МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство
$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе
$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

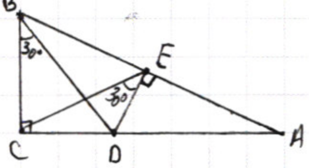
7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.

Дано:
$\triangle ABC$: AB-гипотенуза; AC-катет; $\angle C=90^\circ$; $D\in AC$; $E\in AB$; $DE\perp AB$; $AC=\sqrt{7}$; $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$; $\angle CED=30^\circ$

Найти: $\frac{AD}{AC}$-? S_{AED}-?



Решение:

Нетрудно видеть, что CBED-вписан в окружность по признаку: $\angle BCD+\angle BED=90^\circ+90^\circ=180^\circ$ (усл. + $BA\perp DE$) $\Rightarrow \angle CBD=\angle CED=30^\circ$ (вписанные углы в одну окружность и опирающиеся на одну дугу)

$\triangle BCD$-прямоугольный, $\angle CBD=30^\circ$ $\Rightarrow$ по определению тангенса острого угла в прямоугольном треугольнике: $tg30=\frac{CD}{BC}$, но это табличное значение, а значит $\frac{CD}{BC}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow CD=\frac{BC}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{7}$, но по рисунку $AC=AD+CD\Rightarrow$ $\Rightarrow AD=AC-CD=\frac{1}{3}\sqrt{7}$ $\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{7}}=\frac{1}{3}$.

$\triangle ABC$-прямоугольный $\Rightarrow$ по теореме Пифагора: $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{7+\frac{28}{3}}=\frac{7}{\sqrt{3}}$

Нетрудно видеть, что раз $\angle A$-общий для двух треугольников, то по определению синуса и косинуса в прямоугольном треугольнике:

$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{DE}{AD}\Rightarrow DE=\frac{AD\cdot BC}{AB}=\frac{\frac{1}{3}\sqrt{7}\cdot2\sqrt{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{\sqrt{3}}}=\frac{2}{3}.$$

$$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{AE}{AD}\Rightarrow AE=\frac{AC\cdot AD}{AB}=\frac{\sqrt{7}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{7}}{\frac{7}{\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$S_{AED}=\frac{1}{2}\cdot AE\cdot DE=\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

3.

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y\geq 0 \\ x^2+4y^2-4yx=xy \\ x+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y\geq 0 \ (1) \\ x^2+4y^2-5xy=0 \ (2) \\ x=5-y^2 \ (3) \end{cases}$ ОДЗ: $xy\geq 0$.

Из (3): $x^2=25+y^4-10y^2$; $-5xy=-25x+5y^3$

Тогда (2): $y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0$.

очевидно, что левая часть равна $(y+5)(y-1)(y^2+y-5)$:

$(y+5)(y-1)(y^2+y-5)=(y^2+4y-5)(y^2+y-5)=y^4+5y^3-6y^2-25y+25$.

Тогда раз правая часть - 0, то в левой одно из мн. - 0, а остальные имеют смысл.

а) $y=1 \Rightarrow x=4 \Rightarrow (4;1)$ - предположительное решение. Видно, что оно подходит по ОДЗ: $4>0$ и удовлетворяет (1): $4-2=2>0 \Rightarrow (4;1)$ - корень.

б) $y=-5 \Rightarrow x=-20 \Rightarrow (-20;-5)$ - предположительное решение. Видно, что оно подходит по ОДЗ: $+100>0$, однако (1) неверно $\Rightarrow (-20;-5)$ - не является корнем

в) $y^2+y-5=0$.

$D=1+20=21$.

$y=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

1) Если $y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$, то $x=5-y^2=5-\frac{21+1-2\sqrt{21}}{4}=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}=\frac{\sqrt{21}-1}{2} \Rightarrow x=y$

Отсюда $xy=x^2\geq 0$ по определению $\Rightarrow$ такой корень подходит по ОДЗ, однако $x-2y=-x=\frac{1-\sqrt{21}}{2}<0$ $(1<4<\sqrt{21}$ $(4=\sqrt{16}$, а $\sqrt{16}<\sqrt{21}$ ведь $y=\sqrt{x}$ - возрастающая$))$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}; \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right)$ - не является корнем.

