

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

~~1.~~ [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x - 3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x - 2|} \leq 0.$$

~~2.~~ [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

~~3.~~ [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy}, \\ x + y^2 = 5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

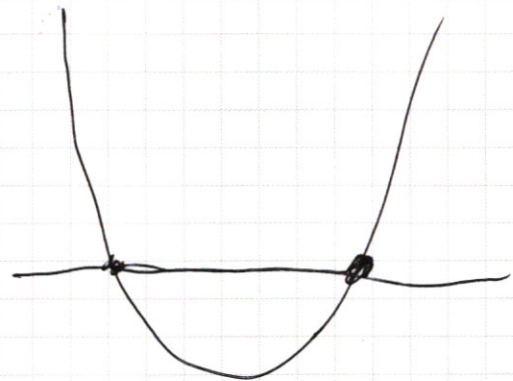
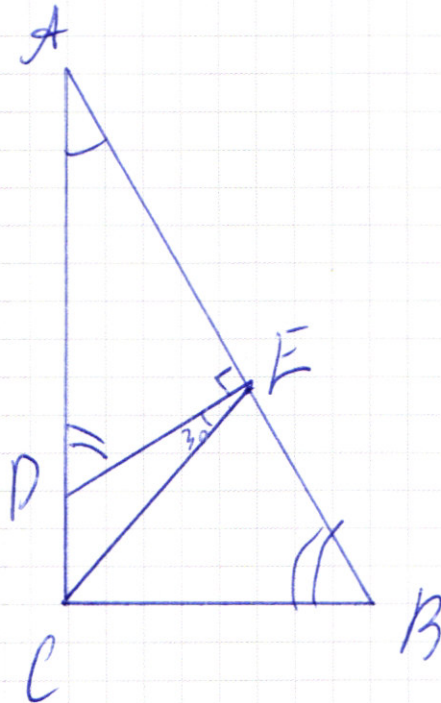
5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{7}$, $BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4, \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

~~7.~~ [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 18$, $1 \leq y \leq 18$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$2\sqrt{D}$$

-4

$$x^2 - 2x - 4 \leq 0$$

$$y^2 - 4y - 1 \leq 0$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$D = 16 + 4 = 20$$

