МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y| > 4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\le 0$. Преобразуем: ОДЗ: $x\ne 2$, $x\ne 0$.

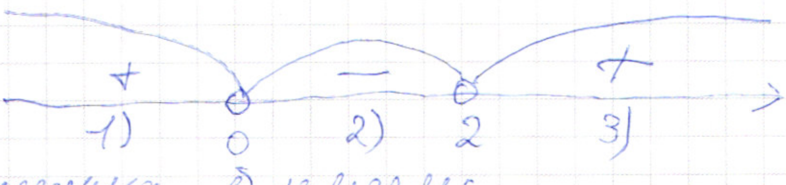
$\frac{(x-3)^2-2|x-3|+1}{2(x^2-2x)+|x^2-2x|}\le 0$, учитывая, что $(x-3)^2=|x-3|^2$

$\frac{(|x-3|-1)^2}{2(x^2-2x)+|x^2-2x|}\le 0$. Числитель неотрицателен,

$\Rightarrow 2(x^2-2x)+|x^2-2x|<0$

$|x^2-2x|<2(2x-x^2)$

Рассмотрим промежутки модуля $|x^2-2x|$:

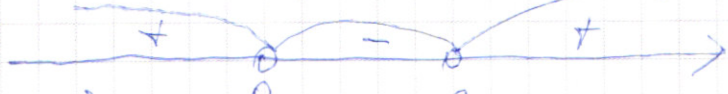


Для промежутка 1) имеем:

$x^2-2x<4x-2x^2$

$3x^2-6x<0.$

$3x(x-2)<0.$



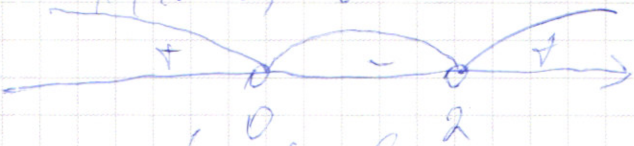
$x\in(0;2)$, но этот промежуток не удовлетворяет промежутку 1), $\Rightarrow$ для 1) решений нет.

Для 2) промежутка:

$2x - x^2 < 4x - x^2$

$x^2 - 2x < 0$

$x(x-2) < 0$



$x \in (0;2)$ всецело принадлежит промежутку 2).

3) Промежуток:

$x^2 - 2x < 4x - 2x^2$

$3x^2 - 6x < 0$

$3x(x-2) < 0$

$x \in (0;2)$, но не принадлежит промежутку 3), для 3) решений нет. Учитывая, что числ. может быть равен нулю, но:

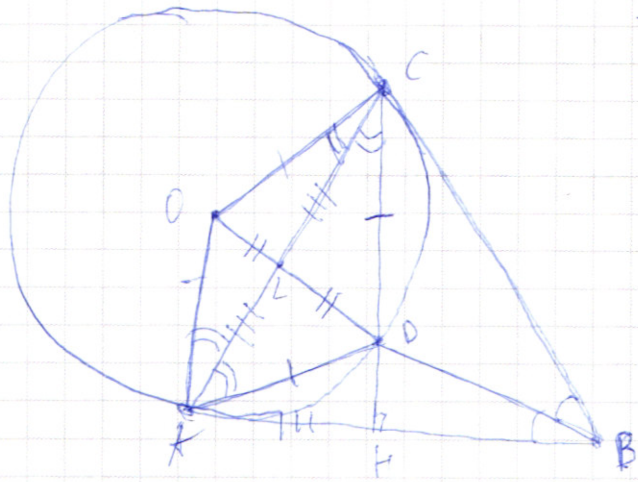
$|x-3| = 1$

1) $x = 4$

2) $x = 2$, но не принадлежит ОДЗ.

$\Rightarrow$ Ответ: $[0;2) \cup \{4\}$.

4.



По условию окр. вписана в $\angle ABC$, $\Rightarrow AB = CB$, $\angle ABD = \angle DBC$. Отсюда следует, что $\triangle ABD = \triangle DBC$ ($AB = BC$, $\angle ABD = \angle DBC$, DB – общая сторона), $\Rightarrow AD = DC$, тогда $\triangle ADC$ – р/б, $\angle CAD = \angle ACD$.

