

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

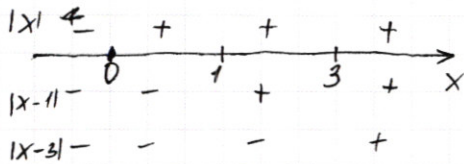
4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.
5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{29}$, $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leq x \leq 19$, $3 \leq y \leq 19$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0$$



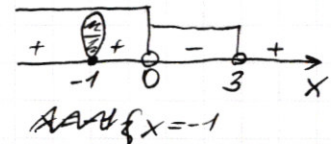
на этом отрезке показано, как раскрываются модули в зависимости от значения x .

$$\text{I} \begin{cases} \frac{x^2 - 2x + 5 + 4x - 4}{4x^2 - 12x + x^2 - 3x} \leq 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{I} \begin{cases} \frac{x^2 - 2x + 5 + 4x - 4}{4x^2 - 12x + x^2 - 3x} \leq 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

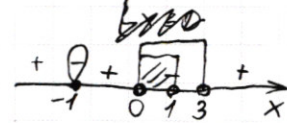
$$\text{II} \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \frac{x^2 - 2x + 5 + 4x - 4}{4x^2 - 12x - x^2 + 3x} \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 2x + 1}{5x^2 - 15x} \leq 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \\ x \leq 0 \end{cases}$$



$$\text{III} \begin{cases} 1 \leq x < 3 \\ \frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x - x^2 + 3x} \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{II} \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 1}{3x^2 - 9x} \leq 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{(x+1)^2}{3x(x-3)} \leq 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

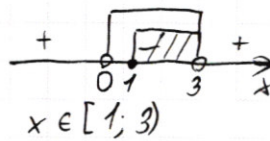


$$\text{IV} \begin{cases} x \geq 3 \\ \frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x + x^2 - 3x} \leq 0 \end{cases}$$

$$x \in (0; 1)$$

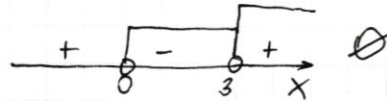
$$\text{III} \begin{cases} \frac{x^2 - 6x + 9}{9x^2 - 9x} \leq 0 \\ 1 \leq x < 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} \leq 0 \\ 1 \leq x < 3 \end{cases}$$



$$\text{IV} \begin{cases} \frac{x^2 - 6x + 9}{5x^2 - 15x} \leq 0 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} \leq 0 \\ x \geq 3 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = -1 \\ x \in (0; 1) \\ x \in [1; 3) \\ \emptyset \end{cases}$$

Ответ: $(0; 3) \cup \{-1\}$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} & \textcircled{1} \\ 2y + x^2 = 9 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \quad y - 2x = \sqrt{xy}; \quad y - 2x \geq 0$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy$$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$$

$$D = 25x^2 - 16x^2 = 9x^2$$

$$y_1 = \frac{5x + 3x}{2} = 4x$$

$$y_2 = \frac{5x - 3x}{2} = x$$

$$\textcircled{2} \quad 2y + x^2 = 9$$

$$\text{I кл: } y = 4x$$

$$8x + x^2 = 9$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 16 - 9 = 7$$

$$x_1 = \frac{-8 + \sqrt{7}}{1} = -8 + \sqrt{7}; \quad y_1 = -32 + 4\sqrt{7} \text{ (не угод., т.к. } -32 + 4\sqrt{7} + 16 - 2\sqrt{7} < 0)$$

$$x_2 = -8 - \sqrt{7}; \quad y_2 = -32 - 4\sqrt{7} \text{ (не угод., т.к. } -32 - 4\sqrt{7} + 16 + 2\sqrt{7} < 0)$$

$$\text{II кл: } y = x$$

$$2x + x^2 = 9$$

$$x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 1 + 9 = 10$$

$$x_1 = -2 + \sqrt{10}; \quad y_1 = -8 + 4\sqrt{10} - 2 + \sqrt{10} \text{ (не угод., т.к. } -2 + \sqrt{10} + 4 - 2\sqrt{10} < 0)$$

$$x_2 = -2 - \sqrt{10}; \quad y_2 = -8 - 4\sqrt{10} - 2 - \sqrt{10} \text{ (угод., т.к. } -2 - \sqrt{10} + 4 + 2\sqrt{10} > 0)$$

$$\text{Ответ: } (-2 - \sqrt{10}; -2 - \sqrt{10}), (-8 - \sqrt{7}; -32 - 4\sqrt{7}), (-2 + \sqrt{10}; -2 + \sqrt{10})$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6 & ① \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0 & ② \end{cases}$$