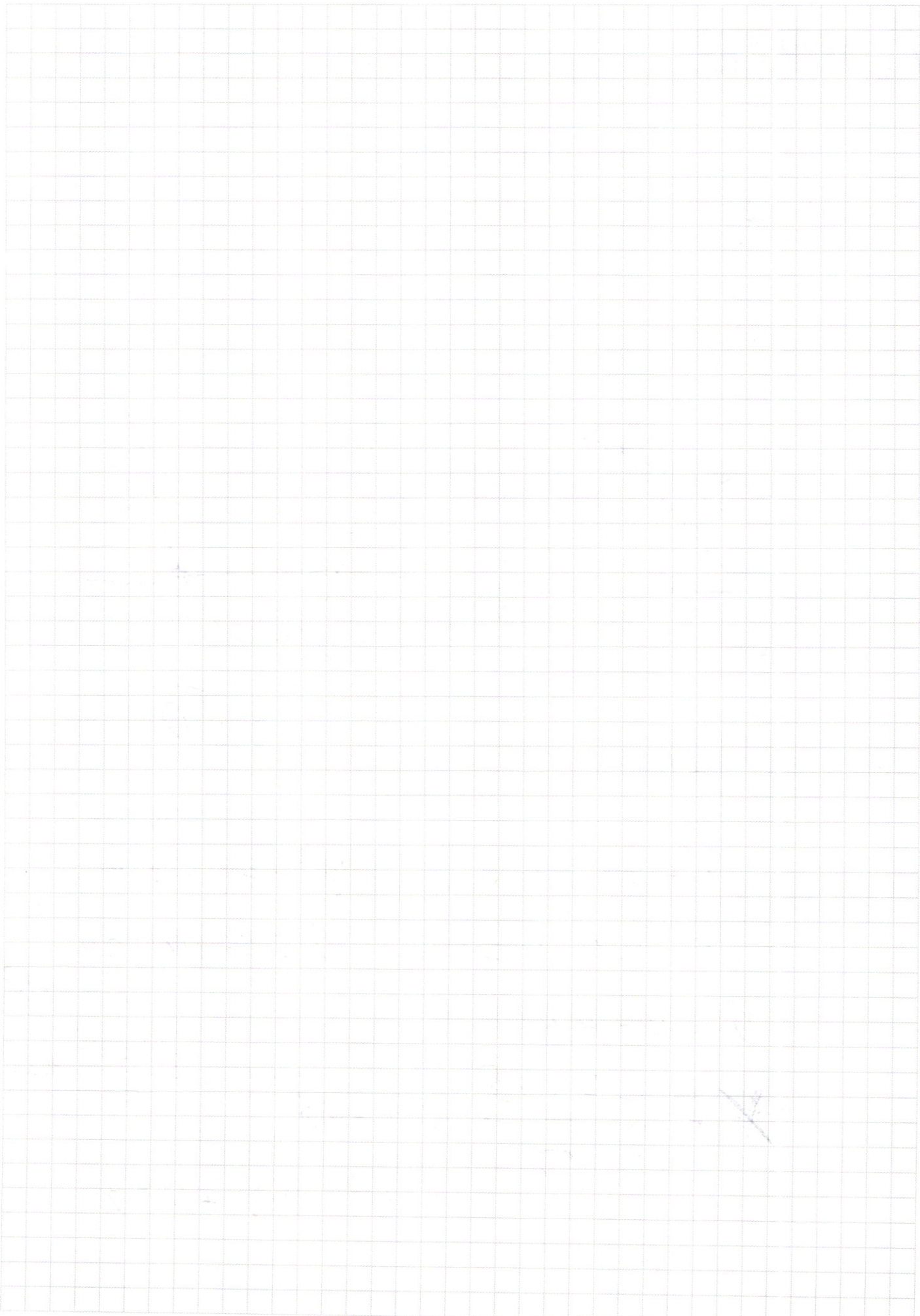
$$D = 4 + 4 \cdot 4 = 20$$

$$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

$$y^2 - 4y + x^2 - 2x$$

D =



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

	$4 - 2x - y \geq 0$	$4 - 2x - y < 0$
$x \geq 0 \quad y \geq 0$	\emptyset	$4x + 2y > 8$
$x < 0 \quad y \geq 0$	$-4x > 0$	$2y > 8$
$x \geq 0 \quad y < 0$	$-2y > 0$	$4x > 8$
$x < 0 \quad y < 0$	$-4x - 2y > 0$	\emptyset