Проведем OA и OC. $OA \perp AB$ (св-о), тогда т.к. по условию $CH \perp AB$, то $OA \parallel CH$ (по одност. углам). $\Rightarrow \angle CAO = \angle ACD$ (накр. леж. при $OA \parallel CH$ и AC – сек.) Но $OA = OC$, т.к. радиусы, $\Rightarrow$ в $\triangle OAC$: $\angle OAC = \angle OCL$. $\Rightarrow \triangle OAC = \triangle ACD$ (по 2 углам и AC – общей).
$\Rightarrow OC = OA = AD = CD$, $\Rightarrow OACD$ – ромб. Тогда пусть $OD \cap AC = L$, тогда $OL = LD$, $AL = LC$, $OD \perp AC$ (св-ва ромба). Заметим, что $OL = 2$, т.к. $OD = OC = r = 4$ (по условию), $\Rightarrow$ в $\triangle OLC$: $\angle L = 90^\circ$, тогда $LC = \sqrt{OC^2 - OL^2}$ – теорем. Пифагора $\Rightarrow LC = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3} = AL$, тогда $S_{OCDA} = \frac{OD \cdot AC}{2} = \frac{4 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$, но $S_{OCDA} = AH \cdot DC$, $\Rightarrow$ $AH = \frac{8\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}$. В $\triangle ADH$, $\angle H = 90^\circ$, $\Rightarrow DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{16 - 12} = 2$, тогда $CH = DC + DH = 6$.

Найдем AB. $S_{ABD} = DH \cdot AB \cdot \frac{1}{2}$, $\Rightarrow$
$AB \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 6$. $\Rightarrow AB = 6$, но тогда $\frac{AB}{CH} = \frac{6}{6} = \frac{1}{1}$

Ответ: $\frac{1}{1}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

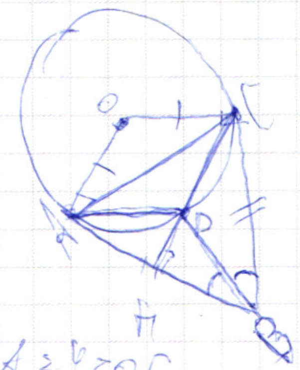
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

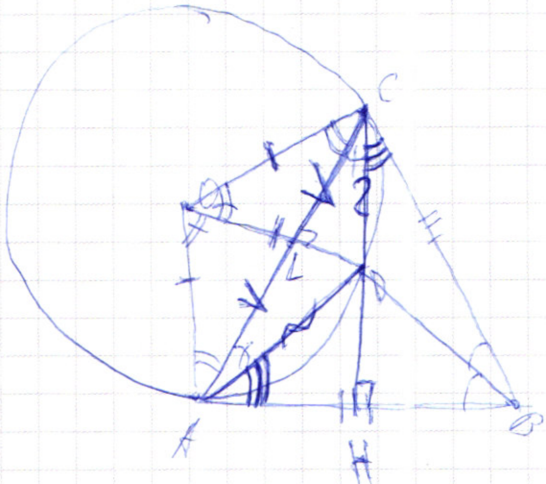
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$OA = 4 = OC.$

$S_{ABD} = 6.$

$\frac{AB}{CH} = \frac{7}{7}$

$S_{ABD} = AB \cdot DH \cdot \frac{1}{2} =$

~~$AB = S_{ABD}$~~

$AB \cdot DH = 12$

$6 = AB \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}$

$AB = 6$

$\triangle ADB = \triangle CDB$ ($CB = AB$, $\angle ABD = \angle DBC$, DB – общая сторона,

$S_{ABC} = AB \cdot CH \cdot \frac{1}{2}$

~~S_{ABC}~~

$S_{ABD} = S_{CDB} = 6.$

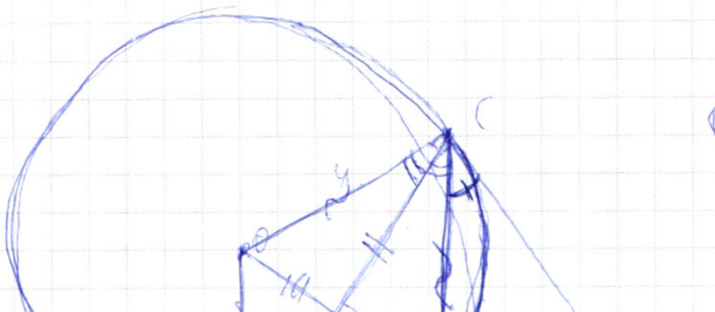
$DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{16 - 12} = 2.$