2) Если $y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$, то $x=5-y^2=5-\frac{21+1+2\sqrt{21}}{4}=\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \Rightarrow x=y$. Отсюда $xy=x^2\geq 0$ по определению $\Rightarrow$ подходит по ОДЗ и тогда $x-2y=-y=\frac{1+\sqrt{21}}{2}\geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (1) верно $\Rightarrow \left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$ - корень уравнения.

Ответ: $(4;1)$; $\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7.

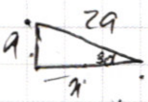
По условию $f(ab)=f(a)+f(b)$. Отсюда раз $f(p)=p$, а по правилу $f(p)=f(p)+f(1)$, что $f(1)=0$. Возьмём натуральные a, b произвольно. Несложно видеть, что $f(a)=f(\frac{1}{b})+f(ab)$, ведь область определения - рациональные числа $\Rightarrow f(\frac{1}{b})=f(a)-f(ab)$. Составим по правилу таблицу $f(x)$ для $x\in[1;18]$: $f(1)=0$; $f(2)=2$; $f(3)=3$; $f(4)=f(2)+f(2)=4$; $f(5)=5$; $f(6)=f(2)+f(3)=5$; $f(7)=7$; $f(8)=f(4)+f(2)=6$; $f(9)=f(3)+f(3)=6$; $f(10)=f(2)+f(5)=7$; $f(11)=11$; $f(12)=f(3)+f(4)=7$; $f(13)=13$; $f(14)=f(2)+f(7)=9$; $f(15)=f(3)+f(5)=8$; $f(16)=f(8)+f(2)=8$; $f(17)=17$; $f(18)=f(2)+f(9)=8$; Нетрудно преобразовать формулу $f(\frac{1}{b})=f(a)-f(ab)=f(a)-f(a)-f(b)=-f(b)$. То есть мы имеем таблицу для $f(\frac{1}{y})$ для всех $y\in[1;18]$. Остается заметить, что $f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})$ и подсчитать все случаи, когда сумма будет отрицательной. Для $f(\frac{1}{y})$ подходят все ~~18 y~~ y, кроме 1, т.е. 17; Для $f(\frac{2}{y})$ - 16; $f(\frac{3}{y})$ - 15; $f(\frac{4}{y})$ - 14; $f(\frac{5}{y})$ - 13; $f(\frac{6}{y})$ - 12; $f(\frac{7}{y})$ - 7; $f(\frac{8}{y})$ - 10; $f(\frac{9}{y})$ - 10; $f(\frac{10}{y})$ - 7; $f(\frac{11}{y})$ - 2; $f(\frac{12}{y})$ - 7; $f(\frac{13}{y})$ - 1; $f(\frac{14}{y})$ - 3; $f(\frac{15}{y})$ - 4; $f(\frac{16}{y})$ - 4; $f(\frac{17}{y})$ - 0; $f(\frac{18}{y})$ - 4. А значит таких пар ~~14+13+17+16+15+13·2+10·2+7·3+4 3+2+1+0~~ $17+16+15+14+12\cdot2+10\cdot2+3\cdot7+3\cdot4+3+2+1+0=$
$=18\cdot3+14+24+20+21+12=18\cdot3+14+65+12=95+14+18\cdot2=145$ пар.

Ответ: 145 пар.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

y^2

$$\left[\begin{array}{l} x^2-6x+10-2|x-3|\geq 0 \\ 2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|\leq 0 \end{array}\right.$$



$x=\sqrt{3}a$

$CD=2\sqrt{7}$

$\frac{x}{a}=\boxed{\sqrt{3}}$

$$\left[\begin{array}{l} |x-3|^2+1-2|x-3|\geq 0 \\ 2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|\leq 0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow 1>2|x-3| \Rightarrow 0{,}5>|x-3| \Rightarrow x\in(+4{,}5;+\infty)\cup(-\infty;2{,}5)$

$(-\infty;2)$

$\cancel{x\neq 2}$

$\operatorname{ctg}30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad \frac{BC}{CD}$ $\quad \frac{2\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}$

$$\begin{cases} x=5-y^2 \\ x-2y=\sqrt{5xy} \end{cases}$$

$x=4.$ $\quad \frac{\sqrt{21}-1}{2}$ $\quad \frac{-2+2\sqrt{21}}{4}$

$-5(xy)=-5(5-y^2)y$

$-25y+5y^3$

$x_0=\frac{22+2\sqrt{21}}{4}$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