1) $2x + y + 4 - 2x - y > 4$

$4 > 4$

2) $2x + y - 4 + 2x + y > 4$

$4x + 2y > 8$

3) $-2x + y + 4 - 2x - y > 4$

$-4x > 0$

4) $-2x + y + 4 + 2x + y > 4$

$2y > 8$

5) $2x - y + 4 - 2x - y \geq 4$

$-2y > 0$

6) ~~.....~~

$4y + y^2 - 1 = 0$

$4 - 2x - y > 0$

$4(2 - x) - y$

$y^2 - 4y + 1$

$x^2 - 2x = 0$

$D = 2^2 + 4 = 20 \Rightarrow x = 1 \quad x = 2$

$y = 1$

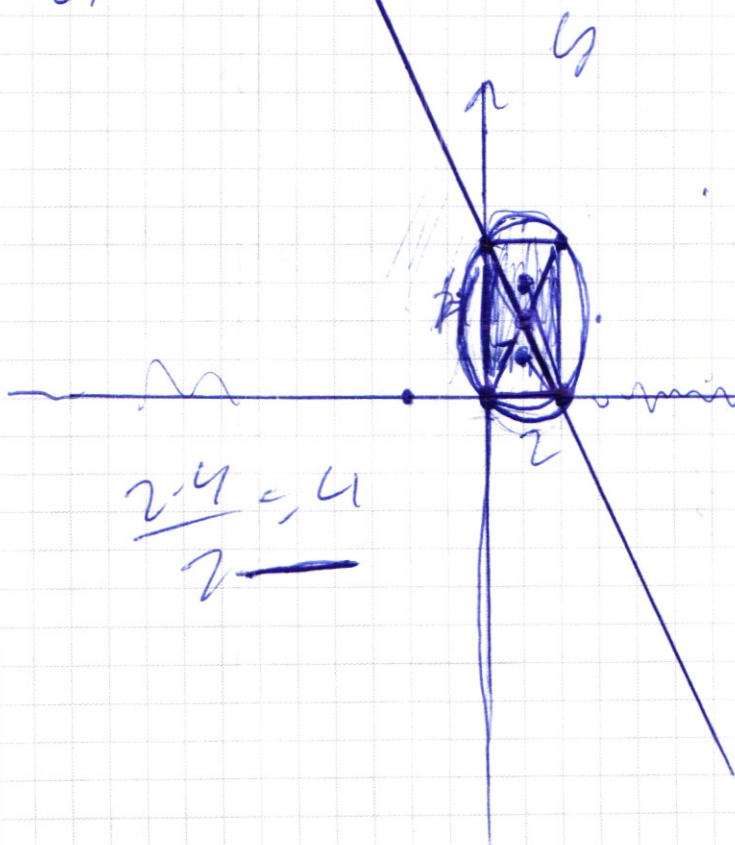
$x^2 - 2x - 4 = 0$

$9 - 6 - 8 = -5$

$D = 4 + 4 \cdot 4 = 20 + 4 = 24$

$1 - 2 - 8 + 4 = -5$

$x^2 - 2x + y^2 - 4y = 9$
 $4 + 4$



$\frac{2 \cdot 4 = 4}{2} = 2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4$$

$x > 0$

1) $2x + y + 4 - 2x - y$ ~~$x < 0$~~

2) $2x + y - 4 + 2x + y$

3) $-2x + y + 4 - 2x - y$

4) $-2x + y - 4 + 2x + y$

5)

6)

NB

$$4 - 2x - y > 0$$

$$2x + y < 4$$

7

8) $x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0$

$$|y| \geq 0 \quad |x| \geq 0 \quad |y| \geq 0 \quad |x| \geq 0$$

1) $2x + 2y + 4 - 2x - y = y + 4 > 4 \quad x, y > 0$

2) $-2x + 2y + 4 - 2x - y = y - 4x + 4 > 4 \quad x < 0, y > 0$

3) $2x - 2y + 4 - 2x - y = -3y + 4 > 4 \quad y < 0, x > 0$

4) $2x + 2y - 4 + y + 2x = 4x + 3y - 4 > 4 \quad x, y > 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2 + y^2 - 2(x - 2y)$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y \leq 0$$

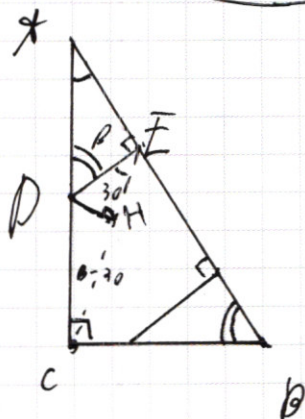
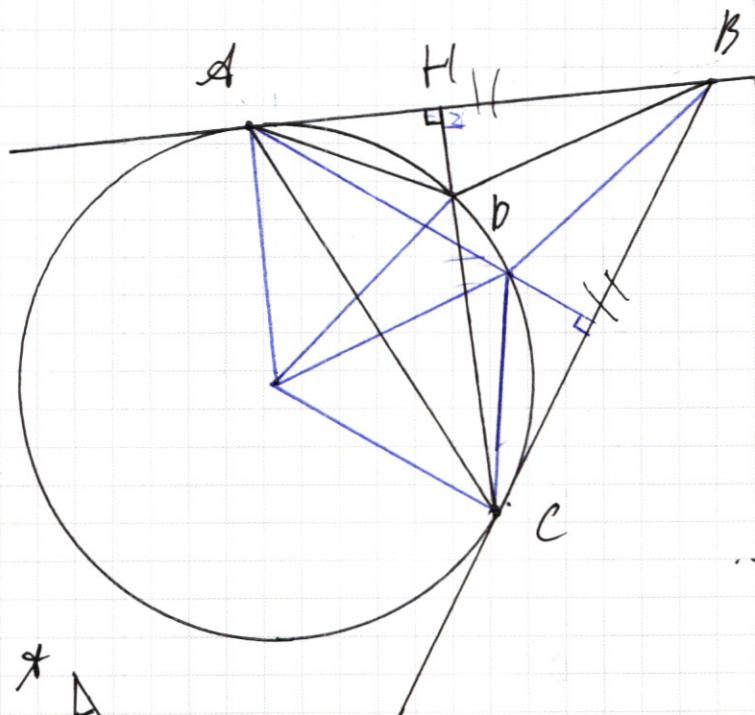
$$x(x-2) + y(y-4) \leq 0$$

