МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE\perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED=45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2\leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 19$, $3\leqslant y\leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

© МФТИ, 2022

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

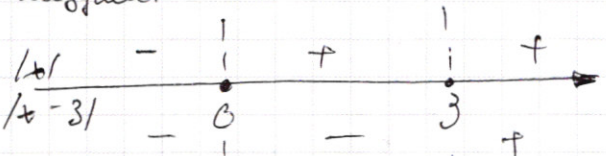
$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\le 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-2x+5-4|x-1|\ge 0 \\ 4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-2x+5-4|x-1|\le 0 \\ 4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|>0 \end{cases} \end{array}\right.$$

1) Рассм. ~~нули~~ неравенства $4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|\ge 0$. и $4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|<0$

Рассм. $f(x)=4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|$, $D f=R$

Нули модулей: $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$



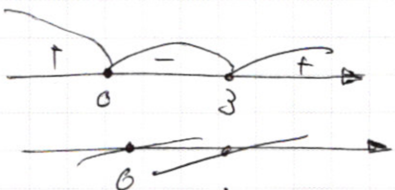
$4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|>0$:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le 0 \\ 4x^2-12x+x^2-3x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<3 \\ 4x^2-12x-x^2+3x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 3 \\ 4x^2-12x+x^2-3x>0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|<0$:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le 0 \\ 4x^2-12x+x^2-3x<0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<3 \\ 4x^2-12x-x^2+3x<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 3 \\ 4x^2-12x+x^2-3x<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le 0 \\ 5x(x-3)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<3 \\ 3x(x-3)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 3 \\ 5x(x-3)>0 \end{cases} \end{array}\right.$$



$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le 0 \\ x(x-3)<0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<3 \\ x(x-3)<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 3 \\ x(x-3)<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le 0 \\ x\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<3 \\ x\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 3 \\ x\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty) \end{cases} \end{array}\right.$$

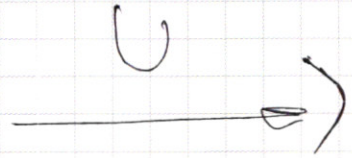
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le 0 \\ x\in(0;3) \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<3 \\ x\in(0;3) \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 3 \\ x\in(0;3) \end{cases} \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3)$ $\qquad\qquad$ $x \in (0; 3)$

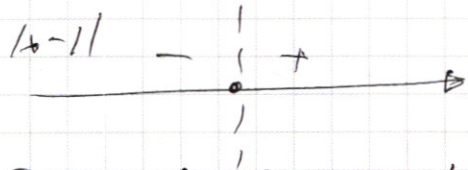
2) Рассм. нер-ства $x^2-2x+5-4|x-1| \geq / \leq 0$.

$$\left(\begin{array}{l} f(x)=x^2-2x+5 \text{ - кв. ф-ция } a=1>0 \Rightarrow \text{ ветви } \uparrow \\ D_1=1-5<0 \end{array}\right. \Rightarrow f(x)>0 \text{ при } \forall x$$



$f(x)=x^2-2x+5-4|x-1|$

Нуль модуля $x=1$



Для $x^2-2x+5-4|x-1| \geq 0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-2x+5-4x+4 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<1 \\ x^2-2x+5+4x-4 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-3)^2 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<1 \\ (x+1)^2 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 1 \\ x \in R \end{cases} \\ \begin{cases} x<1 \\ x \in R \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x<1 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow x \in R$

Значит неравенство $x^2-2x+5-4|x-1| \leq 0$ не имеет решений. $(x \in \varnothing)$

Вернёмся к исходной системе:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in R \\ x \in (0;3) \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-\infty; 0) \cup (0;3) \\ x \in \varnothing \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (0;3)$$

Ответ: $x \in (0;3)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

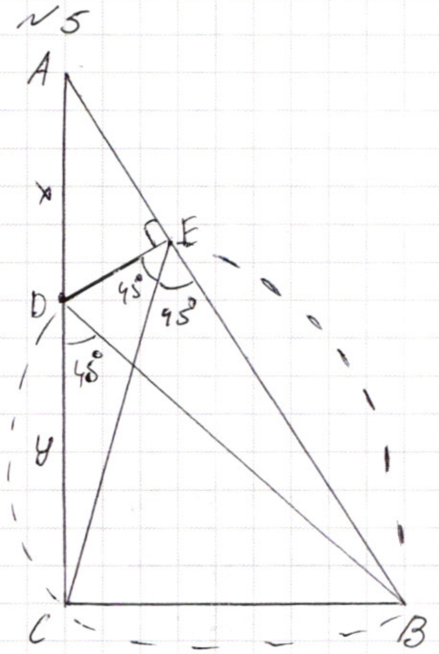
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



ошибка в Дано: (в условии), в

$AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$

$BC = \sqrt{29}$

$DE \perp AB$

$\angle CED = 45°$

Найти: $\frac{AD}{AC}$ - ?