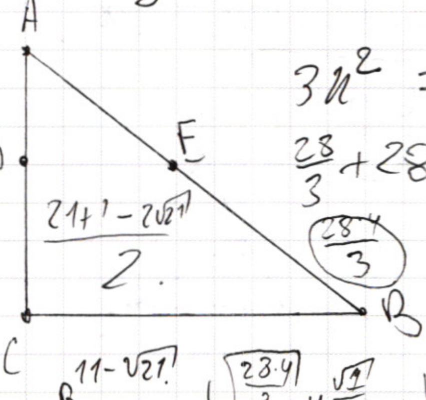
$f(p)=p$ $\quad \frac{CD}{BC}$

$$\begin{cases} x-2y\geq 0 \\ x=5-y^2 \Rightarrow x^2=25+y^4-10y^2 \\ \cancel{(5-y^2-2y)} \quad x^2-4xy+4y^2=xy \end{cases}$$

$x^2+4y^2-5xy=0.$

$f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$25+y^4-10y^2+4y^2-25y+5y^3=0.$



$3x^2=\frac{4\cdot 7}{3}$

$\frac{28}{3}+28.$ $\quad \frac{2}{7}$

$\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sin 30=\frac{1}{2}$

$\cos 30=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0$

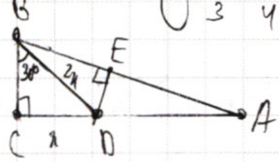
$y=1.$ $\quad y=-5$

$\operatorname{tg}=\frac{x}{\sqrt{3}x}$

$$\begin{array}{l|l} y^4+5y^3-6y^2-25y+25 & y-1 \\ \underline{y^4-y^3} & y^3+6y^2-25 \\ \underline{6y^3-6y^2} & \end{array}$$

$-125+(1+5)25-25.$

$11-\sqrt{21}$



$\sqrt{\frac{28\cdot 4}{3}}$ $\quad 4\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\sqrt{3}x$ $\quad x.$

$\frac{28}{3}=3x^2.$

$\frac{2}{3}\sqrt{7}$

$$\begin{array}{l|l} y^3+6y^2-25 & y+5 \\ \underline{y^3+5y^2} & y^2+y-5. \\ y^2 & \end{array}$$

$t=\sqrt{4x}$ $\quad \sqrt{3}x.$

$\frac{AD}{AC}.$

S_{AED}

$(y+5)(y-1)(y^2+y-5)=y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0$

$\frac{BD}{CD}=2$

$(y^2+4y-5)(y^2+y-5)=y^4+5y^3-6y^2-25y+25.$

$AC=\sqrt{7}$

$AD=AC-\frac{BD}{2}$

$BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$y=-5$ или $y=1$ или $y=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

$4\sqrt{\frac{7}{3}}$ $\quad DE=x$ $\quad \angle CED=30^\circ$

$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}.$

$x^2+\frac{3}{4}x^2=AD^2.$

$AD=\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot DE.$

$\frac{AC}{BC}=\frac{AE}{DE}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

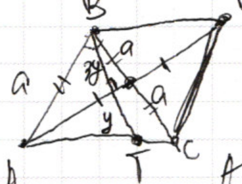
ШИФР

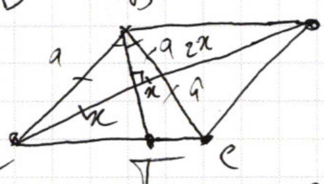
(заполняется секретарём)

$7+4\cdot\frac{7}{3}$ $\frac{21+49}{7}$ $\frac{7}{\sqrt{3}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3x^2=\frac{28}{3}$ $x=\sqrt{7}$





$\frac{\frac{1}{3}\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{\sqrt{3}}}$

$x-2y=\sqrt{xy}$

$x+y^2=5$

$\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{\sqrt{3}}}{\frac{7}{\sqrt{3}}}$

