# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром $O$ касается прямых $AB$ и $BC$ в точках $A$ и $C$ соответственно. Высота $CH$ треугольника $ABC$ пересекает эту окружность в точках $C$ и $D$. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника $ABD$ равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике $ABC$ на катете $AC$ и гипотенузе $AB$ отмечены точки $D$ и $E$ соответственно, такие что $DE\perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника $AED$, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED=45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2\leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа $p$. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 19$, $3\leqslant y\leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{№1}$

$$\frac{x^2-2x+\overset{1+4}{5}-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\leqslant 0 \iff \frac{(x^2-2x+1)+(4-4|x-1|)}{4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|}\leqslant 0 \iff$$

$$\iff \frac{(x-1)^2-4|x-1|+4}{4\cdot x(x-3)+|x(x-3)|}\leqslant 0 \iff (\text{т.к. } (x-1)^2 = \cancel{|x-1|^2} = |x-1|^2)\ \frac{(|x-1|-2)^2}{4\cdot x(x-3)+|x\cdot(x-3)|}\leqslant 0$$

Пусть $4\cdot x(x-3)+|x\cdot(x-3)|=0$. Тогда $|x(x-3)|=-4\cdot x(x-3)$.

Так как $\underset{(a\geqslant 0)}{|a|=a}$ или $\underset{(a<0)}{|a|=-a}$, то равенство выше возможно только при $x(x-3)=0$, т.е. при $x=0$ или $x=3$.

Чтобы знаменатель не был равен 0, нужно чтобы $x\neq 0$ и $x\neq 3$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $x-3$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $x(x-3)$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $x$ | 0 | 3 | |

С помощью метода интервалов получаем, что $|x(x-3)|=x(x-3)$ при $x\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$; и $|x(x-3)|=-x(x-3)$ при $x\in(0;3)$. Учитываем, что $x\neq 0$ и $x\neq 3$ (т.е. $x(x-3)=0$ при $x=0$ или $x=3$; поэтому точки 0 и 3 выколотые).

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $x-3$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $x(x-3)$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $x$ | 0 | 3 | |

Рассмотрим несколько случаев:

I случай) $x > 3$

Тогда $x-1 > 2 > 0 \Rightarrow |x-1| = x-1$

$$\frac{((x-1)-2)^2}{4x(x-3)+x(x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow (x-3 > 0) \quad \underline{\frac{x-3}{x} \leq 0} \ (5>0).$$ Но $x-3>0;\ x>0 \Rightarrow \underline{\frac{x-3}{x} > 0}$.

Противоречие. ~~с тем, что~~ $\cancel{\frac{(|x-1|-2)^2}{4x(x-3)+|x(x-3)|} \leq 0}$

Значит $x < 3$ $(x \neq 3)$

II случай) $x < 0$

Тогда $x-1 \leq -1 < 0 \Rightarrow |x-1| = 1-x$

$$\frac{((1-x)-2)^2}{4x(x-3)+x(x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(-x-1)^2}{5x(x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \leq 0$$

Т.к. $\cancel{x<0}$, $5>0$; $\cancel{x-3 \leq -3 < 0}$ $\overset{x(x-3) \overset{?}{>} 0\ (x<0)}{}$, то $5x(x-3) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+1)^2 \leq 0 \Rightarrow ((x+1)^2 \geq 0$, как квадрат$)$ $(x+1)^2 = 0$,

т.е. $x = -1 < 0$ (подходит).

Итак, если $x < 0$, то $x = -1$

III случай) $0 < x < 3$

Тогда $$\frac{(|x-1|-2)^2}{4x(x-3)-x(x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(|x-1|-2)^2}{3x(x-3)} \leq 0.$$

Т.к. $3>0$; $x(x-3) < 0$ $(x \in (0;3)) \Rightarrow 3x(x-3) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (|x-1|-2)^2 \geq 0$. По ~~определению~~ свойству квадрата действительного числа, неравенство выше выполняется при $\forall x \in (0;3)$.

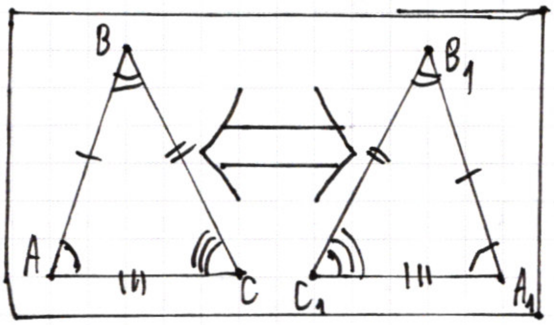
Итак, если $x \in (0;3)$, то все значения подходят.

$\boxed{\text{Ответ: } x \in \{-1\} \cup (0;3)}$ Объединим все решения и запишем ответ (см. слева).

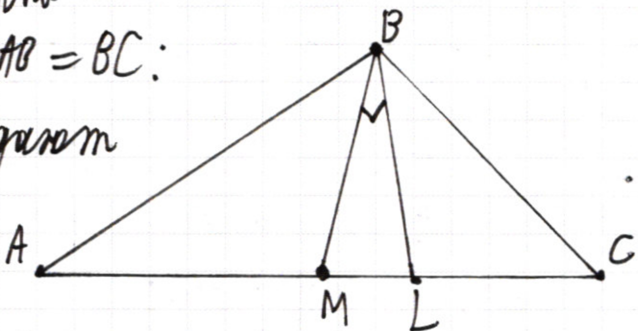
# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{№2}$

Считаем, что треугольники, симметричные друг другу, являются одним и тем же треугольником (см. рис. справа).



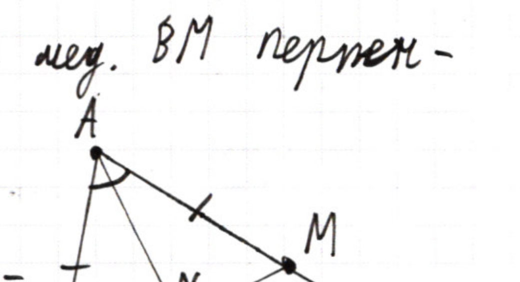

Заметим, что в $\triangle ABC$ биссектриса и медиана из 1 вершины не могут быть перпендикулярны друг другу. ~~Но~~ В случае $AB = BC$: бис. $BL$ и мед. $BM$ совпадают по св. равноб. $\triangle$-а. В случае (без огр. общн.) $BC < AB$:




$AM = MC$ (опр. мед., но $AL > LC$ (по св. бис.: $\frac{AB}{BC} = \frac{AL}{LC}$). Значит ~~$\angle ABM < \angle ABL$~~ $\angle ABL > \angle MBL$. Но т.$M \in AC$ и т.$L \in AC$.

Значит, если $BL \perp BM$, то $\angle ABL > 90° \Rightarrow$ (опр. бис.: $\angle CBL = \angle ABL$) $\angle ABC > 180°$, ~~Противоречие с пре~~ чего не может быть.

Значит (без огр. общн.) бис. $AL$ и мед. $BM$ перпендикулярны друг другу.