S_{ADE} - ?

Решение:

1) $DE \perp AB \Rightarrow \angle DEA = \angle DEB = 90°$

$\angle CEB = 90° - \angle CED = 45°$

2) Рассм. 4-уг. $CDEB$: $\angle DCB + \angle CEB = 180°$

$\Rightarrow$ $CDEB$ – впис. 4-уг. по пр.

Проведём DB $\angle CDB = \angle CEB = \overset{\frown}{CB} = 45°$ (впис. углы опир. на одну дугу), тогда в $\triangle CDB$ $\angle CBD = 90° - \angle CDB = 45°$

$\Rightarrow \triangle BCD$ – р/б, тогда $BC = CD$

3) ~~Пусть $AD = x$, $CD = y$, тогда~~

$$\frac{AD}{AC} = \cancel{\frac{x}{x+y}} = \frac{AC-DC}{AC} = \frac{AC-BC}{AC} = \frac{\frac{5\sqrt{29}}{2} - \sqrt{29}}{\frac{5\sqrt{29}}{2}} = \frac{3\sqrt{29}\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}\cdot 5\cdot\sqrt{29}} = \frac{3}{5}$$

$\Rightarrow AD = \frac{3}{5}AC = \frac{3}{5}\cdot\frac{5\sqrt{29}}{2} = \frac{3\sqrt{29}}{2}$

4) Рассм. $\triangle AED$ и $\triangle ABC$: $\angle DAE$ – общий, $\angle DEA = \angle ACB = 90°$ $\Big\}$ $\Rightarrow \triangle AED \sim \triangle ACB$ по 2-м углам

$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$. Площади подобных $\triangle$-ов относятся как квадраты соотв. сторон.

$$\Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{AD^2}{AB^2} = \frac{(3\cdot\sqrt{29})^2\cdot 4}{\cancel{4}4\cdot 29^2} = \cancel{\frac{3\cdot 29}{29\cdot 2\cdot 3}} = \frac{9\cdot 29}{29^2} = \frac{9}{29}$$

(AB найдено ~~в след. пункте~~ на след. стр.)

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

к. п. 4

5) (П/о т. Пифагора в $\triangle ABC$:

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{29}}{2}\right)^2 + (\sqrt{29})^2} = \sqrt{\frac{25 \cdot 29}{4} + \frac{29 \cdot 4}{4}} = \frac{29}{2}$)

~~5) $AD = AC - CD = AC - BC$.~~

6) $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cancel{AB}\, AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{29}}{2} \cdot \sqrt{29} = \frac{29 \cdot 5}{4}$

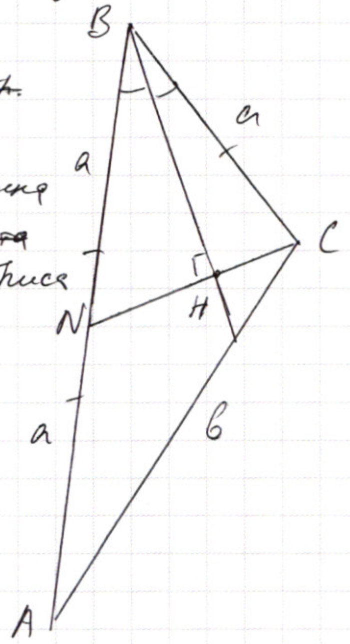
$\Rightarrow S_{ADE} = \frac{9}{29} S_{ABC} = \frac{9 \cdot \cancel{29} \cdot 5}{\cancel{29} \cdot 4} = \frac{45}{4} = 11{,}25$

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$, $S_{ADE} = 11{,}25$.

№2

Рассм. произв. △-к, удовлетвор. усл. задачи

~~CN-биссектр.~~
~~BH-~~
CN - медиана
BH - ~~высота~~ биссектриса



$BH \perp NC$ по усл., тогда в $\triangle BNC$ BH - биссектр. и высота $\Rightarrow \triangle BNC$ - р/б по признаку, тогда $BN = BC$

$BN = AN$ по опр. мед.