$\frac{AB}{CH}$

$CH = 2 + 4 = 6.$

$CD = 4 = AD,$

$CD \parallel OA$, $CD = OA$, $OC = AD$, $\Rightarrow OCDA$ – ромб.



$S = \frac{abc}{4R}$

$\triangle OLC$: $\angle L = 90° \Rightarrow LC = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3} = LA.$

$S_{OACD} = \frac{4 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3} \Rightarrow AH \cdot DC = 4AH.$

$AH = 2\sqrt{3}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2.

Заметим, что ~~для~~ у треугольников по условию ΔABC, $AC=AD=DB$, где CD – мед., AL – бисс. $AL \cap CD = O$.

ΔADO ~~треугольн.~~ $= \Delta AOC$,

($\angle CAO = \angle DAO$ – т.к. AL – бисс. и AO – общая) $\Rightarrow DA = AC$.

Пусть $DA = x$, тогда $AB = 2x$, $AC = x$. Пусть $LC = y$, тогда по свойству бисс.: $\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}$; $\frac{BL}{y} = \frac{2}{1} \Rightarrow BL = 2y$, тогда во всех таких треугольниках выполняется равенство:

$$2x + x + y + 2y = 600$$

$x + y = 200$. А т.к. AC, AB и BC – целочисленные стороны, то $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N} \Rightarrow$ Нужно найти количество способов разложения числа 200 на 2 натуральных числа, но учитывая неравенство треуг. получаем, что:

$2x + x > 3y$ $\qquad$ $x + 3y > 2x$

$x > y$. $\qquad$ $3y > x$

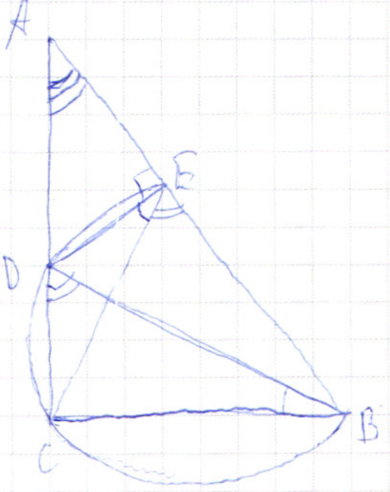
Тогда значения x будут больше 100, но меньше 200, $\qquad$ $y > \frac{x}{3} > \frac{y}{3} \Rightarrow y$ – любое и это нер. не учитываем.

$\Rightarrow$ кол-во способов $= 199 - 100 = 99$

Ответ: 99 способов.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

5.



Найдем AB:

$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}$ (теор. Пифагора)

$AB = \sqrt{7 + \frac{28}{3}} = \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$.

Заметим, что вокруг четырёхугольника DEBC можно описать окружность, т.к. $\angle DEB = 90°$, $\angle ACB = 90°$ (из условия) и $\angle DEB + \angle DCB = 180°$. $\Rightarrow \angle DEC = \angle DBC$ (вписанные углы).

$\angle CEB = \angle DCB$ (вписанные углы), но

$\angle CEB = \angle DEB - \angle CED = 90° - 30° = 60°$.

$\Rightarrow$ в $\triangle DCB$: $\angle C = 90°$, $\angle CDB = 60°$, $\angle CBD = 30°$, тогда $2DC = DB$ (св-о угла $30°$ в прямоугол. треуг.)