Пусть т.$N = BM \cap AL$. Т.к. в $\triangle BAM$: $AN$ – бис. ($\angle BAN = \angle BAL =$ (опр. бис. $AL$ в $\triangle ABC$) $\angle CAL = \angle MAN$) и выс. ($AN \perp BM$, т.к. $AL \perp BM$) $\Rightarrow$ (пр. равноб. $\triangle$-а) $\triangle BAM$ – равноб., при этом $AB = AM$. Но

$AM = MC \Rightarrow AC = 2AB$.

Пусть $AB = x \Rightarrow AC = 2x$.

Но $P = 300$ (по усл.) $= AB + AC + BC \Rightarrow BC = 300 - 3x =$
$= 3(100 - x)$.

Очевидно, что $AB > 0$; $AC > 0$; $BC > 0$ (иначе у нас не треугольник) $\Rightarrow AB \in \mathbb{N}$; $AC \in \mathbb{N}$; $BC \in \mathbb{N}$.

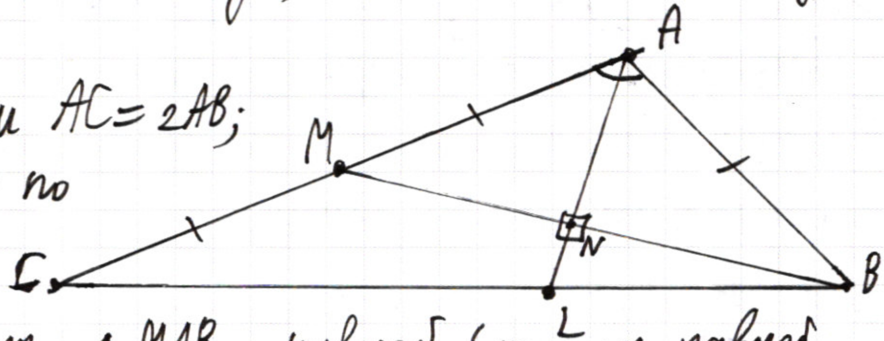
То есть:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ 2x \in \mathbb{N} \\ 3(100-x) \in \mathbb{N} \Rightarrow 100 - x > 0 \Leftrightarrow x < 100, \text{ т.е.} \end{cases}$$

$x \leq 99 \Rightarrow x = \{1, 2, 3, \ldots, 97, 98, 99\}$.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | ... | $x'$ | ... | 97 | 98 | 99 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| AB | 1 | 2 | 3 | ... | $x'$ | ... | 97 | 98 | 99 |
| AC | 2 | 4 | 6 | ... | $2x'$ | ... | 194 | 196 | 198 |
| BC | 297 | 294 | 291 | ... | $300-3x'$ | ... | 9 | 6 | 3 |

Для каждого из допустимых значений $x$ однозначно определяется $\triangle ABC$. Тогда, если $AL$ – бис., $BM$ – мед., то $AL \perp BM$.




Действительно, если $AC = 2AB$; $BM$ – мед., то ($MC = MA$ по опр. мед. $BM$) $MC = AB =$
$= MA$ $(= \frac{AC}{2})$. Значит $\triangle MAB$ – равноб. (по пр. равноб. $\Delta$-а) $\Rightarrow$ ($AL$ – бис. $\triangle ABC \Rightarrow \angle CAL \overset{\text{(опр. бис.)}}{=} \angle BAL$, т.е. $\angle BAL = \angle BAL$)
~~$\Rightarrow AL \perp BM$ (т.е. $A$~~ $\Rightarrow$ ($N = BM \cap AL$) $AN$ – выс. $\triangle MAB$ (т.к. бис.) $\Rightarrow$
$\Rightarrow AL \perp BM$, чтд.

$\boxed{\text{Ответ: 99 треугольников}}$ (без симметричных (см. ранее) друг друга)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{№3}$

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$ Из ОДЗ: $xy \geqslant 0$

Пусть $x=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ 2y=9 \Leftrightarrow y=4{,}5 \end{cases}$ Противоречие

Пусть $y=0 \Rightarrow \begin{cases} -2x=0 \Leftrightarrow x=0 \\ x^2=9 \Leftrightarrow x=3 \text{ или } x=-3 \end{cases}$ Противоречие

Значит $x \neq 0$ и $y \neq 0 \Rightarrow xy>0$

Это возможно только в 2 случаях:

1) $x>0$ и $y>0$

Тогда ~~ну~~ обозначим $\sqrt{x}$ за $a$; $\sqrt{y}$ за $b$.

Тогда $a>0$ и $b>0$.

$\begin{cases} b^2-2a^2=ab \Leftrightarrow 2a^2+\overset{2ab-ab}{ab}-b^2=0 \Leftrightarrow (2a-b)(a+b)=0 \; (*) \\ 2b^2+a^4=9 \; (**) \end{cases}$

$*$ $a>0; b>0 \Rightarrow a+b>0 \Rightarrow 2a-b=0 \Leftrightarrow b=2a$

$**$ $2(2a)^2+a^4=9 \Leftrightarrow a^4+8a^2-9=0 \Leftrightarrow (a^2+9)\cdot$

$\cdot(a^2-1)=0$. Т.к. $a^2 \geqslant 0 \Rightarrow \overset{9a^2-a^2}{a^2+9}>9>0 \Rightarrow a^2=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ ~~$a=1$ (т.к. $a>0$)~~ $a^2-1=0 \Leftrightarrow (a-1)(a+1)=0$

$a>0 \Rightarrow a+1>1>0 \Rightarrow a=1 \Rightarrow b=2$.

Тогда $x=a^2=1$ и $y=b^2=4$.

2) $x<0$ и $y<0 \Longrightarrow -x>0$ и $-y>0$

Тогда обозначим $\sqrt{-x}$ за $a$; $\sqrt{-y}$ за $b$. Тогда $x=-a^2$ и $y=-b^2$, при этом $a>0$ и $b>0$.

$$\begin{cases}(-b^2)-2(-a^2)=ab\\ 2(-b^2)+(-a^2)^2=9\end{cases} \quad \begin{cases}2a^2 \overbrace{-ab}^{-2ab+ab} - b^2=0 \quad (***)\\ a^4-2b^2-9=0 \quad (****)\end{cases}$$

$***$ $(2a+b)(a-b)=0$

$a>0 \Rightarrow 2a>0$; $b>0 \Rightarrow 2a+b>0 \Rightarrow a=b$

$****$ $a^4-2a^2-9=0$

Пусть $A=a^2 \Rightarrow \begin{cases}A>0\\ A^2-2A-9=0\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow D_1=(-1)^2 - 1\cdot(-9)=10\ (>0) \Rightarrow$

$\Rightarrow A=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{10}}{1}=1\pm\sqrt{10}$

Но $A>0$, а $\sqrt{10}>1$ ($\sqrt{10}>1>0$) $\Rightarrow A=1+\sqrt{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow a=\sqrt{1+\sqrt{10}}$ $(a>0)=b \Rightarrow x=-a^2=$

$=-\left(\sqrt{1+\sqrt{10}}\right)^2=-1-\sqrt{10}$; и $y=-b^2=-\left(\sqrt{1+\sqrt{10}}\right)^2=$

$=-1-\sqrt{10}$.