$\Rightarrow BN = AN = BC$

Пусть $BN = AN = BC = a$

$AC = b$

~~Т.к.~~ $\Rightarrow$ ст. △-ка: $AB = 2a$, $BC = a$, $AC = b$

По нер. △-ка:

~~$AB + BC < AC$~~ ~~$AB + $~~

$\begin{cases} AB < BC + AC \\ AC < AB + BC \\ BC < AB + AC \end{cases}$ $\begin{cases} 2a < a + b \\ a < 2a + b \\ b < 2a + a \end{cases}$ $\begin{cases} a < b \\ b > -a \iff b \in \\ b < 3a \end{cases}$ $\boxed{a < b < 3a}$ (A)

При этом $P_{ABC} = 3a + b = 300$ $b = 300 - 3a$, подст. в нер. (A):

$a < 300 - 3a < 3a \iff \begin{cases} a < \frac{300}{4} \\ a > \frac{300}{6} \end{cases}$ $\begin{cases} a < 75 \\ a > 50 \end{cases}$ $a \in (50; 75)$, если $a \in \mathbb{Z}, 50$

$a = \{\cancel{50, 51} \ldots 51, 52, 53 \ldots 74\}$ — всего 24 числа. Для каждого a найдётся b

$\Rightarrow$ кол-во таких △-ов = кол-ву $a = 24$

Ответ: 24.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2x)^2=xy \\ y-2x\geq 0 \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy \ (1) \\ y-2x\geq 0 \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

(1): $y^2-5xy+4x^2=0$

$D=25x^2-16x^2=9x^2$

$$\left[\begin{array}{l} y=\frac{5x+3x}{2}=4x \\ y=\frac{5x-3x}{2}=x \end{array}\right.$$

~~$4x-2x\geq 0$ (6)~~
$4x-2x\geq 0$
$2x\geq 0$
$x\geq 0$ - верно, если $x\geq 0$

$x-2x\geq 0$
$-x\geq 0$
$x\leq 0$ - верно, если $x\leq 0$.

Верн. к сист.:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=4x \\ y=x \end{array}\right. \\ y-2x\geq 0 \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=4x \\ x\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=x \\ x\leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=4x \\ 8x+x^2=9 \ (2) \\ x\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=x \\ 2x+x^2=9 \ (3) \\ x\leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

(2): $x^2+8x-9=0$

$D_1=16+9=25$

$$\left[\begin{array}{l} x=-4+5=1 \\ x=-4-5=-9 \end{array}\right.$$

(3): $x^2+2x-9=0$

$D_1=1+9=10$

$$\left[\begin{array}{l} x=-1+\sqrt{10} \\ x=-1-\sqrt{10} \end{array}\right.$$

Верн. к сист.:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=4x \\ \left[\begin{array}{l} x=\cancel{-1+\sqrt{10}}\ 1 \\ x=\cancel{-1-\sqrt{10}}\ -9 \end{array}\right. \\ x\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=x \\ \left[\begin{array}{l} x=-1+\sqrt{10} \\ x=-1-\sqrt{10} \end{array}\right. \\ x\leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1-\sqrt{10} \\ y=-4-4\sqrt{10} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(1;4)$; ~~$(-1-\sqrt{10});(-4-4\sqrt{10})$~~
$(-1-\sqrt{10};-4-4\sqrt{10})$.

№6

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6 \ (1) \\ x^2-2x-3y+y^2\le 0 \ (2) \end{cases}$$

(2): $x^2-2x-3y+y^2\le 0$

$x^2-2x+1-1+y^2 \cancel{-3y} -2\cdot\frac{3}{2}y+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\le 0$

$(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2\le\frac{13}{4}$ – ур-ие окр-ти с ц. в т. $O\left(1;\frac{3}{2}\right)$ и рад. $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