$3a>t$

$a+t>9$

$t>0$

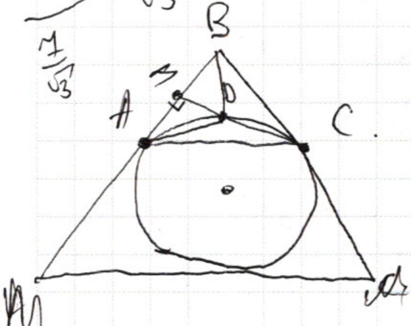
$x-2y\geq 0$ $x+y=\sqrt{xy}$

$\frac{\frac{7}{3}}{\frac{7}{\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$x^2+4y^2-4xy=xy$

$600-3a=t$

$\sqrt{a^2-x^2}$



$x^2+4y^2-5xy=0$ $a^2-x^2+9x^2=t^2$ $x\in\mathbb{Z}$

$a^2+8x^2=t^2$

$25-6y^2+y^4-25y+5y^3=0$, $a\in\mathbb{Z}$

$(a-t)(a+t)=8x^2$

$y^4-5y^3-6y^2+25-25y=0$

$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a-t)(a+t)}{2}}$

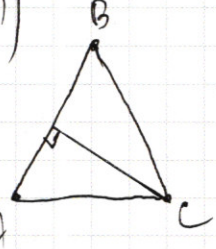
$x=5-y^2$

$5-2y-y^2$

$\frac{28}{3}+7$

$\frac{49}{3}$ $\frac{7}{\sqrt{3}}$

$\frac{1}{3}+\frac{4}{9}$



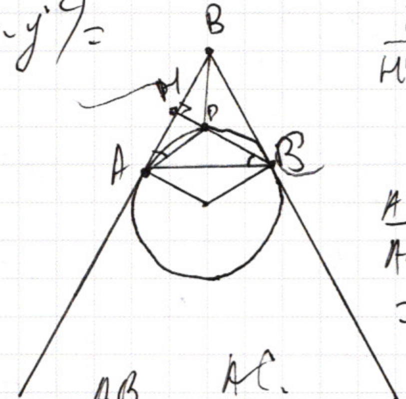
$\frac{1}{3}+\frac{4}{9}$

$y=\frac{7}{\sqrt{3}}$ $5xy=5y(5-y^2)=$

$\frac{8}{HD}$

$AH^2=HD\cdot HC$

$\sqrt{y^3}$ $125y$



$AH^2+HC^2=AC^2$

$\frac{AD}{AC}=\frac{AH}{CH}$

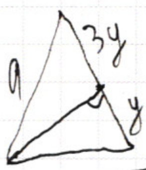
$=\frac{DH}{AH}$

$\frac{AH}{HC}=\frac{HD}{AH}$

$25-10y^2+y^4$

$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$

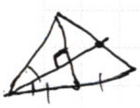
$\frac{DH}{AD}=\frac{AH}{AC}$



$\frac{HD\cdot AB}{2}=S$

$f(4)=f(2)+f(2)$

$f(6)=f(3)+f(2)$



$\sqrt{a^2-9y^2+y^2}$

$\sqrt{a^2-8y^2}$

$AB\cdot AH$

$HD=\frac{2S}{AB}$

$HD=\frac{AH^2}{HC}=\frac{AD}{AC}\cdot AH$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(1)=0$