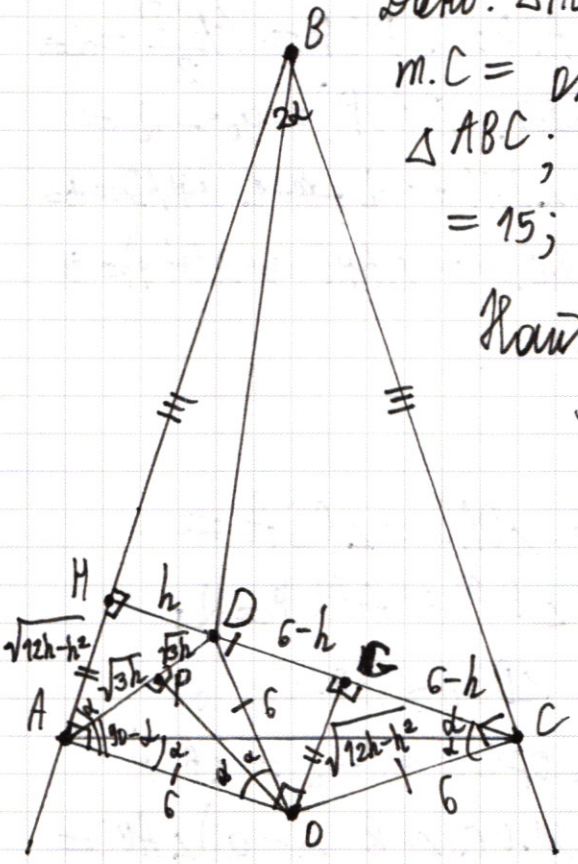
В каждом случае получилась ровно 1 пара ~~решени~~ $x$ и $y$.

~~Ответ: $x=1$ и $y=4$; или~~

| Ответ: | | | |
|---|---|---|---|
| | $x$ | $1$ | $-1-\sqrt{10}$ |
| | $y$ | $4$ | $-1-\sqrt{10}$ |

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{№4}$




Дано: $\triangle ABC$; т. $A$ = окр. $O \cap$ $(AB)$ (т. кас.); т. $C$ = окр. $O \cap (BC)$ (т. кас.); $CH$ – выс. $\triangle ABC$; $\{т. C, т. D\}$ = окр. $O \cap CH$; $S_{\triangle AOD} = 15$; $R_{окр. O} = 6$

Найти: $AB : CH$

Решение:

1) Окр. $O$ кас. $(AB)$ в т. $A \Rightarrow$ $\Rightarrow OA \perp AB$. Аналогично $OC \perp BC$. Также $OA = OD = OC = 6$ (радиусы окр. $O$).

2) По св. кас. к окр. $O$ из 1 т. $B$: $AB = BC$, т.е. $BC = AH + HB = AB$.

3) Пусть $OG \perp CH \Rightarrow AHGO$ – прям. $\Rightarrow \angle AOG = 90°$; $AH = OG$; $HG = AO$

4) пусть $HD = h \Rightarrow DG = HG - HD = 6 - h$. Но ~~$\triangle ABC$ – равноб. $\triangle ODG$ – пр~~ $\triangle DOC$ – равноб. $(DO = OC) \Rightarrow$ $\Rightarrow GC = GD$ ($OG$ – мед. и выс.) $= 6 - h \Rightarrow CH = HD + DG + GC = 12 - h$

5) По т. П. для $\triangle COG$: $GO = \sqrt{OC^2 - CG^2} = \sqrt{12h - h^2} = AH$

6) Пусть $OP \perp AD \Rightarrow$ ($\triangle AOD$ – равноб., т.к. $AO = OD$) $AP = PD$ ($OP$ – выс. и мед.) ~~$\Rightarrow (\triangle AHD$ – прям.)~~.

7) По т. П. для $\Delta ADH$: $AD = \sqrt{AH^2 + HD^2} = \sqrt{12h} = 2\sqrt{3h} \Rightarrow$

$\Rightarrow AP = \frac{AD}{2} = \sqrt{3h} = PD$

8) Пусть $\angle ACD$ ~~$\angle ABCH$~~ $= \alpha \Rightarrow$ ($\Delta ACD$ — впис. в окр. O)

$\Rightarrow \angle AOD = 2\angle ACD$ $(\angle ACD < 90^\circ) = 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (OP — бис. равноб. $\Delta AOD$) $\angle AOP = \angle DOP = \frac{\angle AOD}{2} = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OAP = 90^\circ - \angle AOP$ (в прям. $\Delta AOP$) $= 90^\circ - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $(\angle BAO = 90^\circ)$ $\angle BAD = 90^\circ - \angle OAD = \alpha$ ~~, т. е. $\angle HAD = \alpha =$~~

~~$= \angle AOP$. Но $\Delta AHD$ и $\Delta OPA$ — прям. $\Rightarrow \Delta AHD \sim \Delta OPA \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \frac{AD}{HD} = \frac{OA}{PA} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3h}}{h} = \frac{6}{\sqrt{3h}}$~~

~~9) $AO = OC \Rightarrow \Delta AOC$ — равноб. $\Rightarrow \angle OAC = \angle OCA =$~~

9) $OA \perp AB$; $CH \perp AB \Rightarrow OA \parallel CH \Rightarrow \angle OAC = \angle ACH = \alpha$.

10) $OA = OC \Rightarrow \Delta AOC$ — равноб. $\Rightarrow \angle OCA = \angle OAC = \alpha$

11) $\angle BAO = 90^\circ \Rightarrow \angle BAC = \angle BAO - \angle OAC = 90^\circ - \alpha = \angle BCA$

($\Delta ABC$ — равноб., т. к. $AB = BC$) $\Rightarrow$ (т. о с. $\angle$-в $\Delta$-а) $\angle ABC =$

$= 180^\circ - \angle BAC - \angle BCA = 2\alpha = \angle OCG$. Но $\Delta OCG$ и

$\Delta CBH$ — прям. $\Rightarrow \Delta OCG \sim \Delta CBH \Rightarrow \frac{OG}{GC} = \frac{CH}{HB} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{12h - h^2}}{6 - h} = \frac{12 - h}{BH} \Leftrightarrow \sqrt{h} \cdot \cancel{\sqrt{12-h}} \cdot BH = (6-h) \cdot \cancel{\sqrt{12-h}} \cdot \sqrt{12-h} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow BC = (6-h) \cdot \sqrt{\frac{12-h}{h}}$. Также $\frac{OG}{OC} = \frac{CH}{CB} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow BC = \frac{CH \cdot OC}{OG} = \frac{\overset{\sqrt{12-h}}{\cancel{(12-h)}} \cdot 6}{\sqrt{h} \cdot \cancel{\sqrt{12-h}}} = 6 \cdot \sqrt{\frac{12-h}{h}} = AB$