(1): $|3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6$

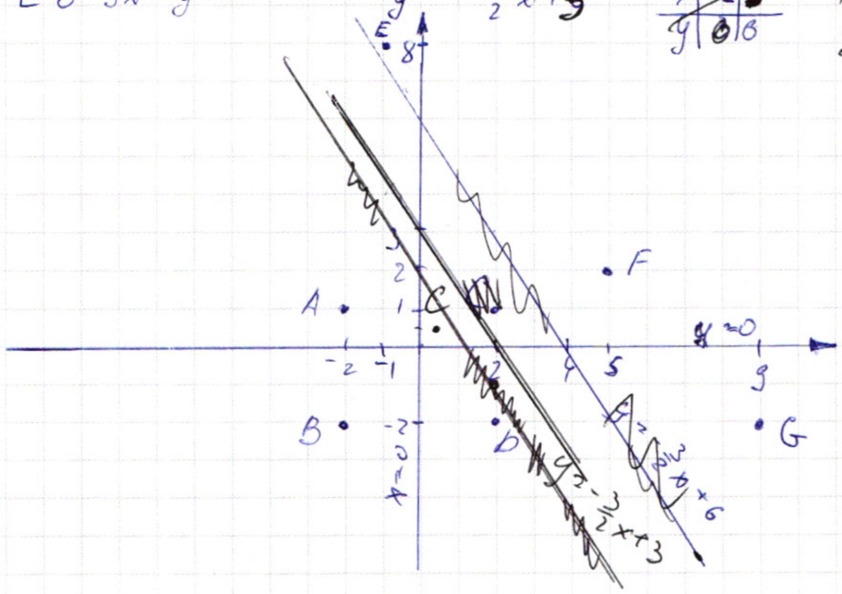
Найдём нули модулей ~~опр~~

$$\left[\begin{array}{l} 3x=0 \\ 2y=0 \\ 6-3x-2y=0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ y=-\frac{3}{2}x+3 \end{array}\right.$$

$y=-\frac{3}{2}x+6$ – лин. ф-ция, гр. – прямая

x	2	0
y	0	6

x	2	0
y	0	3



Постр гр-ки этих прямых.
Они разбивают коорд плоскость на 7 ~~8~~ частей, на каждой из которых знаки модулей постоянны.

Возьмём контр. точки из каждой части пл-ти и опред знаки модулей.

	$A(-2;1)$	$B(-2;-2)$	$C\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$D(2;-2)$
$\vert 3x\vert$	–	–	+	+
$\vert 2y\vert$	+	–	+	–
$\vert 6-3x-2y\vert$	+	+	+	+

	$E(-1;8)$	$F(5;2)$	$G(-2;9)$
$\vert 3x\vert$	–	+	–
$\vert 2y\vert$	+	+	+
$\vert 6-3x-2y\vert$	–	–	–

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~пр.~~ A:

$$\begin{cases} \cancel{y \geq 0} \\ \cancel{x \leq 0} \\ -3x+2y+6-3x-2y>6 \\ \cancel{6-3x-2y \geq 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{y \leq 0} \\ \cancel{x \leq 0} \\ -3x-2y+6-3x-2y>6 \\ 6-3x-2 \end{cases}$$

$\cancel{y \geq 0}$

$\cancel{x \geq 0}$

A: $-3x+\cancel{2y}+\cancel{6}-3x-\cancel{2y}>\cancel{6}$

$-6x>0$

$x<0$

B: $-3x-2y+\cancel{6}-3x-2y>\cancel{6}$

$\cancel{0>0\ (н.в.)}$

$-6x-4y>0$

$-4y=6x$

$y=-\frac{3}{2}x$

x	2	4
y	-3	-6

C: $3x+2y+6-3x-2y>6$

$0>0$ (н.в.)

