

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x - 3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x - 2|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy}, \\ x + y^2 = 5. \end{cases}$$

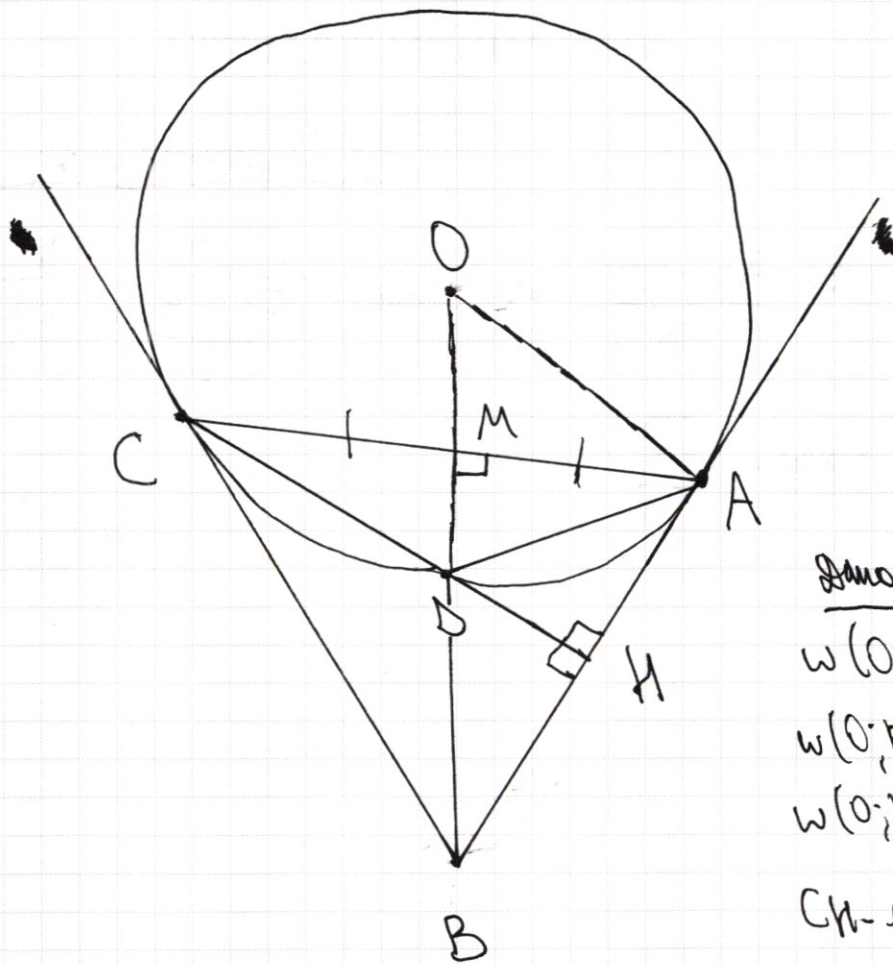
4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{7}$, $BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4, \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 18$, $1 \leq y \leq 18$ и $f(x/y) < 0$.



Дано:

$BA = BC$ (по об-ву)

$BO \perp AC$ (по об-ву); $BO \cap AC = M \Rightarrow AM = MC$;

$\angle CBM = \angle ABM$.

$S_{ABD} = \frac{DH \cdot AB}{2} \Rightarrow DH \cdot AB = 2 \cdot S_{ABD}$.

$AM \cdot 2AM = AB^2$

Доказательство:

$\omega(O; R)$;

$\omega(O; R) \cap BA = A$;

$\omega(O; R) \cap BC = C$;

CH - высота $\triangle ABC$;

$CH \cap \omega(O; R) = D$.

$S_{ABD} = S_{ABC} \cdot R = 2 \cdot S_{ABC}$.