12) По усл.: $\frac{AB \cdot HD}{2} = 15 \Leftrightarrow \cancel{6} \sqrt{\frac{12-h}{h}} \cdot h = \overset{5}{\cancel{30}} \Leftrightarrow \sqrt{h(12-h)} = 5$

~~$\Leftrightarrow 12h - h^2 = 25 \Leftrightarrow h^2 - 12h + 25 = 0 \Rightarrow D_1 = 36 - 25 =$~~

~~$= 11\ (\geq 0) \Rightarrow h = 6 \pm \sqrt{11}$. Но $h < 6$ ($HD < HC$) $\Rightarrow$~~
~~$\Rightarrow h = 6 - \sqrt{11}$ ($\sqrt{11} < 4 < 6$, т.к. $11 < 16$).~~

Значит $\dfrac{AB}{CH} = \dfrac{6\cdot\sqrt{\frac{12-h}{h}}}{12-h} = \dfrac{6\cdot\frac{\sqrt{12-h}}{\sqrt{h}}}{\sqrt{12-h}\cdot\sqrt{12-h}} = \dfrac{6}{\sqrt{h(12-h)}} =$

~~$= \dfrac{6}{\sqrt{25}}$ (т.к. $\sqrt{h}$~~

$=$ (т.к. $\sqrt{h(12-h)} = 5$) $\dfrac{6}{5}$

$\boxed{\text{Ответ: } AB : CH = 6 : 5}$

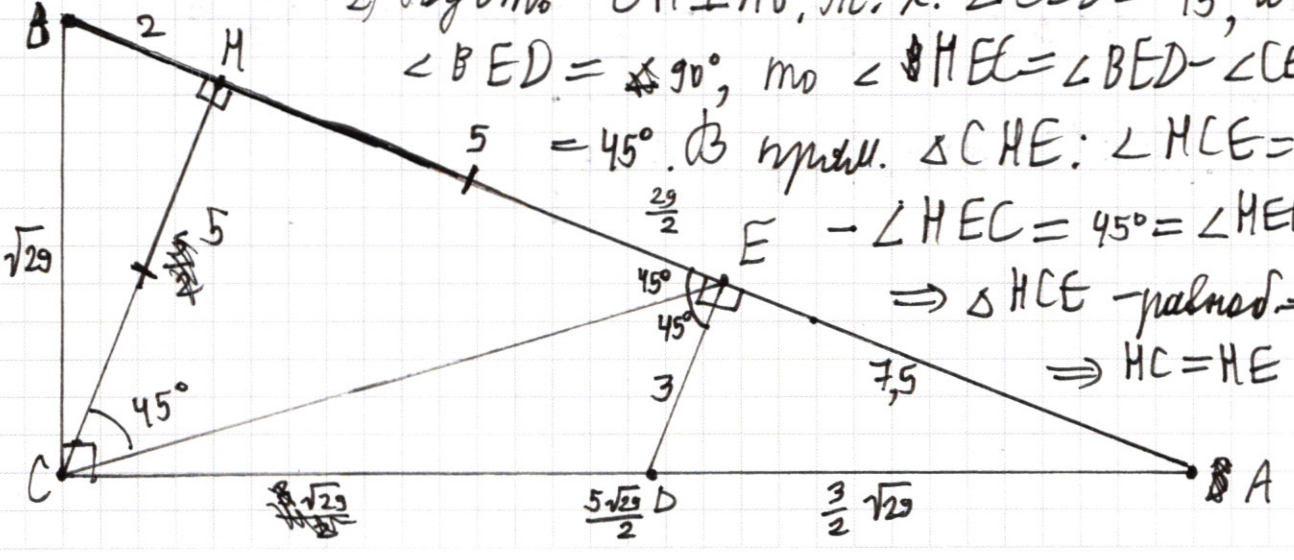
$\boxed{№5}$

Дано: $\triangle ABC$ − прям.; $AB$ − гип.; $AC$ − кат.; т. $D \in AC$; т. $E \in AB$; $DE \perp AB$; $BC = \sqrt{29}$; $AC = \dfrac{5\sqrt{29}}{2}$; $\angle CED = 45°$

Найти: $AD : AC$

Решение: 1) $AB$ − гип. $\Rightarrow \angle ACB = 90°$

2) Пусть $CH \perp AB$. Т.к. $\angle CED = 45°$, а $\angle BED = 90°$, то $\angle HEC = \angle BED - \angle CED = 45°$. В прям. $\triangle CHE$: $\angle HCE = 90° - \angle HEC = 45° = \angle HEC \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle HCE$ − равноб. $\Rightarrow$
$\Rightarrow HC = HE$



3) По т. П. ~~Пс~~ для $\Delta ABC$: $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{29 + \frac{25}{4} 29} =$

$= \frac{29}{2} = 14{,}5$

4) ~~AB~~ $AC \cdot BC = AB \cdot CH \Leftrightarrow CH = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{\frac{5\sqrt{29}}{\cancel{2}} \cdot \sqrt{29}}{\frac{\cancel{29}}{\cancel{2}}} =$

$= \frac{5}{4} = \cancel{0{,}25} \; \cancel{1{,}29} = 5 = HE$

5) $BC^2 = BH \cdot AB \Leftrightarrow BH = \frac{BC^2}{AB} = \frac{\cancel{29}}{\frac{\cancel{29}}{2}} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AE = AB - BH - HE = 14{,}5 - 2 - 5 = 7{,}5$

6) $DE \perp AB$; $CH \perp AB \Rightarrow DE \parallel CH \Rightarrow$ прям. $\Delta ADE$ и $\Delta ACH$ подобны $\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AE}{EH} \Leftrightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{\cancel{7{,}5}\ 1{,}5}{\cancel{5}\ 1} = \cancel{\frac{3}{2}}\ 1{,}5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AD = 1{,}5 DC$. Но $AC = \frac{5\sqrt{29}}{2} = AD + DC = 2{,}5 DC \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow DC = \sqrt{29} \Rightarrow AD = \frac{3}{2}\sqrt{29} \Rightarrow AD : AC = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{29}}{\frac{5}{2}\sqrt{29}} = 3:5$

7) По т. П. для $\Delta ADE$: $DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{\frac{9}{4} \cdot 29 - \frac{225}{4}} =$

$= \sqrt{\frac{261 - 225}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = 3.$

Значит $S_{\Delta AED} = \frac{DE \cdot AE}{2} = \frac{3 \cdot 7{,}5}{2} = \frac{22{,}5}{2} = 11{,}25$

$\boxed{\text{Ответ: } AD : AC = 3:5;\ S_{\Delta AED} = 11{,}25}$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{№7}$

Докажем, что $\underline{f(1)=0}$:

Из условия: $f(1\cdot 1)=f(1)+f(1) \Leftrightarrow f(1)=2f(1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(1)=0$, чтд.

Т.к. $1=\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}$ $(\forall \{x,y\}\in\mathbb{N})$, то $f(1)=f(\frac{x}{y})+$
$+f(\frac{y}{x}) \Leftrightarrow f(\frac{x}{y})+f(\frac{y}{x})=0$

Пусть $p\in\mathbb{P} \Rightarrow f(p)+f(\frac{1}{p})=0 \Leftrightarrow \underline{f(\frac{1}{p})=-p<0}$

Если $x=y$, то $f(\frac{x}{y})=f(1)=0$ (не подходит под условие). Значит $x\neq y$, при этом $x\in[3;19]\cap\mathbb{N}$;
$y\in[3;19]\cap\mathbb{N}$.