D: $\cancel{3x}-2y+\cancel{6}-\cancel{3x}-2y>\cancel{6}$

$-4y>0$

$y<0$

E: $-\cancel{3x}+2y-6+\cancel{3x}+2y>6$

$4y>12$

$y>3$

F: $3x+2y-6+3x+2y>6$

$6x+4y>12$

$3x+2y>6$

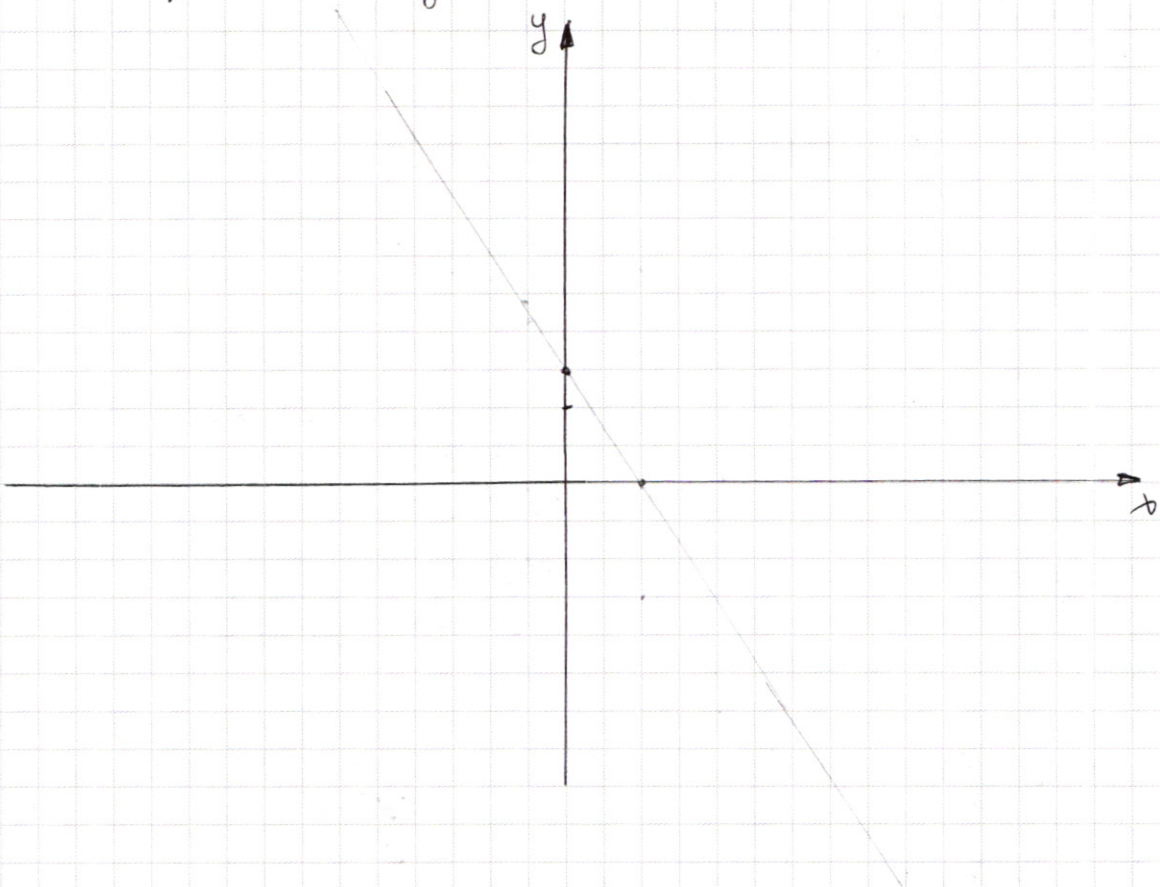
$y=\frac{6-3x}{2}=3-\frac{3}{2}x$

G: $-\cancel{3x}+2y-6+\cancel{3x}+2y>6$

$4y>12$

$y>3$

Построим гр-ки в одной коорд. пл-ти:



☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

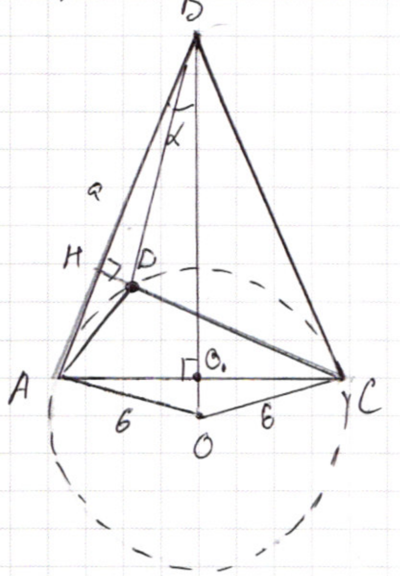
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Дано:

$S_{ABD} = 15$

$r = 6$

$\frac{AB}{CH}$ – ?

Решение:

1) $AB = AC$ по св. кас. $\Rightarrow$ $\triangle ABC$ р/б; доп. постр. BO_1 – мед., высс. и биссектр.

Пусть $AB = a$, $\angle ABO_1 = \alpha$, тогда

$BO_1 = a\cos\alpha$

$AO_1 = a\sin\alpha$ $\quad AC = 2a\sin\alpha$

в $\triangle AHC$:

$CH = AC\cdot\sin(90^\circ-\alpha) = 2a\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

2) в $\triangle ABO_1 \sim \triangle OBA$ по 2-углам ($\angle OAB = 90^\circ$ по св. рад., $\angle\alpha$ – общий)

$\Rightarrow \frac{AB}{O_1B} = \frac{OA}{O_1A}$ $\quad \frac{a}{a\cos\alpha} = \frac{6}{a\sin\alpha}$

$6 = a\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

3) $S_{ADH} = \frac{1}{2}DH\cdot AB = 15$

$DH = \frac{30}{a}$

4) По св. кас. и сек.: $AH^2 = HD\cdot CH = \frac{30}{a}\cdot 2a\sin\alpha\cos\alpha = 60\sin\alpha\cos\alpha$.