$$2x \quad 1y$$

$$CH = BC \cdot \sin \angle ABC =$$

$$= AB \cdot \sin \angle ABC$$

$$\frac{AB}{CH} = \frac{1}{\sin \angle ABC}$$



$$\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AE}$$

AB

$$BC = \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot AC$$

$$AB^2 = 7 + \frac{4}{3} \cdot 7$$

$$AB^2 = \frac{7 \cdot 7}{3}$$

$$AB = 7 \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{DE}{AE} = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$f\left(x - \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

1. $(3 \cdot 2) \cdot 2 = 3 + 2 + 2 + 4$
 $\uparrow = 18$

$$x - \frac{1}{y}$$

$$\begin{array}{r} 77 \\ + 126 \\ \hline 33 \\ + 125 \\ \hline 48 \\ + 124 \end{array}$$

2. 2

$$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

0
 \uparrow
 1
 \downarrow
 0
 \downarrow
 20

2	3	4	5	6	7	8	9
\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow
2	3	4	5	6	7	8	9

$$\frac{1}{2} \rightarrow \begin{array}{r} + 243 \\ + 244 \end{array}$$

$$18 = 6 \cdot 3 = 2 + 3 + 3$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 18 \cdot 18 = \\ 18 \\ 144 \\ 18 \\ 4 \end{array}$$

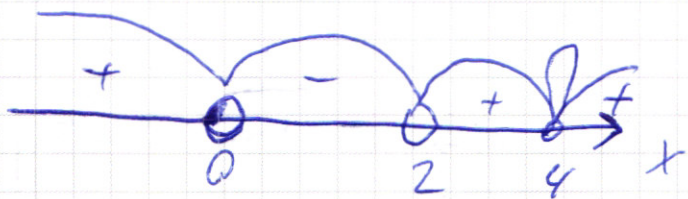
$$x^2 - 6x + 10 - 2|x - 3|$$

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 10 - 2x + 6 & x \geq 3 \\ x^2 - 6x + 10 + 2x - 6 & x < 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 16 & x \geq 3 \\ x^2 - 4x + 4 & x < 3 \end{cases} \quad 0 = 2 \cdot 9 - 2 \cdot 5^2 - 2 \cdot 9 - 9$$

$$(x^2 - 4)^2 \geq 0 \rightarrow x = 4 \rightarrow 0$$

$$(x^2 - 2)^2 \geq 0 \quad x = 2 \rightarrow 0 \quad x < 3 = \text{ок}$$



$$\begin{array}{r} 22 \\ 5 \ 5 \ 2 \\ 4 \ 4 \\ 5 \ 12 \ x \\ 5 \ 12 \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 19 \\ 5 \ 2 \ 9 \\ 0 \ 5 \\ 5 \ 2 \ 2 \\ 5 \ 17 \ x \\ 5 \ 12 \\ 2 \end{array}$$

Ответ: $x \in (0; 2) \cup \{4\}$

$$\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array} \quad \begin{array}{cc} \frac{600 - x_1}{3} & \frac{600 - x_1}{3} \cdot 2 \\ \frac{600 - x_2}{3} & \frac{600 - x_2}{3} \cdot 2 \end{array}$$

$$x_1 = \frac{600 - x_2}{3} \quad \frac{600 - x_1}{3} = \frac{600 - x_2}{3} \cdot 2$$

$$x_2 = \frac{600 - x_1}{3} \cdot 2$$

$y=1$ $y=-5$ **ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**

$$(y-1)(y+5)(y^2+y-5)=0$$

$$x+y^2=5 \quad x=5-y^2$$

$$D = 1^2 + 4 \cdot 5 = 21$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} = -0,5 \pm \sqrt{5,25}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y=1 \\ x=4 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y=-5 \\ x=-20 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y=-0,5 + \sqrt{5,25} \\ x=-0,5 + \sqrt{5,25} \end{array} \right.$$