~~Также $f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})$.~~
~~Пусть НОД$(x,y)=1 \Rightarrow f(x)=x>0 \Rightarrow f(\frac{1}{y})<0$.~~

Итак, пусть мы взяли натуральные числа $x\in[3;19]$ и $y\in[3;19]$.

Заполним таблицу $\frac{x}{y}$: см. далее.

| y \ x | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | $\frac{4}{3}$ | $\frac{5}{3}$ | 2 | $\frac{7}{3}$ | $\frac{8}{3}$ | 3 | $\frac{10}{3}$ | $\frac{11}{3}$ | 4 | $\frac{13}{3}$ | $\frac{14}{3}$ | 5 | $\frac{16}{3}$ | $\frac{17}{3}$ | $\frac{18}{3}$ | $\frac{19}{3}$ |
| 4 | $\frac{3}{4}$ | 1 | $\frac{5}{4}$ | $\frac{3}{2}$ | | 2 | | | | 3 | | | | 4 | | | |
| 5 | $\frac{3}{5}$ | $\frac{4}{5}$ | 1 | $\frac{6}{5}$ | | | | 2 | | | | | 3 | | | | |
| 6 | 2 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{5}{6}$ | 1 | $\frac{7}{6}$ | $\frac{4}{3}$ | | | | 2 | | | | | | 3 | |
| 7 | $\frac{3}{7}$ | | | $\frac{6}{7}$ | 1 | | | | | | | 2 | | | | | |
| 8 | $\frac{3}{8}$ | 2 | | $\cancel{\frac{6}{8}}$ $\frac{3}{4}$ | $\frac{7}{8}$ | 1 | | $\frac{5}{4}$ | | | | | | 2 | | | |
| 9 | 3 | | | $\frac{6}{9}$ | | ~~4~~ | 1 | | | | | | | | | 2 | |
| 10 | $\frac{3}{10}$ | $\frac{2}{5}$ | 2 | $\cancel{\frac{6}{10}}$ $\frac{3}{5}$ | | $\frac{4}{5}$ | | 1 | | $\frac{6}{5}$ | | | | | | | |
| 11 | $\frac{3}{11}$ | | | $\frac{6}{11}$ | | | | | 1 | | | | | | | | |
| 12 | 4 | 3 | | 2 | | | | $\frac{5}{6}$ | | 1 | | $\frac{7}{6}$ | | | | | |
| 13 | $\frac{3}{13}$ | | | $\frac{6}{13}$ | | | | | | | 1 | | | | | | |
| 14 | $\frac{3}{14}$ | $\frac{2}{7}$ | | $\cancel{\frac{6}{14}}$ $\frac{3}{7}$ | 2 | | | | | $\frac{6}{7}$ | | 1 | | $\frac{8}{7}$ | | | |
| 15 | 5 | | 3 | $\frac{6}{15}$ | | | | | | | | | 1 | | | | |
| 16 | $\frac{3}{16}$ | 4 | | $\frac{3}{8}$ $\cancel{\frac{6}{16}}$ | | 2 | | | | | | $\frac{7}{8}$ | | 1 | | $\frac{9}{8}$ | |
| 17 | $\frac{3}{17}$ | | | $\frac{3}{17}$ | | | | | | | | | | | 1 | | |
| 18 | $\frac{3}{18}$ | $\frac{2}{9}$ | | 3 | | $\frac{4}{9}$ | 2 | $\frac{5}{9}$ | | $\frac{6}{9}$ | | $\frac{7}{9}$ | | $\frac{8}{9}$ | | 1 | |
| 19 | $\frac{3}{19}$ | | | 6 | | | | | | | | | | | | | 1 |

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{№7}$

1) $f(1\cdot 1) = f(1) + f(1) \Leftrightarrow 2f(1) = f(1) \Rightarrow \underline{f(1)=0}$

2) $p \in \mathbb{P} \Rightarrow (f(1) = f(\frac{1}{p}) + f(p)$, а $f(p) = p)$ $f(\frac{1}{p}) + p = 0 \Leftrightarrow \underline{f(\frac{1}{p}) = -p < 0}$

3) НОД $(a, b) = 1 \Rightarrow \underline{f(\frac{a}{b}) = f(a) + f(\frac{1}{b})}$.

4) $\underline{f(p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}) = \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_m p_m}$, т.к.

$f(p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}) = f(p_1) + f(p_1^{\alpha_1 - 1} \dots p_m^{\alpha_m})$, и т.д.

Т.е. $f\left(\frac{p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}}{p_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \dots p_{m+n}^{\alpha_{m+n}}}\right) = \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_m p_m -$

$\cancel{+ \frac{\alpha_{m+1}}{p_{m+1}} + \dots + \frac{\alpha_{m+n}}{p_{m+n}}} - \alpha_{m+1} p_{m+1} - \dots - \alpha_{m+n} p_{m+n}$

~~Если~~ $\cancel{y \in \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} \Rightarrow f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{}}$

То, что зачёркнуто сверху на этой странице, НЕ ЗАЧЁРКНУТО.

№7

1) $f(1\cdot 1)=f(1)+f(1) \Leftrightarrow \cancel{f(1)}=\overset{1}{2}f(1) \Leftrightarrow \underline{f(1)=0}$

2) $f(1)= f\left(\frac{a}{b}\right)+f\left(\frac{b}{a}\right)=0$

Пусть $f\left(\frac{a}{b}\right)=0$, а $a\neq b$.

Без огр. общн., $a, b$ – взаимнопростые числа.

~~Пусть~~ $f\left(\frac{a}{b}\right)=f(a)+f\left(\frac{1}{b}\right)$; $f\left(\frac{b}{a}\right)=f(b)+f\left(\frac{1}{a}\right)$

3) Если $p$ – простое, то $f(1)=f(p)+f\left(\frac{1}{p}\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{p}\right)=-p<0$.

Значит НЕ подходят пары $(3;3)$; $(4;4)$; ... ; $(19;19)$ (17 пар)

ПОДХОДЯТ пары $(1;2)$; $(2;4)$; ..., $(9;18)$; $(1;3)$; $(2;6)$; ...; $(6;18)$; $(1;5)$; $(2;10)$; $(3;15)$; $(1;7)$; $(2;14)$; $(1;11)$; $(1;13)$; $(1;17)$; $(1;19)$ (24 пары)

НЕ подходят пары, обратные к пред. 24 парам.