~~5) По т. Пиф. в $\triangle$ AHC: $AC^2 = AH^2 + CH^2$~~

$4a^2\sin^2\alpha = 60\sin\alpha\cos\alpha + 4a^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$4a^2\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha) = 60\sin\alpha\cos\alpha$

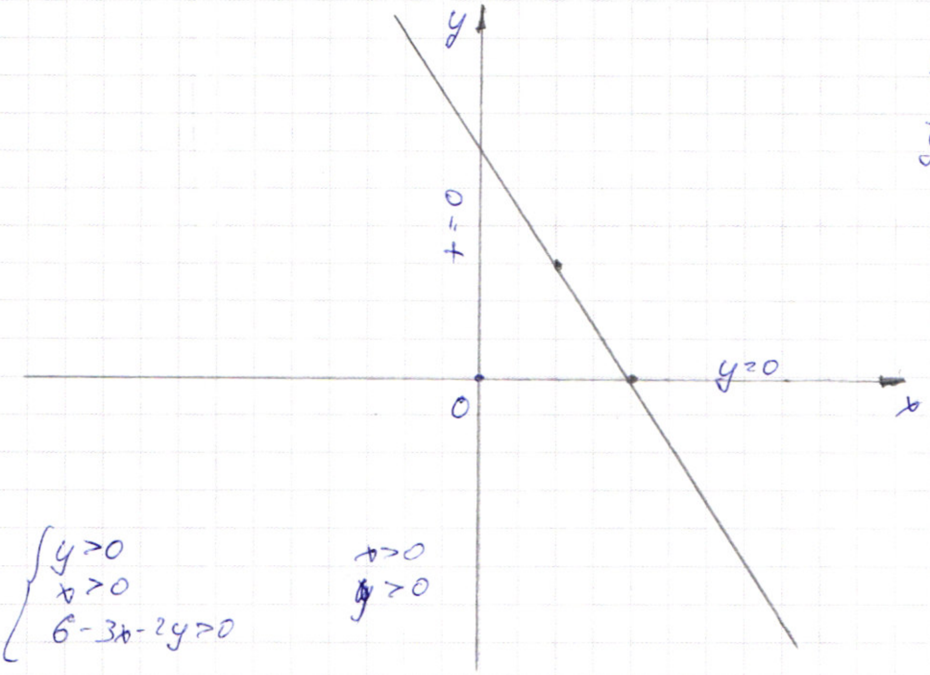
$4a^2\cdot\sin^4\alpha = 60\sin\alpha\cos\alpha$

$a^2\sin^4\alpha = 15\sin\alpha\cos\alpha$

5) $\frac{AB}{CH} = \frac{a}{2a\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)



$y = -\frac{3}{2}x + 6$

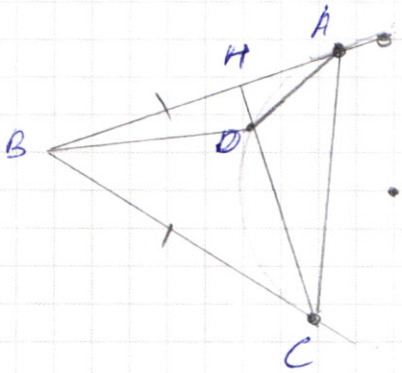
x	2	4
y	3	6

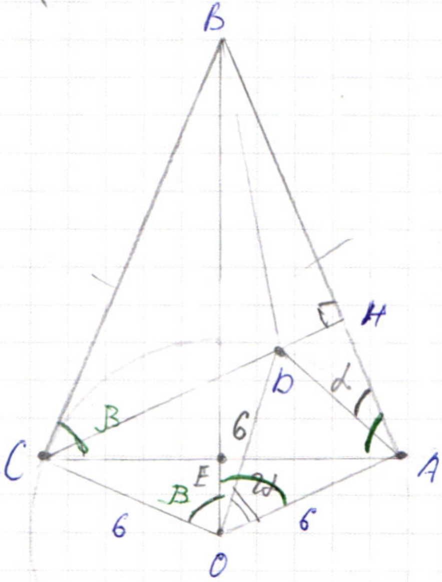
$\begin{cases} y > 0 \\ x > 0 \\ 6 - 3x - 2y > 0 \end{cases}$

$x > 0$
$y > 0$

$3x + 2y - 6 + 3x + 2y$

$S_{ABD} = 15$
$R = 6$
$\frac{AB}{CH} - ?$





$S_{ABD} = S_{ABD} = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot AD \cdot AB = 15$

