x+5-4(1-x)}{4x^2-12x+x(3-x)}=\frac{x^2-2x+5-4+4x}{4x^2-12x+3x-x^2}=\frac{x^2+2x+1}{3x^2-9x}=\frac{(x+1)^2}{3x(x-3)} \dots$$

если $x<0$

$$\frac{x^2-2x+5-4(1-x)}{4x^2-12x+(-x)(3-x)}=\frac{x^2-2x+5-4+4x}{4x^2-12x-3x+x^2}=\frac{x^2+2x+1}{5x^2-15x}=\frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \dots$$



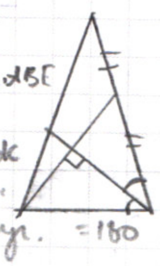
$\angle ABC = \angle ABE$

т.к. в $\triangle ABC$ и $\triangle ABE$

$\angle C$ – общий

$\angle FAC = \angle BAC$

а, т.к. сумма углов треуг. $=180$



$\triangle ABC$ $\angle B$ – тупо

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$

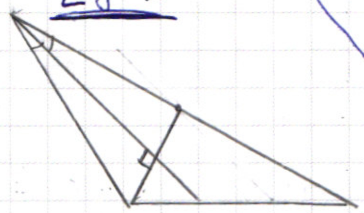
$\begin{cases} y-2x\geq 0 \\ xy\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y\geq 2x \\ xy\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$

$y^2-5y+4=0$

$y^2-5xy+4x^2=0$

$\left[\begin{array}{l} y=4x \\ y=x \end{array}\right.$



$\frac{9-x^2-4x}{2}=\sqrt{\frac{x(9-x^2)}{2}}$

$\left(\frac{9-x^2-4x}{2}\right)^2=\frac{x(9-x^2)}{2}$

$\frac{(x^2+4x-9)^2}{4}=\frac{x(9-x^2)}{2}$

$(x^2+4x-9)^2=2x(9-x^2)$

$x^4+16x-81+8x^3-18x^2-72x=$

$=18x-4x^3$

$x^4+8x^3+4x^3-18x^2+16x-72x-18x-81=0$

$x^4+12x^3-18x^2-74x-81=0$

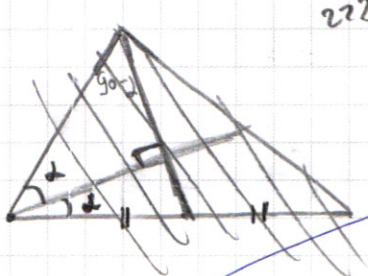
$81+324+162+222-81$

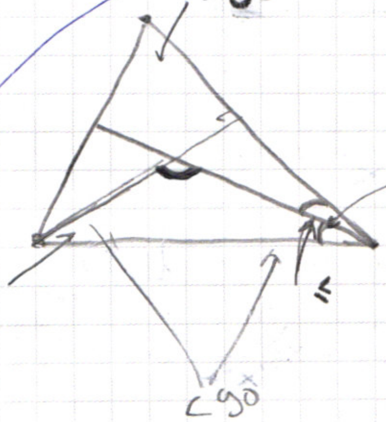
$81+324-162-222-81$

$74 \times 3 = 222$

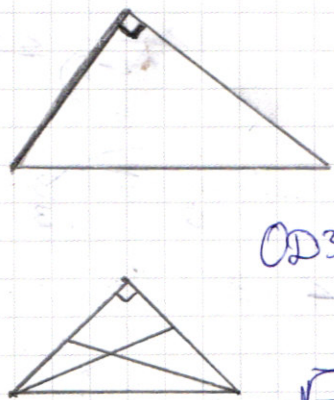
$27 \times 12 = 54 + 27 = 324$

$18 \times 9 = 162$





ОДЗ: $[-2-\sqrt{13};-3]\cup[0;-2+\sqrt{13}]$.



$\sqrt{9}<\sqrt{13}<\sqrt{16}$

$3<\sqrt{13}<4$.

$52 : 4 = 13$

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \Rightarrow 2y=9-x^2 \Rightarrow y=\frac{9-x^2}{2}$

$\frac{9-x^2}{2}-2x=\sqrt{x\frac{(9-x^2)}{2}}$

$\frac{9-x^2-4x}{2}=\sqrt{\frac{x(9-x^2)}{2}}$

ОДЗ: $\frac{x(9-x^2)}{2}\geq 0$, $x\in(-\infty;-3]\cup[0;3]$

$x(9-x^2)\geq 0$

$x(3-x)(3+x)\geq 0$

$x(x+3)(x-3)\leq 0$

$x\in($

$x^2+4x-9=0$

$D=4^2-4(-9)=16+36=52$.

$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{52}}{2}=$

$=\frac{-4\pm 2\sqrt{13}}{2}=-2\pm\sqrt{13}$.

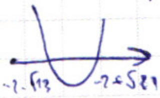
$\frac{9-x^2-4x}{2}\geq 0$

$9-x^2-4x\geq 0$

$x^2+4x-9\leq 0$ $f(x)=x^2+4x-9$.

$\cancel{x^2+4x+4-13}\leq 0$ $A=1$ - ветви вверх.

$f(x)=0$, при $\left[\begin{array}{l} x=-2-\sqrt{13} \\ x=-2+\sqrt{13} \end{array}\right.$



$\rightarrow x\in[-2-\sqrt{13};-2+\sqrt{13}]$

$-5 \quad -6$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)