~~Пусть $b \in \mathbb{P} \Rightarrow f(\frac{a}{b}$~~

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{№6}$

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6 \quad (1) \\ x^2-2x-3y+y^2\leq 0 \quad (2) \end{cases}$$

2) $(x^2-2x+1)+(y^2-3y+3{,}25)\leq 3{,}25$

$(x-1)^2+(y-1{,}5)^2\leq\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 \quad (3{,}25=R^2)$

1) $3|x|+2|y|+|6-3x-2y|>6$

Если $x<0$ и $y<0$, то

$-3x-2y+\cancel{6}-3x-2y>\cancel{6} \Leftrightarrow (3x+2y)\cdot 2<0$ (очевидно)

Если $x=0$, то $2|y|+|6-2y|>6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |y|+|3-y|>3$

если $y>3$, то $2y-3>3 \Leftrightarrow y>3$

если $y<0$, то $3-2y>3 \Leftrightarrow y<0$

если $y\in[0;3]$, то $3>3$ (?)

Если $y=0$, то $3|x|+|6-3x|>6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x|+|2-x|>2.$

если $x>2$, то $2x-2>2 \Leftrightarrow x>2$

если $x<0$, то $\cancel{2}-2x>\cancel{2} \Leftrightarrow x<0$

если $x\in[0;2]$, то $2>2$ (?)

Если $x=0$ и $y=0$, то $6>6$ (?)

Иначе $x>0$ и $y>0$. Тогда $3x+2y+|6-3x-2y|>6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |6-3x-2y|>(6-3x-2y)$

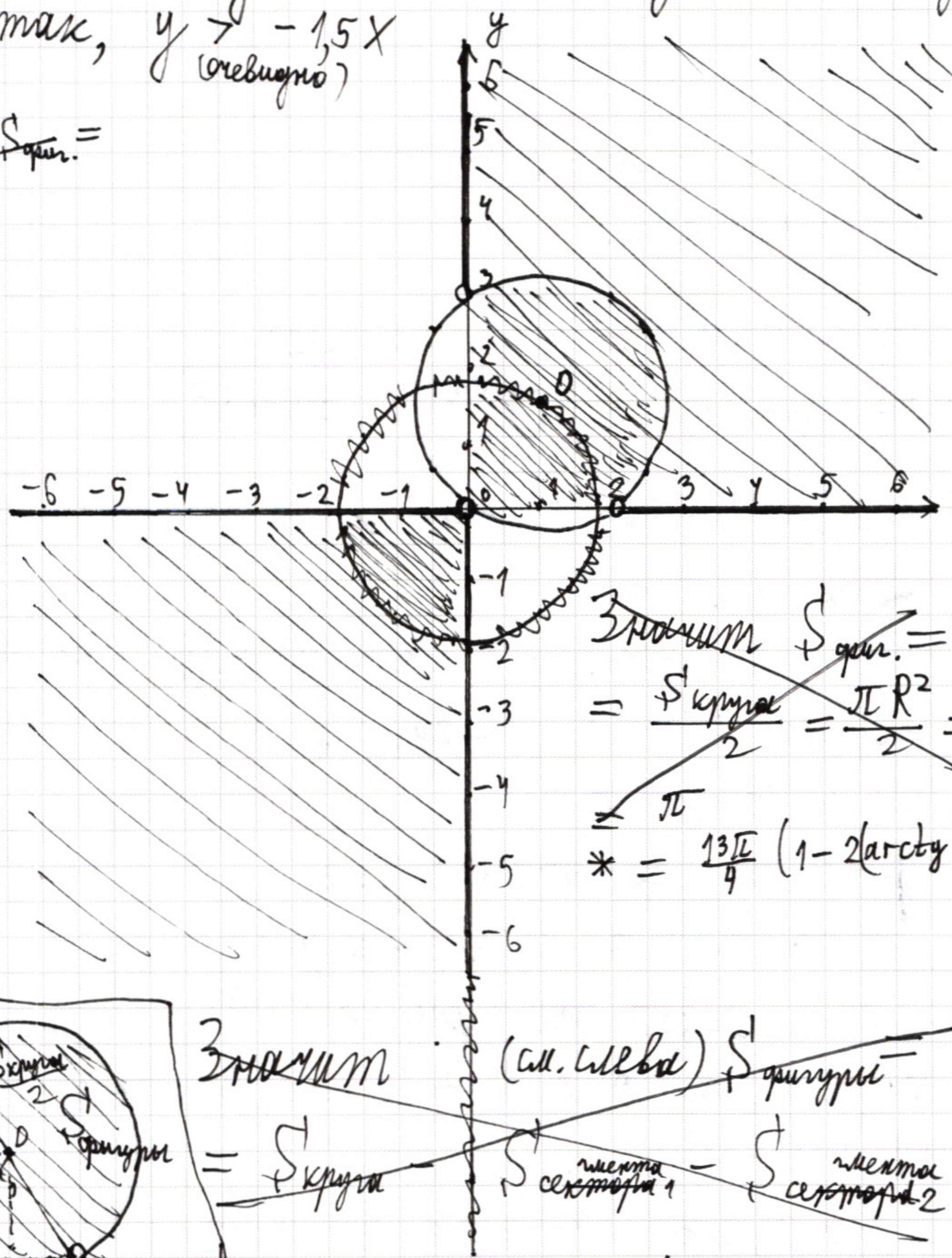
при $6-3x-2y \geq 0$: $6-3x-2y > 6-3x-2y$ (3)

при $6-3x-2y < 0$: $3x+2y-6 > 6-3x-2y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x+4y > 12 \Leftrightarrow 3x+2y > 0$ (очевидно)

. Итак, $y > -1{,}5x$ (очевидно)

~~Значит $S_{фиг.}$ =~~



~~Значит $S_{фиг.} = \frac{S_{круга}}{2} = \frac{\pi R^2}{2} = \pi$~~

$* = \frac{13\pi}{4}(1-2(\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\operatorname{arctg}$

~~Значит (см. слева) $S_{фигуры} = S_{круга} - S_{сегмента\ 1} - S_{сегмента\ 2}$~~

~~$S_{сегмента\ 1} = S_{сектора\ 1} - S_{\Delta 1} = \frac{\pi \boxed{R^2}}{360°} \cdot 2\operatorname{arctg}\frac{3}{2} - 6 = \frac{13\pi}{1440}$~~ ($R^2 = \frac{13}{4}$)

~~$S_{сегмента\ 2} = S_{сектора\ 2} - S_{\Delta 2} = \frac{\pi \boxed{R^2}}{360°} \cdot 2\operatorname{arctg}\frac{2}{3} - 6 =$~~ ($R^2 = \frac{13}{4}$)

~~$S_{фигуры} = \pi R^2 - \frac{\pi R^2}{360°} 2\operatorname{arctg}\frac{2}{3} - \frac{\pi R^2}{360°} 2\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + 12 = *$~~

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Значит (см. ранее)

$$S_{фиг.} = \cancel{\frac{S_{круга}}{2}} + \frac{S'_{круга}}{2} + S'_{\Delta} = \frac{\pi R^2}{2} + \frac{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot 3}{\cancel{2}} =$$

$$= \frac{13\pi}{8} + 3$$

$$\boxed{\text{Ответ: } S_{фиг.} = \frac{13\pi}{8} + 3}$$

Примечание: действительно, фигуру можно составить из полукруга и прям. $\Delta$-а с катетами 2 и 3