Найти: AB, CH

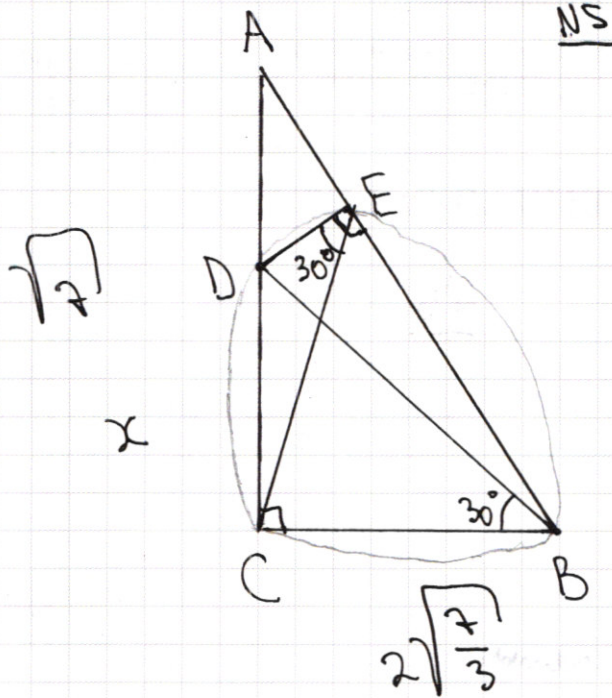
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

NS (таблетки 2)

$$S_{ABE} = \frac{AE \cdot DE}{2} \Rightarrow S_{ABE} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{9}$

a)

NS

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$;
 $D \in AC$; $E \in AB$; $DE \perp AB$;

$AC = \sqrt{7}$; $BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$;
 $\angle CEB = 30^\circ$.

Найти: $AD:AC$ - ?

S_{AED} - ?

Решение:

Проведем BD и опустим окружность около $CDEB$,

это можно сделать, т.к. $\angle BCD + \angle BED = 180^\circ$.

$\angle DEC = \angle CBD = 30^\circ$, как опп. на одну дугу.

Пусть $CD = x$, тогда $BD = 2x$, т.к. CD лежит против 30° .

$$x^2 + \left(2\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2 = (2x)^2 \quad (\text{по теор. Пифагора})$$

$$4 \cdot \frac{7}{3} = 3x^2$$

$$9x^2 = 28$$

$$x = \frac{2\sqrt{7}}{3} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{3}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{3}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$$x - 2y = \sqrt{xy} \Rightarrow (x - 2y)^2 = xy \Rightarrow x^2 - 4xy + 4y^2 = xy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 5xy + 4y^2 = 0 \quad (\text{слеповски, т.к. первое преобразование неравносильное}).$$

$$D = 25y^2 - 4 \cdot 4y^2 = (3y)^2$$

$$x_1 = \frac{5y + 3y}{2} \quad ; \quad x_2 = \frac{5y - 3y}{2}$$

$$x_1 = 4y$$

$$; \quad x_2 = y$$

$$\begin{cases} x = y \\ y^2 + y - 5 = 0 \\ x = 4y \\ y^2 + 4y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} \\ x = 4y \\ y = 1 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \\ y = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \\ y = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \\ x = 4 \\ y = 1 \\ x = -20 \\ y = -5 \end{cases}$$

$$1) \quad y^2 + y - 5 = 0$$

$$D = 1 + 20 = 21$$

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \quad ; \quad y_2 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}$$

$$2) \quad y^2 + 4y - 5 = 0$$

$$D = 16 + 4 \cdot 5 = 6^2$$

$$y_1 = 1 \quad ; \quad y_2 = -5.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x-2|} \leq 0$$

$$2x^2 - 4x + |x| \cdot |x-2|$$

$$\frac{(x-3)^2 - 2|x-3| + 1}{2x(x-2) + |x| \cdot |x-2|} \leq 0 \quad \text{ОДЗ: } (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$$

$$\frac{(|x-3| - 1)^2}{2x(x-2) + |x| \cdot |x-2|} \leq 0$$

$$2x(x-2) + |x| \cdot |x-2|$$

По определению $(|x-3| - 1)^2 \geq 0$

$$\text{Значит: } (|x-3| - 1)^2 = 0$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