① $|3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6$

$3x + 2y + |6 - 3x - 2y| = 6$ отобр. отн. OX и OY

$3x + 2y \leq 6$ отобр. отн. OX и OY

$y \leq 3 - 1,5x$ отобр. отн. OX и OY

Это неравенство выполняется всегда, при условии если x и y одновременно не являются неотр. числами

② $x^2 - 2x + y^2 - 3y \leq 0$

$(x-1)^2 + (y-1,5)^2 \leq 3,25$

центр $O(1; 1,5)$; $R = \sqrt{3,25}$

Нужно найти площадь
затраченной на графике
фигуры

$S_{\text{фиг}} = S_{\text{сек}} - S_{\text{три}}$

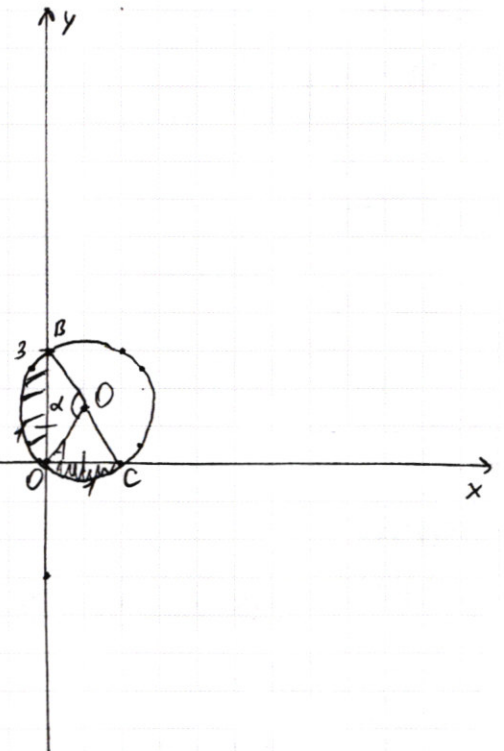
Рассмотрим $\triangle AOB$

$OB = AO = R = \sqrt{3,25}$

$AB = 3$

Т. косинусов: $AB^2 = OB^2 + AO^2 - 2OB \cdot AO \cdot \cos \alpha$

$\cos \alpha = \frac{OB^2 + AO^2 - AB^2}{2 \cdot OB \cdot AO}$; $\cos \alpha = \frac{3,25 + 3,25 - 9}{2 \cdot 3,25} = -\frac{2,5}{2 \cdot 3,25} = -\frac{0,5}{2 \cdot 0,65} = \frac{50}{130} = \frac{5}{13} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{12}{13}$



$$S_{\text{кр}} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot AO \cdot \sin \alpha = \frac{3,25 \cdot 12}{2 \cdot 13} = 0,25 \cdot 6 = 1,5$$

Заметим на графике n/y $\text{тр. } \triangle ABC$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC$$

т.к. $\angle BAC - n/y$ и он вписан в окр., то BC - диаметр окружности. $\Rightarrow S_{\text{сек}} =$

$$= \frac{1}{2} S_{\text{кр}} - S_{\text{треугольника}}$$

$AB = 3, AC = 2$ из протр. графика

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$$

$$S_{\text{сек}} = \frac{1}{2} \pi R^2$$

$$S_{\text{сек}} \approx \frac{1}{2} \cdot 3,14 \cdot 3,25^2 = 5,1025 \quad S_{\text{сек}} = 3,25 \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$S_{\text{кр}} = 5,1025 - 3 = 2,1025 \quad S_{\text{кр}} = 3,25 \cdot \frac{\pi}{2} - 3$$

Ответ: $3,25 \cdot \frac{\pi}{2} - 3$

и 5

Дано:

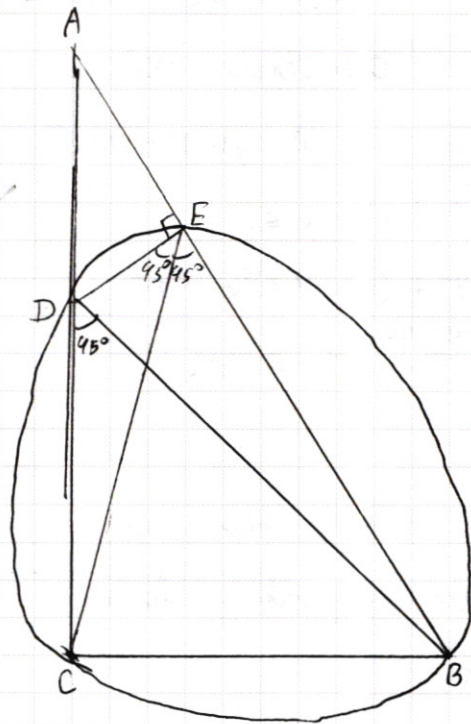
$\triangle ABC - n/y$

$$AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$$

$$BC = \sqrt{29}$$

$$\angle CED = 45^\circ$$

$$DE \perp AB$$



Найти: $\frac{AD}{AC}, S_{\triangle AEP}$

Решение:

I $\angle DEB = 90^\circ$ (по усл.) $\Rightarrow \angle CEB = 90^\circ - \angle DEB = 45^\circ$

$\angle CED = 45^\circ$ (по усл.)

$\angle CEB = \angle ACB = 90^\circ$ (по усл. $\triangle ABC - n/y$)

$\Rightarrow \triangle CEB -$ впис. равнос. тр-ник

II Доп. постро. BD

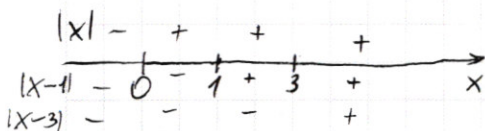
$\angle CDB -$ впис, опир на CB

$\angle CEB = 45^\circ -$ впис, опир на CB

$\Rightarrow \angle CDB = \angle CEB = 45^\circ$

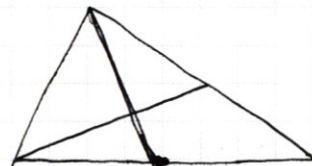
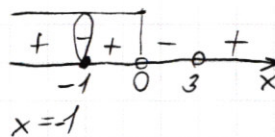
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x-1|x-3} \leq 0$$



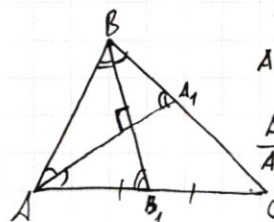
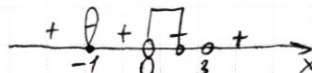
$$\begin{cases} x \leq 0 \\ \frac{x^2 - 2x + 5 + 4x - 4}{4x^2 - 12x + x^2 - 3x} \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ \frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \leq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ \frac{(x+1)^2}{4x^2 - 12x - x^2 + 3x} \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ \frac{(x+1)^2}{3x(x-3)} \leq 0 \end{cases}$$



$$\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C}{A_1B}$$

$$A_1B = \frac{A_1C \cdot AB}{AC}$$

$$A_1B = \frac{1}{2} AC$$

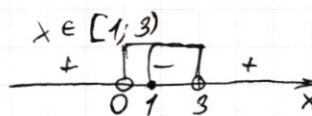
$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{A_1C \cdot AB}{2AC^2}$$

$$x \in (0; 1)$$

$$AB + BC + AC = 300$$

$$\begin{cases} 1 \leq x < 3 \\ \frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{3x(x-3)} \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \leq x < 3 \\ \frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} \leq 0 \end{cases}$$



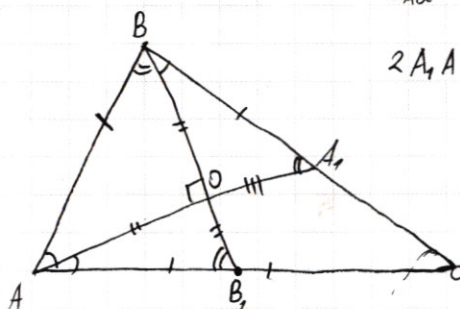
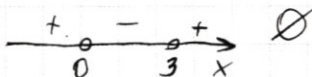
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot A_1A \sin \alpha + AC \cdot \frac{1}{2} \cdot A_1A \sin \alpha$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot A_1A (AB + AC)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{4} BB_1 \cdot BC \cdot \sin \alpha$$

$$2A_1A (AB + AC) = BB_1 \cdot BC$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ \frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} \leq 0 \end{cases}$$



$$AB + BC + AC = 300$$

$$\frac{AO}{OB} = \frac{B_1O}{OA_1}$$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy$$