Пусть $DC = x$, тогда $DB = 2x$. В $\triangle DCB$:

$4x^2 = x^2 + BC^2$,

$3x^2 = \frac{28}{3}$

$9x^2 = 28$

$x^2 = \frac{28}{9}$

$x = \frac{2\sqrt{7}}{3}$, тогда $AD = AC - CD = \sqrt{7} - \frac{2}{3}\sqrt{7} = \frac{\sqrt{7}}{3}$,

тогда $\frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{7}}{3} : \sqrt{7} = \frac{1}{3}$. Заметим, что $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, т.к. $\angle DEA = \angle ACB = 90°$, и $\angle CAB$ - общий, тогда

$k = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{7}}{3} : \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{21}$, найдем S_{ABC}:

$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AC}{2} = \left(2\sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt{7}\right) : 2 = \frac{14}{\sqrt{3}} : 2 = \frac{7}{\sqrt{3}}$. Известно, что

$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = k^2$, тогда $S_{ADE} = \frac{21}{441} \cdot \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7}{21\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$, $S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7. Пусть x_p – ~~множество~~ какое-то простое число на отрезке $[1; 17]$, y_p – аналогично, тогда:

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0.$$

Легко заметить, что $x_p \in \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17\}$ и y_p – аналогично, тогда: $\frac{1}{y_p}$ – рац. число.

$$f\left(\frac{x_p}{y_p}\right) = f(x_p) + f\left(\frac{1}{y_p}\right) = x_p + f\left(\frac{1}{y_p}\right) < 0, \text{ тогда}$$

$$x_p < -f\left(\frac{1}{y_p}\right)$$

Тогда к способов равно $7 \cdot 7 = 49$, т.к. x_p – 7 значений, как y_p.

Ответ: 49

3. Пусть $x-2y=v$, $x+2y=w$, тогда: ОДЗ: $xy>0$.

$xy=\frac{w^2-v^2}{8}$

$x=\frac{v+w}{2}$

$y^2=\frac{(w-v)^2}{4}$. Тогда система имеет вид:

$$\begin{cases} v^2=\frac{w^2-v^2}{8} & (1) \\ \frac{v+w}{2}+\left(\frac{w-v}{4}\right)^2=5 & (2). \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение:

$v^2=\frac{w^2-v^2}{8} \Leftrightarrow 9v^2=w^2$, $3|v|=|w|$, тогда есть 4 варианта раскрытия модуля:

$8v^2=w^2-v^2$

1) $3v=w$, подставим во 2 уравнение, тогда $v>0$, $w>0$.

$\frac{4v}{2}+\left(\frac{2v}{4}\right)^2=5$.

$2v+\frac{v^2}{4}=5 \quad |\cdot 4$

$8v+v^2=20$.

$v^2+8v-20=0$.

$D=64+80=144=12^2 \Rightarrow v_1=\frac{-8+12}{2}=2$, $v_2<0$ - не удовл.

Тогда $w=6$. $\Rightarrow \begin{cases} x-2y=2 \\ x+2y=6. \end{cases}$

$4y=4$

$y=1$, тогда $x=4$.

2) $3v=-w$, также подставим, $w<0$, $v>0$.

получаем:

$-\frac{2v}{2}+\left(\frac{-4v}{4}\right)^2=5$.

$-v+v^2=5$

$v^2-v-5=0 \quad D=1+20=21 \quad v_1=\frac{1+\sqrt{21}}{2} \quad v_2<0$.

Тогда $W = \frac{-3-3\sqrt{21}}{2}$, $\Rightarrow \begin{cases} x-2y = \frac{1+\sqrt{21}}{2} \\ x+2y = \frac{-3-3\sqrt{21}}{2} \end{cases}$

$4y = \frac{-4-4\sqrt{21}}{2}$

$y = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$, тогда:

$x = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$.

~~3) $-3V=W$. Заметим, что этот случай аналогичен 2), т.к. $-3V=W \Leftrightarrow 3V=W$.~~

~~4) $-3V=-W \Leftrightarrow 3V=W$, тогда.~~

~~Ответ: $(4;1)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$~~

3) $-3V=W$ $\qquad V<0,\ W>0$.

Аналогично, получаем.

$V^2-V-5=0$, $D=21$

$V_1 = \frac{1+\sqrt{21}}{2} > 0$, не удовл.

$V_2 = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$, тогда.