$f(2)=2 \quad f(\frac{1}{2})=-2.$

$f(3)=3 \quad f(\frac{1}{3})=-3$

$f(4)=4 \quad f(\frac{1}{4})=-4.$

$f(5)=5 \quad f(\frac{1}{5})=-5.$

$f(6)=5 \quad f(\frac{1}{6})-5.$

$f(7)=7 \quad f(\frac{1}{7})=-7.$

$f(8)=6 \quad f(\frac{1}{8})=-6$

$f(9)=6 \quad f(\frac{1}{9})=-6.$

$f(10)=7. \quad f(\frac{1}{10})=-7.$

$f(11)=11. \quad f(\frac{1}{11})=-11$

$f(12)=7. \quad f(\frac{1}{12})=-7.$

223

$f(13)=13. \quad f(\frac{1}{13})=-13$

$f(14)=9. \quad f(\frac{1}{14})=-9.$

$f(15)=8 \quad f(\frac{1}{15})=-8.$

$f(16)=8. \quad f(\frac{1}{16})=-8.$

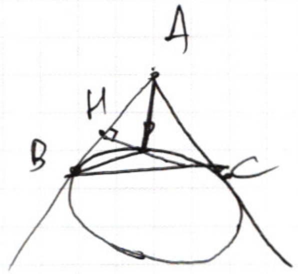
$f(17)=17 \quad f(\frac{1}{17})=-17.$

$f(18)=8 \quad f(\frac{1}{18})=-8.$

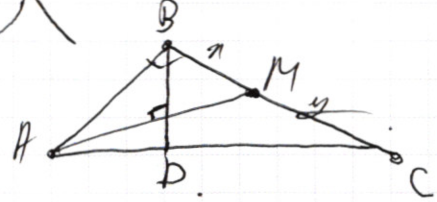
$2+3+3$

$\underbrace{1}_{0}, \underbrace{2}_{2}, \underbrace{3}_{3}, \underbrace{4}_{4}, \underbrace{5, 6}_{5}, \underbrace{8, 9}_{6}, \underbrace{7, 10, 12}_{7}, \underbrace{15, 16, 18}_{8}, \underbrace{14}_{9}, \underbrace{11}_{11}, \underbrace{13}_{13}, \underbrace{17}_{17}$

$|-1|-2|-3|-4|-5|-6|-8|-8|-11|-11|-11|-14|-14|-14|-15|-16|-17|-18|$



$\frac{HB \cdot DH}{2} = 6.$



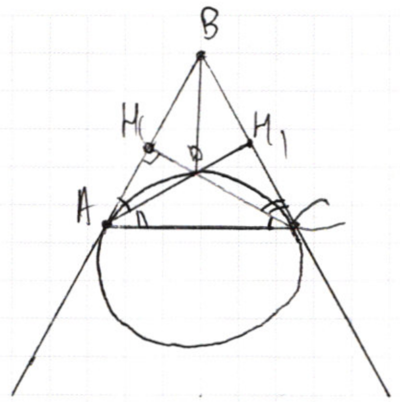
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



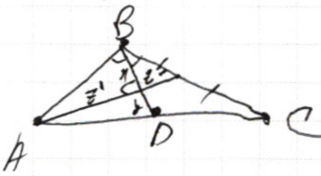
$\frac{AB}{AC}$ - ?

$AB = \frac{25}{DH}$.

$\sin\alpha = \frac{BH}{BC} = \frac{CH_1}{AC}$

$BH = \frac{CH_1 BC}{AC}$.

$\sin\gamma = 1$



$f(a) + f(b) = f(ab)$.

$f\left(\frac{1}{x}\right) + f(y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$

$x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0$.

$\frac{2\sqrt{x^2+z^2}}{\sqrt{z'^2+y^2}}$

$\sqrt{x^2+z^2}$

$\frac{AB}{AC} = \sqrt{z'^2+y^2}$

$y^2 - 4y = 2x - x^2$.

$\frac{AD}{DC} = \frac{n}{k}$.

$x = 1$.

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$.

$f(4) = 4$.

$AD + DC = t$

$f(6) = f(2) + f(3) = 5$.

$\underline{f(12)} = f(6) + f(2)$.

$f(8) = f(4) + f(2) = 4 + 2 = 6$.

$f(6) = f\left(\frac{12}{2}\right) = f(12) + f\left(\frac{1}{2}\right)$.

$f(9) = f(3) + f(3) = 6$.

$f(10) = f(2) + f(5) = 7$.

$f(1) = f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 4$. $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(12) - f(6) = 2$.

$f(11) = 11$.

$f\left(\frac{1}{2}\right) + f(x)$

$f(12) = f(3) + f(4) = 7$.

$f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{6}{2}\right) +$

$f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1)$.

$f(2) = 2$.

$f(tk) + f\left(\frac{1}{t}\right) = f(k)$.

$f(4) = 4$.

$f(6) + f\left(\frac{1}{3}\right) = f(2)$. $f\left(\frac{1}{6}\right) = f(k) - f(tk)$.

$f\left(\frac{1}{2}\right) + f(4) = f(2)$. $5 + f\left(\frac{1}{3}\right) = 2$.

$f\left(+\frac{1}{3}\right) = -3$.

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -2$. $f(2)$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)