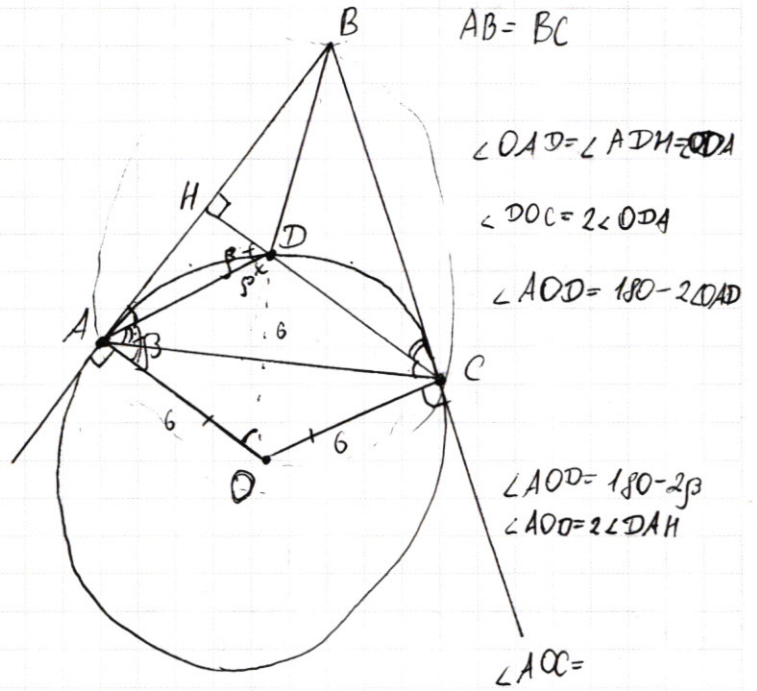
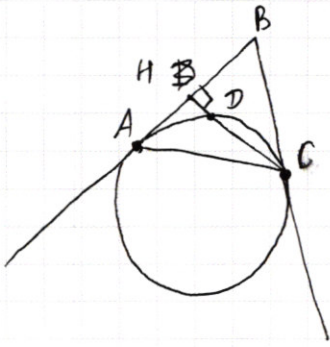
$$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$$

$$D = 25x^2 - 16x^2 = 9$$

$$y_1 = \frac{5x + 3x}{2} = 4x$$

$$y_2 = \frac{5x - 3x}{2} = x$$

$$\alpha + \beta = 180 - \alpha + \beta$$



$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |16 - 3x - 2y| > 6 \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |16 - 3x - 2y| > 6 & \textcircled{1} \\ (x-1)^2 + (y-1,5)^2 = 3,25 \end{cases}$$

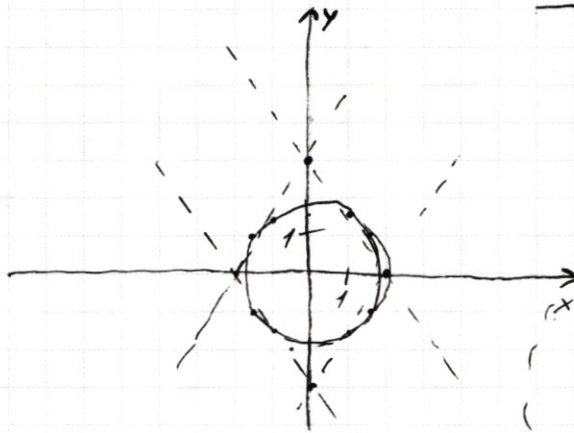
$$|3x| + |2y| + |16 - 3x - 2y| = 6$$

$$|3x| + |2y| + |16 - 3x - 2y| = 0 \text{ сдвин на } 6 \uparrow$$

$$3x + 2y + |16 - 3x - 2y| = 6$$

$$3x + 2y \leq 6$$

$$y \leq 3 - 1,5x$$



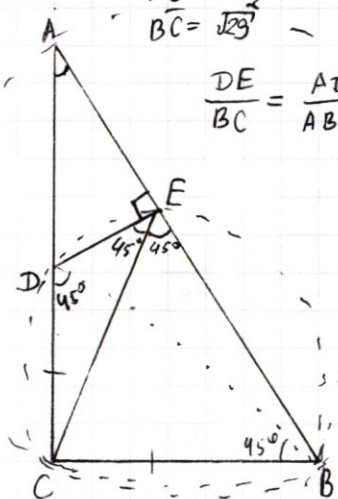
$$\begin{array}{r} x \quad 3,25 \\ \quad 1,57 \\ \hline 22 \quad 75 \\ + \quad 16 \quad 25 \\ \hline 3 \quad 25 \\ \hline 5,1025 \end{array}$$