$W = -3V = \frac{3\sqrt{21}-3}{2}$

$x-2y = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$

$x+2y = \frac{3\sqrt{21}-3}{2}$

$4y = \frac{4\sqrt{21}-4}{2}$

$y = \frac{\sqrt{21}-1}{2}$, тогда $x = \frac{\sqrt{21}-1}{2}$.

4) $-3V=-W$, тогда получаем $\qquad V<0,\ W<0$.

$V^2+8V-20=0$, $D=12^2$

$V_1 = \frac{-8+12}{2} > 0$, не удовл.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$V^2 = \frac{W^2 - V^2}{8}$

$V = x - 2y$

$W = x + 2y$

$\frac{V+W}{2} + \left(\frac{W-V}{4}\right)^2 = x^2 + y^2 = 5$

$x \cdot y > 0$

$\frac{V+W}{2} + \left(\frac{W-V}{4}\right)^2 = 5$

$8V^2 = W^2 - V^2$

$9V^2 = W^2$

$\frac{V+W}{2} + \frac{(W-V)^2}{16} = 5 \quad | \cdot 16$

$|3V| = |W|$

$3|V| = |W|$

$\cancel{8y = 2x}$

1) $-3V = -W \quad -6y - 3x = -x - 2y \quad 2x = 4y \quad x = 2y$

2) $-3V = W \quad 6y - 3x = x + 2y \quad 4y = x, \; x = 4y$

3) $3V = -W \quad 3x - 6y = -x - 2y \quad 4x = 4y, \; x = y$

4) $3V = W \quad 3x - 6y = x + 2y$

$2x = 8y$

$x = 4y$

$-3V = 6y - 3x$

$-W = -x - 2y$

$6y - 3x = -x - 2y$

$8y = 2x$

$x = 4y$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$V_2 = \frac{-8-12}{2} = -10$, тогда $W = -30$. $\Rightarrow$

$$-\begin{cases} x-2y=-10 \\ x+2y=-30 \end{cases}$$

$-4y = -20$

~~y = -10 тогда~~ $y=-5$, тогда

~~x = 12. 30~~ $x = -20$

Ответ: $(4;1)$, $(-20;-5)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{21}-1}{2}; \frac{\sqrt{21}-1}{2}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$

$5-y^2=\sqrt{xy}+2y$

$y^2+2y=5-\sqrt{xy}$

$y(y+2)$

$\sqrt{xy}=v$

$w=x-2y$

$w^2=x^2-4yx+4y^2$

$w^2-4v^2=x^2+4y^2$

$w=v$

$w+2y+y^2=5$

$w+y(2+y)=5$

$x^2-4yx+4y^2=xy$

$x+y^2=5 \quad \cdot 4$

$\begin{cases} x^2-5xy+4y^2=0 \\ 4x+4y^2=20 \end{cases}$

$x^2-4x-5xy=0-20$

$x(x-4-5y$

$x-2y=v$

v^2

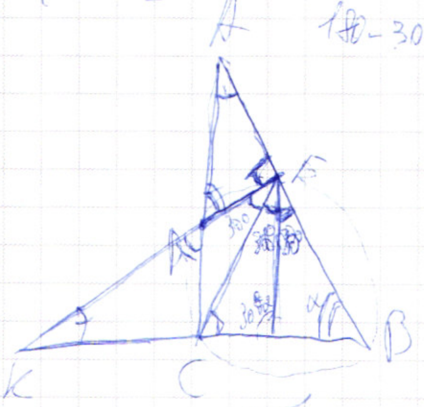
ОДЗ:

$\sqrt{xy}\geq 0$

$xy\geq 0$

$\sqrt{\frac{16-\sqrt{7}}{3}}$

$180-30-30^\circ-\alpha=120-\alpha$



$4\sqrt{\frac{7}{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$

$4\sqrt{\frac{7}{3}}=\frac{2\sqrt{7}\sqrt{3}}{3}$ $\sqrt{7}$

$AC=\sqrt{7}$

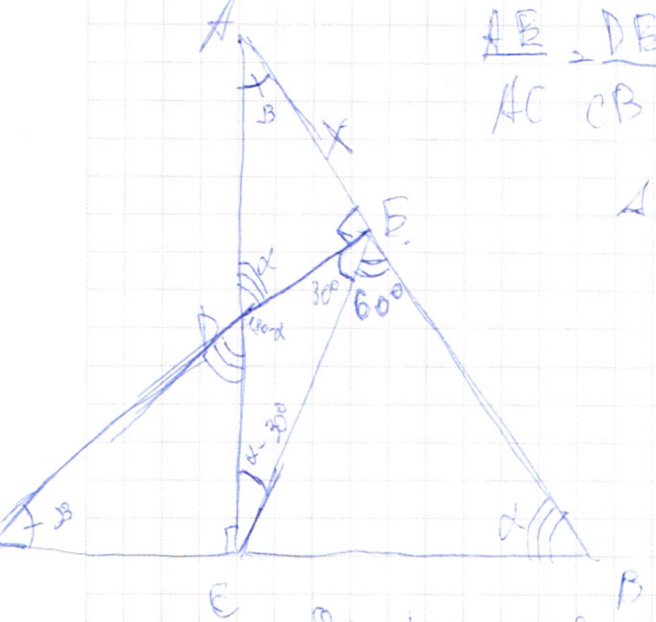
$BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\angle CFD=30^\circ$

$AB=\sqrt{7+\frac{28}{3}}=$

$=\sqrt{\frac{49}{3}}=$

$=\frac{7}{\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$



$\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{CB}=\frac{AD}{AB}$

$\triangle ADC\sim\triangle DAE$

$\frac{AE}{KC}=\frac{DE}{DC}=\frac{AD}{KD}$

$AC=\sqrt{7}$

$BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$AB=\frac{7\sqrt{3}}{3}$

$\frac{x}{\sqrt{7}}=\frac{DE}{2\sqrt{\frac{7}{3}}}=\frac{AD}{\frac{7\sqrt{3}}{3}}$

$\frac{S_{AED}}{S_{ABC}}=k^2=\frac{x^2}{\sqrt{7}}$

$\cancel{180^\circ=90+\alpha-30}$ $30^\circ+\beta$

$90-\alpha+30=120^\circ-\alpha$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$AC = \sqrt{7}$

$BC = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$

$2\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \cdot 2 =$

$= \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{21}}{3}$

$AB = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

$BC = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{3}}$

$\cancel{x(x-2)+y(y-4) \le 0}$

$\cancel{(x+y)^2 - 2xy - 2x - 4y}$

$AB = \sqrt{\frac{49}{\sqrt{3}}}$

$1 \le x \le 18$

x	11		
y	1		

$x = \frac{1 + \sqrt{121} - 2 - 2\sqrt{24}}{2}$ $x = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$

y [illegible]

$= \frac{-1-\sqrt{24}}{2}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) \le 0$

$2 + 2 + 1 \ge 0$

$f(x_p) = x_p$

$f(y_p) = y_p$

$f\left(x_p \cdot \frac{1}{y_p}\right) = f(x_p) + f\left(\frac{1}{y_p}\right)$

$= x_p + f\left(\frac{1}{y_p}\right) \le 0$

$P = 600$

$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}$

$\frac{BL}{LC} = \frac{2x}{x}$

$V^2 = \frac{W^2 - 8V^2}{8}$

$BL + LC = ?$

$V = (x - 2y)$

$W = (x + 2y)$

$3y + 3x = 600$

$x + y = 200$

$(x - 2y)^2 = xy$

$\frac{V+W}{2} = x$

$\frac{(W-V)^2}{4} = 4y^2$

$W^2 - V^2 = 8xy$

$\frac{(W^2 - V^2)}{8} = xy$

$(x - 2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2$

$(x + 2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2-6x+9+1-2|x-3|}{2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|}\le 0.$$

$$\frac{(x-3)^2-2|x-3|+1}{2x(x-2)+|x(x-2)|}\le 0.$$

	1) $(-\infty;0]$	2) $(0;2]$	3) $(2;3]$	4) $(3;+\infty)$
$\|x-3\|$	−	−	−	+
$\|x\|$	−	+	+	+
$\|x-2\|$	−	−	+	+

1) $$\frac{x^2-6x+10+2(x-3)}{2x(x-2)+(-x)\cdot(2-x)}\le 0.$$

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x-2x+x^2}\le 0.$$

$$\frac{x^2-4x+4}{3x^2-6x}\le 0. \qquad \frac{(x-2)^2}{3x(x-2)}\le 0. \qquad x\ne 2$$

~~$\frac{(x-2)^2}{x(x-6)}\le 0$~~

$\frac{(x-2)}{3x}$

~~+ 0 2 6 +~~

~~Решений нет.~~

+ 0 − 2 +

Решений нет.