Чтобы выражение было меньше нуля нужно, чтобы знаменатель

был меньше нуля, т.к. числитель неотрицательный.

$$2x(x-2) + |x| \cdot |x-2| < 0$$

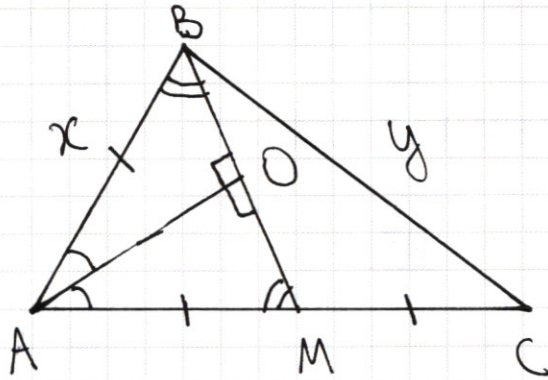
$$\begin{cases} x < 0 \\ x > 2 \\ 2x(x-2) + x(x-2) < 0 \\ 0 \leq x < 2 \\ 2x(x-2) - x(x-2) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ x > 2 \\ x(x-2) < 0 \\ 0 < x < 2 \end{cases} \Rightarrow x \in (0; 2)$$

$$\text{Ответ: } (0; 2) \cup \{4\}$$

N2

AO - висота
BM - медіана



$$AO \perp BM \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle ABM = \angle AMB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle ABM - \text{рівнобедр.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = AM \Rightarrow \boxed{AB = \frac{AC}{2}}$$

$$AB = x \Rightarrow AC = 2x$$

$$BC = y$$

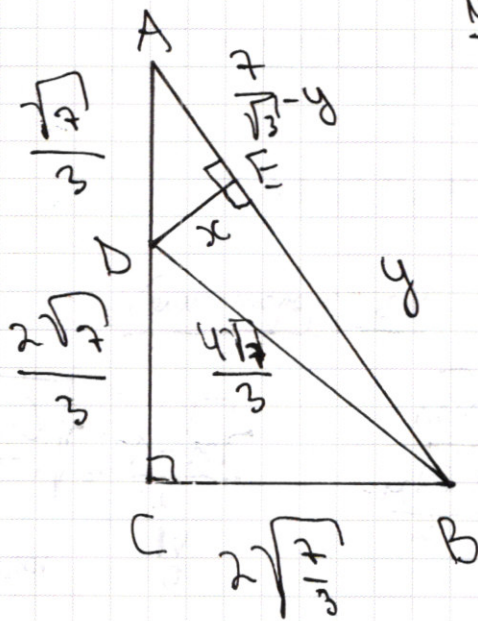
$$\begin{cases} 3x + y = 600 \\ y > x \\ 3x > y \end{cases} \text{ - по непер. б-ку } \Delta.$$

$$\begin{cases} 3(200-x) > x \\ 3x > 3(200-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 150 \\ x > 100 \end{cases}$$

$$x \in (100; 150), \quad x \in \mathbb{Z} \text{ беру } 409 \text{ варіантів.}$$

Отже, 409.

а)



NS (выразим)

$$1) AB = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2 + \left(2\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2}$$

$$AB = \sqrt{7 + \frac{28}{3}}$$

$$AB = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

$$2) BD = 2CD = \frac{4\sqrt{7}}{3}$$

Пусть $BE = y$, тогда $AE = \frac{7}{\sqrt{3}} - y$.