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$ $\quad y=0 \quad 2y=9 \quad -2x=0 \quad x^2=9$ $\quad \cancel{a=\frac{b}{2}} \quad b=2a$

$\cancel{x \geq 0}$ $\cancel{y \geq 0}$

$x>0 \quad b^2-2a^2=ab \quad 2a^2+ab-b^2=0$

$y>0 \quad 2b^2+a^4=9 \quad (2a-b)(a+b)=0$

$\sqrt{x}=a \quad 8a^2+a^4=9 \quad A=1 \quad x=1$

$\sqrt{y}=b \quad A^2+8A-9=0 \quad a^2=1 \quad y=4$

$f(1)=f(3)+f(\frac{1}{3})$

$(A+9)(A-1)=0 \quad a=1$

---

$x<0 \quad \sqrt{-x}=a$

$y<0 \quad \sqrt{-y}=b$

$\cancel{b^2-2a^2=ab}$ $\quad (-b^2)-2(-a^2)=ab$

$\cancel{2b^2+a^2}$ $\quad 2(-b^2)+a^4=9$

$(2a+b)(a-b)=0 \quad 2a^2-ab-b^2=0$

$D_1=1+9=10 \quad a=b \quad a^4-2b^2=9$

$a^2$

$A=1\pm\sqrt{10} \quad a^4-2a^2-9=0$

$A=1+\sqrt{10} \quad a=\sqrt{1+\sqrt{10}}=b \quad A^2-2A-9=0$

$x=-1-\sqrt{10} \quad -x=|x|$

$y=-1-\sqrt{10} \quad x^2+2x-9=0$

№6

$6x+4y<0 \quad 13 \quad 4,5$

$x<0;\ y<0$

$-3x-2y+6-3x-2y \geq 6 \quad x^2-2x-3y+y^2 \leq 0 \quad -1$

$(x-1)^2+(y-1,5)^2 \leq 3,25$

$\cancel{x \geq 0;\ y<0}$

$|6-3x-2y|$

1) $x=y \Rightarrow f(\frac{x}{y})=0$ $\quad$ 2) $f(1)=f(\frac{x}{y})+f(\frac{y}{x})=1$

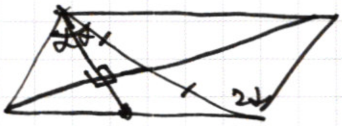
☑ черновик ☐ чистовик

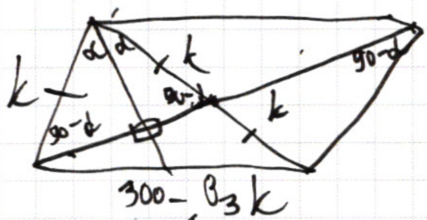
(Поставьте галочку в нужном поле)

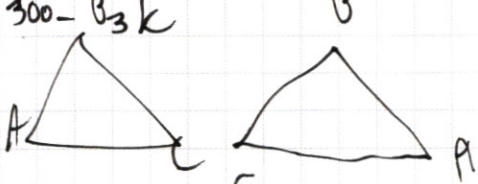
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№2






$|x-1|^2+4-4|x-1|$

$\dfrac{(|x-1|-2)^2}{\dots} \leq 0$

$4(x(x-3)) + |x|\cdot|x-3|$

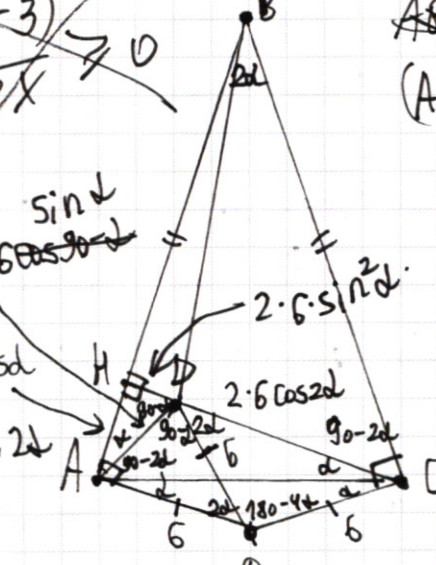
$x \geq 3$ $\quad |x| \cdot |x-3|$

$\cancel{|x|\cdot|x-3| =}$

$\cancel{(x-3)^2}$

$|A| = -4A$

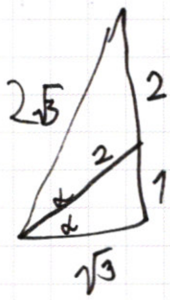
$\cancel{\dfrac{(x-3)}{3x} \geq 0}$




~~AB=CA~~

$(AH+BH)DH = 30$

$AO = OD = OC = 6$



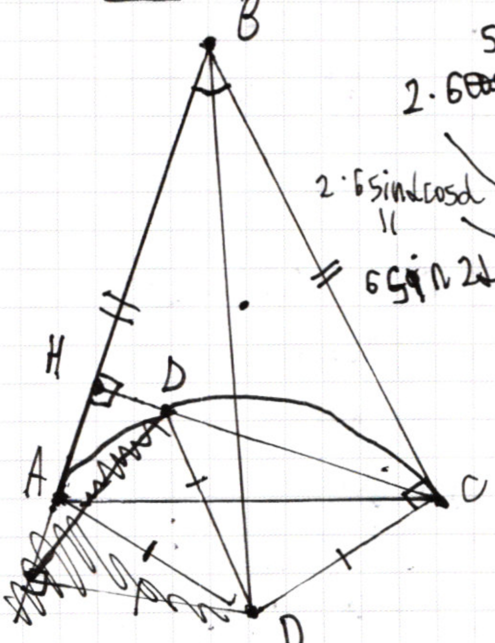

$\cancel{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ}$

$\frac{1}{tg2\alpha}$

$2\cdot 6\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot\cancel{\cos 2\alpha}$

$f(1$

№4




$f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(1) = 2f(1) \qquad f(a) = f(1)+f(a)$