$(x-3)^2-2|x-3|+1$

$|x-3|=w$

w^2-2w+1

$(w-1)^2=$

$=(|x-3|+1)^2\ge 0.$

$2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|$

$|x^2-2x|$

$2x^2-4x$

$2(x^2-2x)+|x^2-2x|$

$x^2-2x=v$

$2v+|v|$

$x^2-2x=x(x-2)$

+ 0 − 2 +

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{(|x-3| \mp 1)^2 \geq 0}{2(x^2-2x)+|x^2-2x|} \leq 0.$$

$\leq 0.$

$x - 2y = w$

$\sqrt{xy} = v$

$w = v$

$x = 5 - y^2$

$5 - y^2 - 2y = \sqrt{xy}$

$2(x^2-2x) + |x^2-2x| \leq 0.$

$|x^2-2x| \leq 2(2x-x^2)$

1) $x^2 - 2x \leq 2(2x-x^2)$

~~x^2+2x^2-2x~~

~~$x^2 \leq 4x^2$~~

$x^2 - 2x \leq 4x - 2x^2$

$3x^2 - 6x \leq 0.$

$3x(x-2) \leq 0$

$+ \quad 0 \quad - \quad 2 \quad +$

$1 + 199$

$2 + 198$

$199 + 1$

$(-\infty; 0)$

Элементов нет.

$(0; 2)$

$2x + x > 3y$

$3x \quad 3x > 3y$

$x > y$

$x + 3y > 2x$

$3y > x$

$x > y$

$y > \frac{x}{3}$

2) $2x - x^2 \leq 4x - 2x^2$

$x^2 - 2x \leq 0.$

$x(x-2) \leq 0.$

$+ \quad 0 \quad - \quad 2 \quad +$

$101 + 99 = 200.$

199

$2x + 3y > x.$

$x + 3y > 0.$

$x > y$

$3y > x$

$(0; 2)$

$x + 3y > y + x$

$2y > 0.$

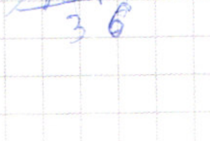
3) $x^2 - 2x \leq 4x - 2x^2$

$(2; +\infty).$

$3x^2 - 6x \leq 0$

$3x(x-2) < 0.$

$+ \quad 0 \quad - \quad 2 \quad +$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2+x+y^2x^2=\cancel{0}5$