$\cancel{AH^2 = CD \cdot DH.}$ $\frac{1}{2} DH \cdot AB = 15$

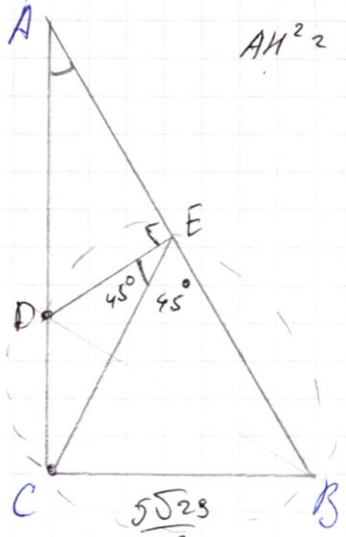
$AH^2 = DH \cdot CH = DH(CD + DH)$

$\cancel{\frac{OE}{CE}} \, 2$ $\frac{OE}{6} = \frac{CE}{BC} =$

$\sqrt{28}$

$AB = \sqrt{28 + \frac{25 \cdot 28}{4}} =$

$= \sqrt{\frac{28 \cdot 4 + 25 \cdot 28}{4}} = \frac{28}{2}$



$\frac{5\sqrt{28}}{2}$

$AH^2 = DH \cdot CH$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\le 0$

$4x(x-3)+|x||x-3|\le 0$

$4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|\ne 0$

$\cancel{|x||x-3| \ne -4x(x-3)}$

$4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|=0$

$4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|=0$

$|x|$: $-$ $+$ $+$

$|x-3|$: $-$ 0 $-$ 3 $+$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le 0 \\ 4x^2-12x+x^2-3x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0\le x<3 \\ 4x^2-12x-x^2+3x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 3 \\ 4x^2-12x+x^2-3x=0 \end{cases} \end{array}\right.$

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$

$x^2-2x+5=0 > 0$

$D_1=1-5<0$

$6-3x-2y=0$

$6=3x+2y$

$|3x|+|2y|-6+|6-3x-2y|>0$

$|3x|+|2y|-6+|6-3x-2y|=0.$

$3x=0$

$5x^2-15x=0$

$x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$

$3x^2-9x=0$

$3x(x-3)=0$

$\begin{cases} x\ne 0 \\ x\ne 3 \end{cases}$

$5x^2-15x=0$

$x(x-3)=0$

$\cancel{3y}=$

$3y=2\cdot\frac{3}{2}y$

$y^2-4xy+4x^2=xy$

$y^2-5xy+4x^2=0$

$D=\cancel{5x}\ 25x^2-16x^2=9x^2$

$y-2x\ge 0$

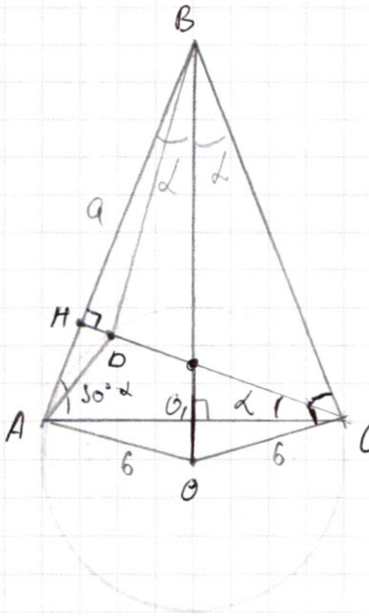
$\left[\begin{array}{l} y=\frac{5x+3x}{2}=4x \\ y=\frac{5x-3x}{2}=x \end{array}\right.$

$2y=6-3x$

$y=3-\frac{3}{2}x$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



$a\cos\alpha = h$

$2a\sin\alpha = AC$

$(2a\sin\alpha)\cdot\sin(90°-\alpha) = CH$

$2a\sin\alpha\cdot\cos\alpha = CH$

$a\sin 2\alpha = CH$

$\frac{CH}{AB} = \frac{a}{a\sin 2\alpha}$

$\frac{1}{2}DH\cdot AB = 15$ $\qquad \frac{30}{a\cdot}$

$DH\cdot AB = 30$

$DH = \frac{30}{a}$ $\qquad \frac{1}{2}DH\cdot AB$

$f(ab) = f(a)+f(b)$ $\qquad f(p) = p$

$= \frac{CH}{BO_1}$ $\qquad 2y = 6-3x$

$(x^2-2x+1)-1+y^2-\cdot$ $\qquad y = 3-\frac{3}{2}x$

$x^2 \quad \cancel{2x}(x^2-2x+1)-1+y^2-2\cdot\frac{3}{2}y+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\le 0$ $\qquad AH^2 = DH\cdot CH$

$(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2 \le \frac{9}{4}+1$ $\qquad AH^2 = \frac{30}{\cancel{a}}\cdot a\cdot\sin 2\alpha$

$f(ab) = f(a)+f(b)$

$AH^2+CH^2 = AC^2$

$\frac{AO_1}{\cancel{AO}} = \frac{O_1B}{AB}$ $\qquad \frac{2a\sin\alpha}{a} = \frac{AC}{AB} = \frac{CH}{BO_1} = \frac{CH}{a\cos\alpha}$