$f(1)=0 \qquad f(4) = 2f(2)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

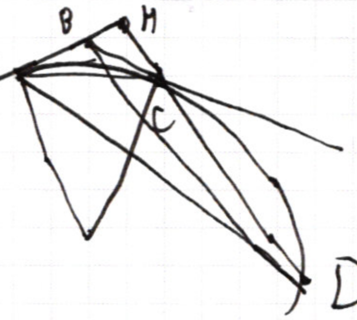
ШИФР

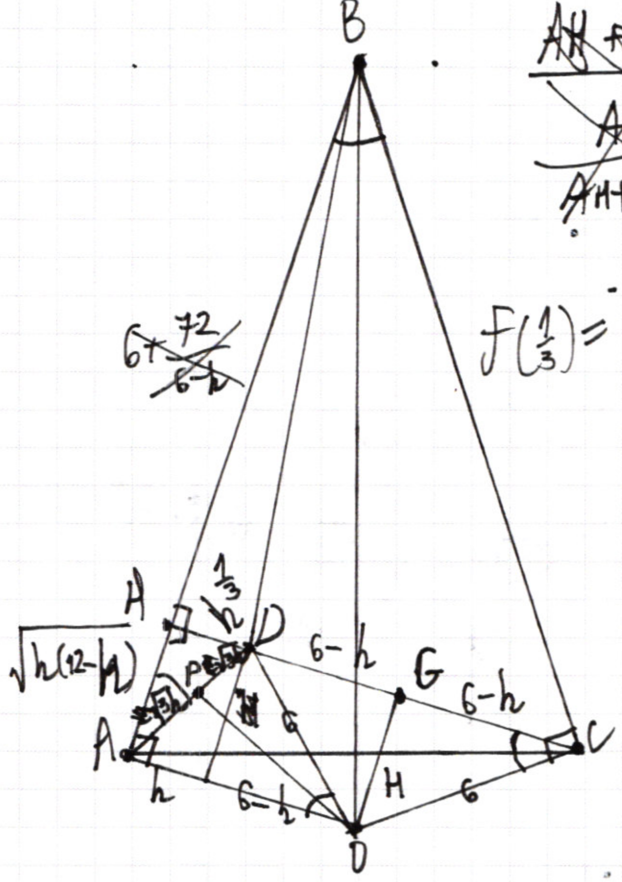
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{BC} = \sqrt{29}$; $AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$

$\cancel{\frac{AH+HB}{\frac{AO}{AH+HB}}} =$




$f\left(\frac{1}{3}\right) =$

$\frac{12-h}{x} = \frac{6-h}{6}$

$x = \frac{6(12-h)}{6-h} = \frac{-6h+72}{-h+6} = 6 + \frac{72}{6-h}$

$\cancel{36} \; 0 = H^2 - 12h + h^2$

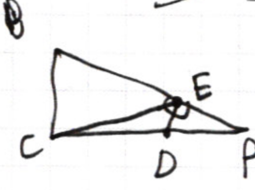
$H^2 = h(12-h)$

$\sqrt{12h}$ $\quad 2\sqrt{3h}$

$\frac{6}{\sqrt{3h}} = \frac{2\sqrt{3h}}{h}$ $\quad h = \frac{1}{3}$

$\frac{\sqrt{h}\cdot\sqrt{12-h}}{\sqrt{12-h}\cdot\sqrt{12-h}} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{12-h}}$

$\cancel{\frac{1}{3}\cdot\frac{35}{3}} \quad \cancel{\frac{\sqrt{35}}{3}}$





$\frac{\sqrt{h(12-h)}}{12-h} = \frac{h}{\sqrt{h(12-h)}}$

$BC = \sqrt{29}$

$x = y \Rightarrow f(1) = 0$

$f(b^2) = f(b) + f(b)$ $\quad f(ab)$

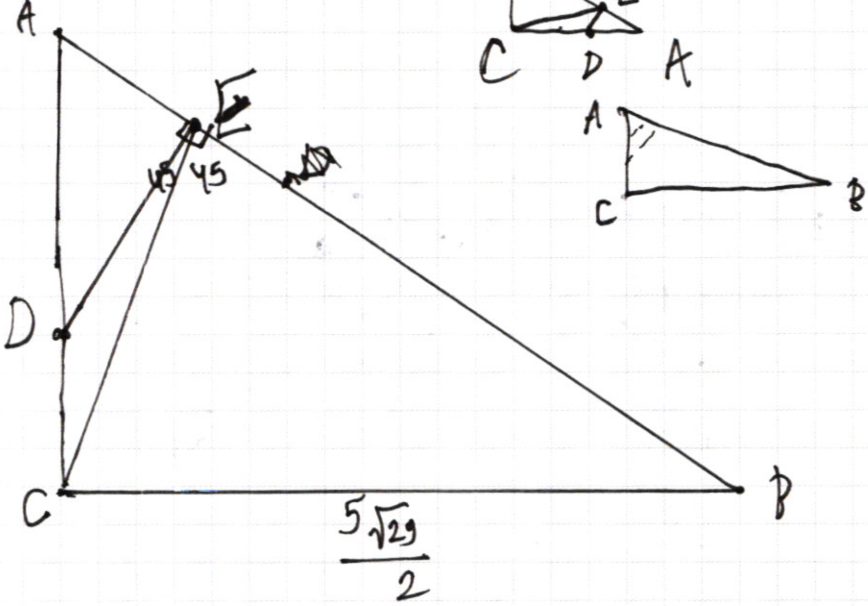
$f\left(\frac{19}{3}\right) = 19 + f\left(\frac{1}{3}\right)$

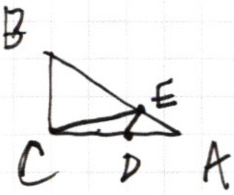
☑ черновик ☐ чистовик

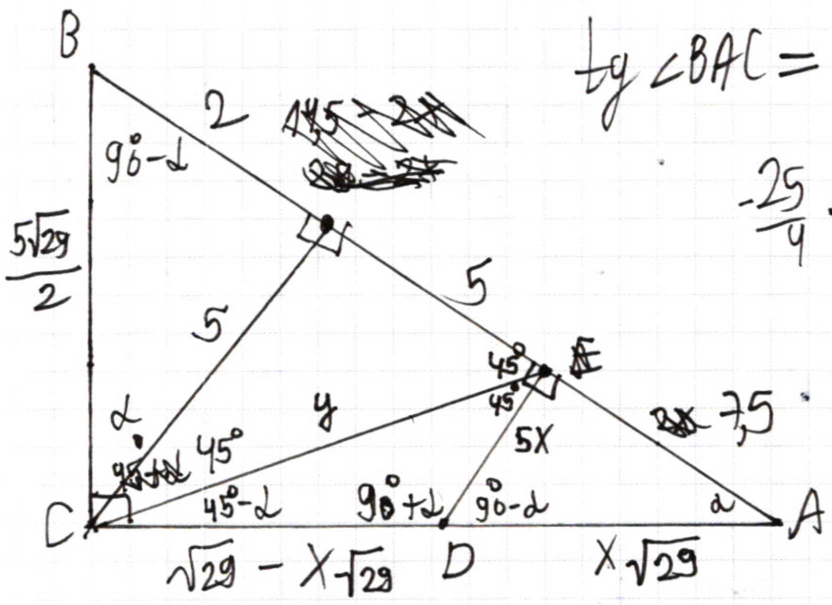
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)




$$tg\angle BAC = \frac{5}{2}$$

$$-\frac{25}{4}\sqrt{29} + \frac{4}{4}\sqrt{29} = \sqrt{29}\cdot\frac{29}{4}$$

$$\cancel{\frac{AD}{AC} = X\sqrt{29}}$$

$$\cancel{29(x-1)^2 = 25x^2 +}$$

$$29(x-1)^2 = 25x^2 + y^2 - xy\cdot 5\sqrt{2}$$

$$\frac{25\cdot 29}{4} = (14{,}5-2x)^2 + y^2 - (14{,}5-2x)y\cdot\sqrt{2}$$

$$\cancel{\frac{5\cdot 29}{4}} \quad \frac{5\cdot 29}{2} = \frac{29}{2}\cdot\cancel{x}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)