$x(x+1)+y...(x-2y)^2=xy$

$\cancel{(x-2y-\sqrt{xy})(x-2y+\sqrt{xy})=0}$

$x-2y$

$y^2+2y=\sqrt{5}-\sqrt{xy}$

$\cancel{xy^2+2y+\sqrt{xy}=5}$

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$

$(x-2y)^2=xy$

$x^2+y^2=x^2$

$x^2+(y-x)(y+x)$

$x^2-4xy+4y^2=xy$

$x^2+4y^2=5xy$

$x+y^2=5$

$x^2+4y^2=5y(5-y^2)$

$x^2+4y^2=25y-5y^3$

$x^2+9y^2-25y=0$

$\frac{2\sqrt{7}}{3}\cdot\sqrt{7}$

$\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{1}=\frac{14}{\sqrt{3}}$

$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=k^2$

$S_{ABC}=\frac{AC\cdot CB}{2}$ $(x-y)=v$

$\geq$

$v^2=x^2-2xy+y^2$

$x^2+y^2=v^2+2v^2$

$AB^2=BC^2+AC^2=7+4\cdot\frac{7}{3}=$

$AB=\frac{7}{\sqrt{3}}=\frac{21}{3}+\frac{28}{3}=\frac{49}{3}$

$AC=\sqrt{7}$

$BC=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

$AB=\frac{7}{\sqrt{3}}$

$3x^2=\frac{28}{3}$

$9x^2=28$

$x=\frac{\sqrt{28}}{3}$ $DB=\frac{2\sqrt{7}}{3}$, x

$4x^2=x^2+\frac{28}{3}$

$3x$

$x-2y+y^2-2y=5$

$x-2y+y(y-2)=5$

$(x-2y)+(y-1)^2=6$

$(y-1)^2+\sqrt{xy}=6$

x

$2DC=DB$

$\triangle DBC$, $CB=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

$\exists DE=x$, тогда

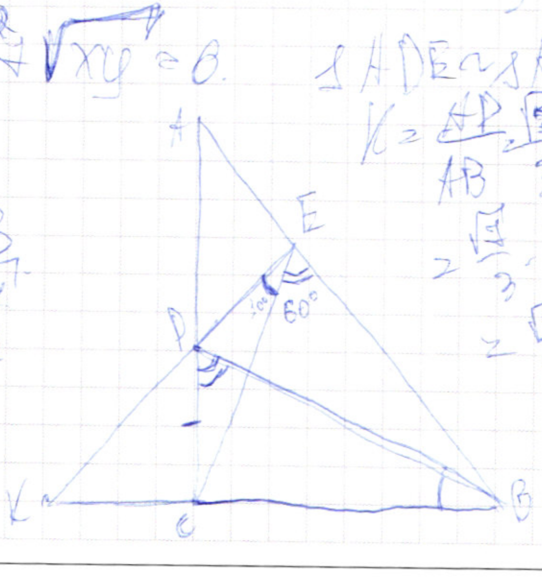
$\cancel{2y}$ $=v$

$r=DC=\frac{2\sqrt{7}}{3}$

$DB=\frac{4\sqrt{7}}{3}$

$\triangle ADE\sim\triangle ABC$

$k=\frac{AD}{AB}=\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{7}=\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{21}$



☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$4-2x-y>0.$ | $4-2x-y<0.$

$4>2x+y.$ | $2x+y\geq 4.$

I. $2x+y+|4-2x-y|>4.$

$4>2x+y>0.$

$f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0$

$f(x)<-f\left(\frac{1}{y}\right)$

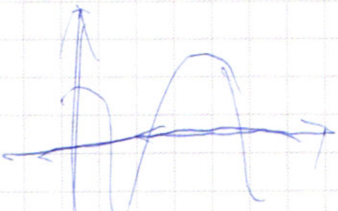
$\frac{1-\sqrt{9}}{2}=-W.$

Если $x=x_p=p$, ~~что~~ и y_p - простое, то $\frac{1}{y_p}$ - рац.,,

$W=\frac{3\sqrt{7}-3}{2}$

$x_p<-f\left(\frac{1}{y_p}\right)$

$-2W\ \cancel{2x}-2y$



$x-2y=V$ $\quad -V=2y-x.$

$y-x=W.$

$V+W=-y$

$(V+W)^2=y^2.$

$-V-2W=x.$

$x-2y=V$

$y-x=W$ $\quad (y-x)^2=y^2-2xy+x^2=$

$(V+W)^2=y^2.$

$(x-2y)^2=x^2-4xy+4y^2.$ $\quad -V-W=y.$

~~V~~ $V+2W=-x$

$2y-x+x-y=y.$

$V-W=-y$

$(-V-W)(V-2W)=xy$

$-V-2W=x.$

$W-V=y.$

$V^2=-(V+W)(V-2W)$

$\cancel{xy}$

$V+W=-y$

1) $V^2=(V+W)(2W-V)$

$x\cancel{y}=V$

$2V+W=-2y$

$-V-2W+2W+W=(V+W)(2W-V)^2)$

$-V-2W+(V+W)^2=5.$

$-(V+2W)+(V+W)^2=5.$

$(V-W)=(V+W)(2W-V)$

$V^2=2WV-V^2+2W^2-WV$

$V^2=WV-V^2+2W^2$

$-2V-4W+3WV=10.$

$2W^2+2V^2+WV=0$

$2(W^2+V^2)+WV=0.$

$-V-2W+V^2+2WV+W^2=5.$

$-2V-4W+2V^2+4WV+W^2=10.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)