Пусть $DE = x$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \left(\frac{4\sqrt{7}}{3}\right)^2 \\ x^2 + \left(\frac{7}{\sqrt{3}} - y\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 \end{cases} \quad \text{①}$$

$$\frac{49}{3} - \frac{14y}{\sqrt{3}} + y^2 - y^2 = \frac{7}{3} - \frac{16 \cdot 7}{9}$$

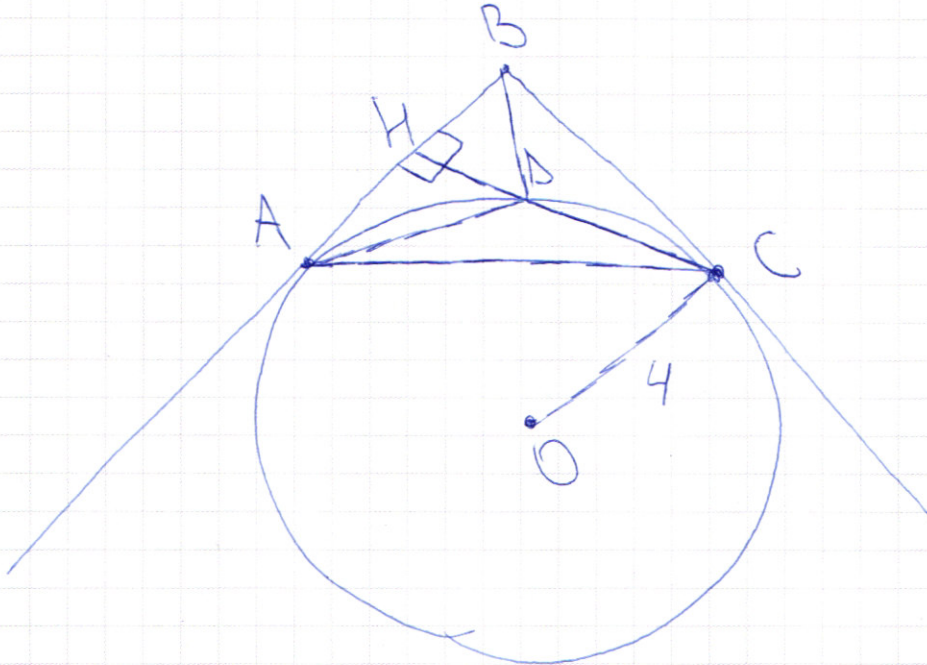
$$-\frac{14y}{\sqrt{3}} = \frac{7}{9} - \frac{112}{9} = -\frac{105}{9}$$

$$y = \frac{252\sqrt{3}}{14 \cdot 9}$$

$$y = 2\sqrt{3} \Rightarrow AE = \frac{7}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3} = \frac{7 - 2 \cdot 3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$DE = x = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{9} - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{7-3}{9}} = \frac{2}{3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$DK = \frac{1}{2} AB = 6 ; OC = 4.$$

$$AB ; CK - ?$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

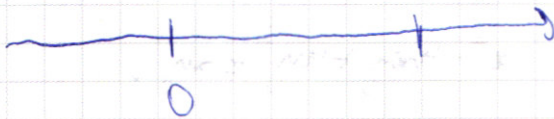
$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4-2x-y| \geq 4 \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 \leq 5$$

$$2) (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 5.$$

$$1) |2x| + |y| + |4-2x-y| \geq 4$$

$$\begin{cases} |2x| + |y| \geq 4 \\ |4-2x-y| \geq 4 \end{cases}$$



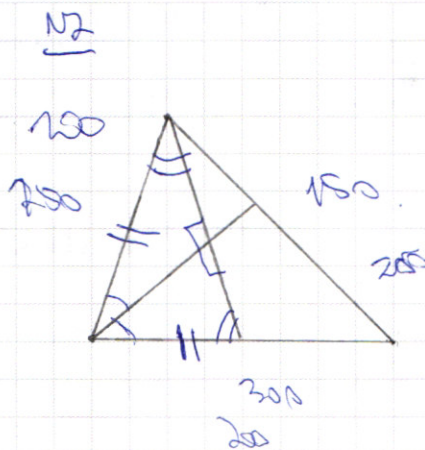
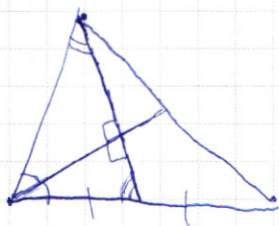
$$|2x| + |y| = 4 - |4-2x-y|$$