DM: AB = 15

$$\frac{DM}{2} \cdot AB = 15$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{5\sqrt{29}}{\sqrt{29}^2}$$

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$



$$AB = \sqrt{\frac{25 \cdot 29}{4} + 29} = \frac{29}{2}$$

$f(ab) = f(a) + f(b)$, при $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$

$$f(p) = p$$

$$f(3) = 3$$

$$f(5) = 5$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

III Решим $\triangle CDB$ - п/у

$$\angle DBC = 90^\circ - \angle CDB$$

$$\angle DBC = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

$$\angle DBC = \angle CDB = 45^\circ \Rightarrow \triangle CDB - \text{п/у} \Rightarrow CD = BC = \sqrt{29}$$

$$AD = AC - CD; AD = \frac{5\sqrt{29}}{2} - \sqrt{29} = \frac{3}{2}\sqrt{29}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{3\sqrt{29} \cdot 2}{2 \cdot 5\sqrt{29}} = \frac{3}{5}$$

IV Решим $\triangle AED$ и $\triangle ABC$

$$\left. \begin{array}{l} \angle AED = \angle ACB = 90^\circ \\ \angle A - \text{общ.} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$AB = \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{\frac{25 \cdot 29}{4} + 29} = \frac{29}{2}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{3\sqrt{29} \cdot 2}{2 \cdot 29} = \frac{3\sqrt{29}}{29}$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{3\sqrt{29}}{29}; AE = \frac{3\sqrt{29} \cdot AC}{29}; AE = \frac{3\sqrt{29} \cdot 5\sqrt{29}}{29} = \frac{15}{2}$$

$$\frac{DE}{BC} = \frac{3\sqrt{29}}{29}; DE = \frac{3\sqrt{29}}{29} \cdot BC; DE = \frac{3\sqrt{29} \cdot \sqrt{29}}{29} = 3$$

$$S_{AED} = \frac{1}{2} AE \cdot DE$$

$$S_{AED} = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot 3 = \frac{45}{4} = 11,25$$

Ответ: $\frac{3}{5}; 11,25$

$$AB + BC + AC = 300$$

AA_1 - бисс

BB_1 - мед

$$AA_1 = A_1C \quad (BB_1 - \text{мед})$$

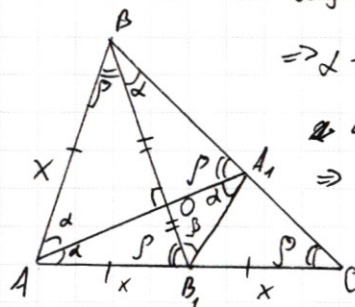
$$\left. \begin{array}{l} \angle ABO = 90^\circ - \alpha \\ \angle AB_1O = 90^\circ - \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABB_1 \sim \text{P/б} \Rightarrow AB = AB_1 = B_1C;$$

$$OB = OA_1 \quad (AA_1 - \text{висс и бисс.})$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C}{A_1B} \quad (\text{по св-ву бисс.})$$

$$\frac{A_1C}{A_1B} = \frac{2}{7}; \triangle ABB_1 \sim \triangle BA_1O \Rightarrow \frac{AB_1}{A_1B} = \frac{OB_1}{OA_1} = \frac{AO}{OB}$$

Ответ: 1 медиана



$$\alpha + \beta = 180^\circ - \alpha - \beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \text{ тогда } \triangle ABC - \text{п/у}$$

$$4x^2 = x^2 + BC^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{3x^2} = x\sqrt{3}$$

$$OB^2 = AO \cdot OA_1; \frac{OB^2}{OA^2} = \frac{OB^2}{OA^2} \Rightarrow AO \cdot \frac{OB^2}{OA^2}$$

$$BC = 300 - 3x \quad 300 = 3x + \sqrt{3}x = x(3 + \sqrt{3})$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Grid area for writing the answer.

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)