$\frac{a\sin\alpha}{6} = \frac{a\cos\alpha}{a}$ $\qquad \cancel{2a} \quad 2a\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$a\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 6$

$\sin\alpha = \frac{6}{a}\cos\alpha$ $\qquad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = 1-\frac{36\cos^2\alpha}{a^2}$ $\qquad a^2-36c$

$AH^2 = HD\cdot HC = \frac{30}{a}\cdot 2a\sin\alpha\cos\alpha$

$S_{ABD} = \frac{1}{2}DH\cdot AB = 15$ $\qquad \frac{CH}{AB} = \frac{HD+CD}{AB} =$

$DH\cdot AB = 30$

$DH = \frac{30}{AB}$

$\frac{1}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

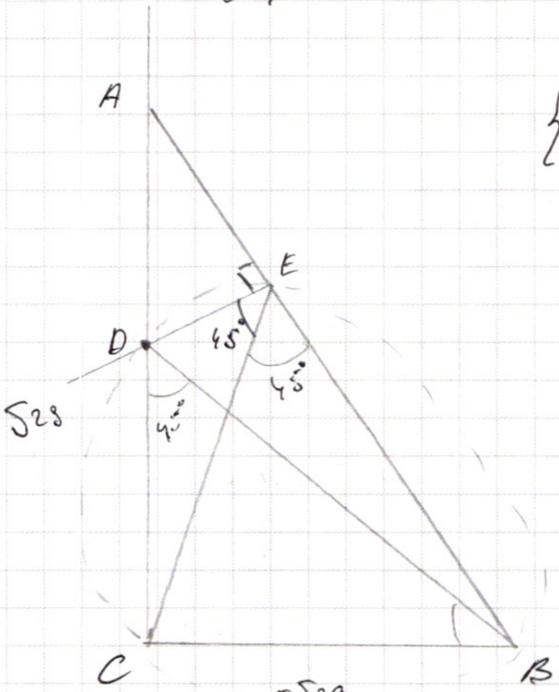
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2-2x+5=0$

$D_1=1-5<0$



$\frac{5\sqrt{2}}{2}$

$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\leq 0$

$\begin{cases} x^2-2x+5-4|x-1|\leq 0 \\ 4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|>0 \end{cases}$

$4x^2-12x=0$

$4x(x-3)=0$

$4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|=0$

$4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|=0$

~~4x(~~ $|x|\cdot|x-3|>4x(3-x)$

$x^2(x^2-6x+9)>16x^2(x^2-6x+9)$

$x^2(x^2-6x+9)$

$5x^2-15x$

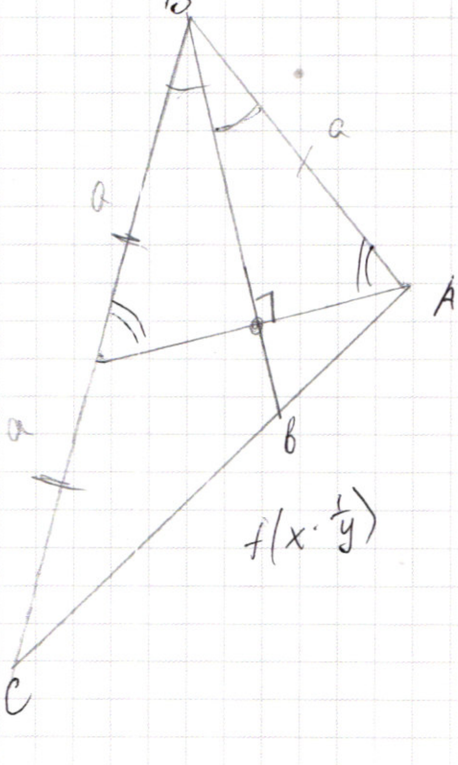
$5x$

$\cancel{\frac{BO}{a}}=\frac{a}{}$

$\frac{BO}{6}=\frac{x}{a\sin\alpha}$

$BO=\frac{6}{\sin\alpha}$

$a^2+36=\frac{36}{\sin\alpha}$



$f(x\cdot\frac{1}{y})$

$3a+b=300$

$2a<a+b$

$b<3a$

$a<2a+b$

$\begin{cases} a<b<3a \\ 3a+b=300 \end{cases}$

$b+3a<9a$

~~$b=3(a-100)$~~

$b=3(100-a)$

$a<300-3a$

$3(100-a)<3a$

$4a<300$

$300-3a<3a$

$\begin{cases} a<\frac{300}{4} \\ a>50 \end{cases}$

$a<75$

$a>50$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)