$$\begin{cases} 4 - |2x| - |y| = 4 - 2x - y \\ |2x| + |y| - 4 = 4 - 2x - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} |2x| + |y| = 2x - y \\ |2x| + |y| = -2x - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 2x - y - |y| \\ |y| + y = 0 \\ 2x = -|y| - y - 2x \\ 2x + |y| + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |y| + y = 0 \\ |y| = 4x - y \\ |y| = -y + 0 \end{cases}$$



$$x + 2x + y = 600$$

$$x = 200 - \frac{y}{3} \quad 3, 6, 9, 12$$

$$x + 2x + y$$

$$x + y > 2x \quad 2x > y$$

$$y > x$$

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy$$

$$x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$$

$$y^2 = 5 - x$$

$$x^2 - 5x\sqrt{5-x} + 20 - 4x = 0$$

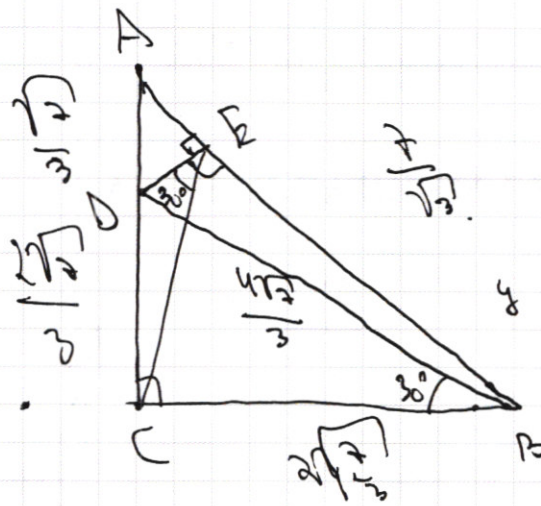
$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$$

$$D = 25y^2 - 4 \cdot 4y^2 = 9y^2 = (3y)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{5y \pm 3y}{2} \quad ; \quad \begin{cases} x = y \\ x = 4y \end{cases}$$

OK_{2x}



$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \\ x^2 + y^2 = 112 \\ \hline x = \frac{4y}{3} \\ \hline 14y = 252 \end{array}$$

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{4y}{3}\right)^2$$

$$x^2 + \left(\frac{4y}{3} - y\right)^2 = \left(\frac{4y}{3}\right)^2$$

$$14y + 14y = 252$$

$$\begin{array}{r} 252 \mid 14 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$\frac{4y}{3} - \frac{4y}{3} + y^2 = y^2 = \frac{18 \cdot 2}{3} = \frac{16 \cdot 2}{3}$$

$$\frac{14y}{\sqrt{3}} = \frac{7}{9} - \frac{112}{9} - \frac{14y}{9}$$

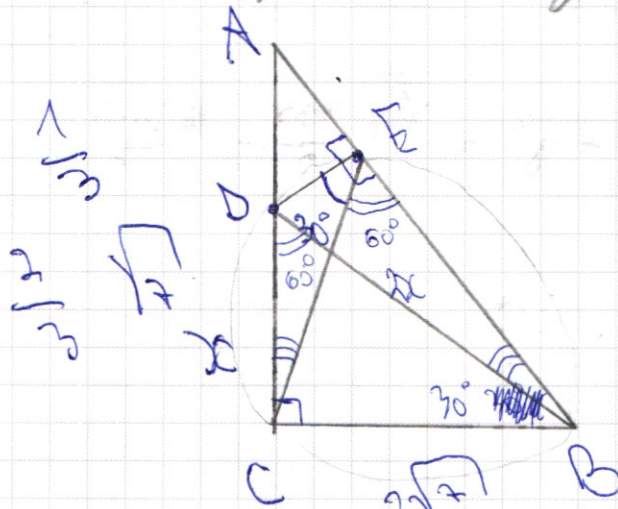
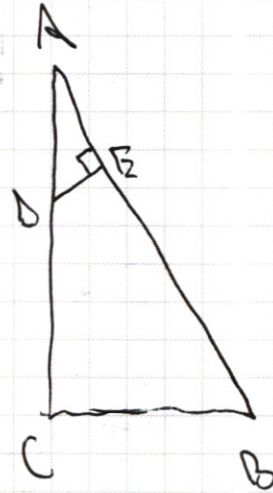
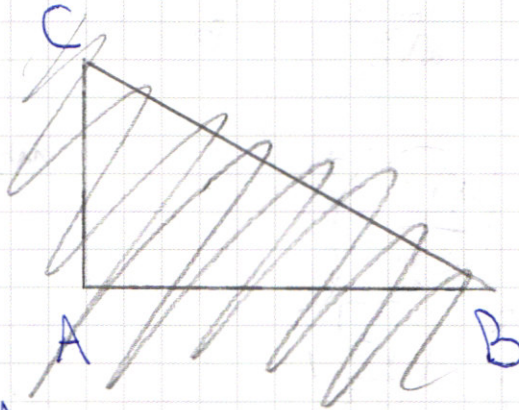
$$14y = \frac{252\sqrt{3}}{9}$$

$$y = 2\sqrt{3}$$

$$x = 2\sqrt{3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

NS



$$AC = \sqrt{7}$$

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot h$$

$$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$\angle CBD = 30^\circ$$

$$AD : AC = ? ; S_{ABD} = ?$$

$$\left(2\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2 = 4 \cdot \frac{7}{3} + 7 = \frac{28}{3} + \frac{21}{3} =$$

$$= \frac{49}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{49}{3}}$$

$$x^2 + 4\frac{7}{3} = 49$$

$$2x = 49$$

$$x = \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy} \\ x+y^2 = 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2y)^2 = xy \\ x = 5-y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 = xy \\ x = 5-y^2 \end{cases}$$

$$(5-y^2-2y)^2 = (5-y^2)y.$$

$$\begin{cases} x^2 - 5xy + 4y^2 = 0 \\ x = 5-y^2 \end{cases}$$

$$(y^2 + 2y - 5)^2 = 5y$$

$$(5-y^2)^2 - 5(5-y^2)y + 4y^2 = 0$$

$$25 - 10y^2 + y^4 - 25y + 5y^3 + 4y^2 = 0$$

$$y^4 + 5y^3 - 6y^2 - 25y + 25 = 0$$

$$\overline{600} \begin{array}{l} / 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 150 \\ \times 44 \\ \hline 600 \end{array}$$

1,4

201

2,4

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy} \\ x+y^2 = 5 \end{cases}$$

$$y^2 + 2y = -\sqrt{xy} + 5$$

$$y^2 + 2y + 1 = -\sqrt{xy} + 6$$

$$(y+1)^2 = \sqrt{xy} + 6$$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy} \\ x+y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 = 2y \\ x = t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2t^2 = \sqrt{xt} \\ x + t^4 = 5 \end{cases}$$

$$5 - t^4$$

$$\begin{cases} u^2 - 2t^2 = ut \\ u^2 + t^4 = 5 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

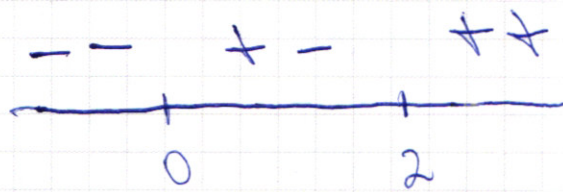
$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x-2|} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)^2 - 2|x-3| + 1}{2x(x-2) + |x(x-2)|} \leq 0$$

$$\frac{(|x-3|-1)^2}{2x(x-2) + |x(x-2)|} \leq 0$$

≥ 0 при $x=0, x=2$

$$2x(x-2) + |x(x-2)| < 0$$



$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x < 0 \\ 2x(x-2) + x(x-2) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x < 0 \\ x(x-2) < 0 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

$$\begin{cases} 0 \leq x < 2 \\ 2x(x-2) - x(x-2) < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0 \leq x < 2 \\ x(x-2) < 0 \end{cases} \Rightarrow (0; 2)$$