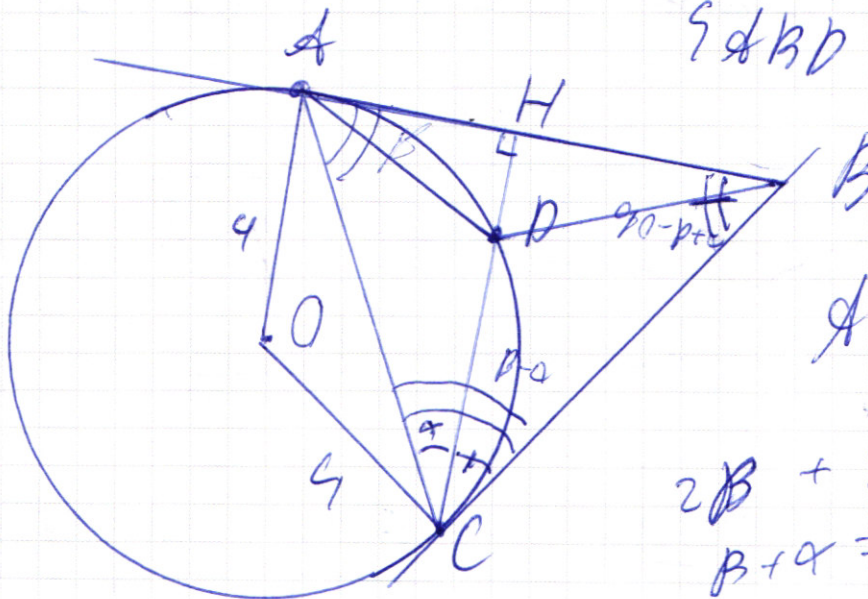
$$\left\{ \begin{array}{l} y=-0,5 - \sqrt{5,25} \\ x=-0,5 - \sqrt{5,25} \end{array} \right.$$

$$\sqrt{\frac{21}{4}} = \sqrt{5,25}$$

$$0,25 - \sqrt{5,25} + 5,25$$

$$5,5$$

$$S_{ABD} = 6$$



$$AB = CB$$

$$2\beta + 90 - \beta + \alpha = 180$$

$$\beta + \alpha = 90$$

$$\begin{cases} x^2 - 5xy + 4y^2 = 0 \\ x + y^2 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 5xy + 4y^2 = 0 \\ x = 5 - y^2 \end{cases}$$

$$(5 - y^2)^2 - 5(5 - y^2) \cdot y + 4y^2 = 0$$

$$25 - 20y^2 + y^4 - (25y - 5y^3) + 4y^2 = 0$$

$$25 - 20y^2 + y^4 - 25y + 5y^3 + 4y^2 = 0$$

$$y^4 + 5y^3 - 6y^2 - 25y + 25 = 0$$

	1	5	-6	-25	25	1
2	1	6	0	$-25(5 - y^2) - 25y - 5$	$(5 - y^2 - 4y - 25y - 5)$	$(y - 1)$
				$(-5y^2 + 25y - 25)$	$(-5y^2 + 25y - 25)$	

$$\begin{array}{r} y^4 + 5y^3 - 6y^2 - 25y + 25 \\ - y^4 - 1y^3 \\ \hline -6y^3 - 6y^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} y - 1 \\ \hline 1y^3 + 6y^2 \end{array}$$

1 5 25

$$y^3 + 6y^2 + 0y - 25 = 0$$

$$\rightarrow D = 1 + 4 \cdot 6 \cdot (-25)$$

$$(y - 1)(y^3 + 6y^2 + 25) = 0$$

$$1 \cdot 25 + 6 \cdot 25 - 25$$

$$-1 \cdot 25 + 25$$

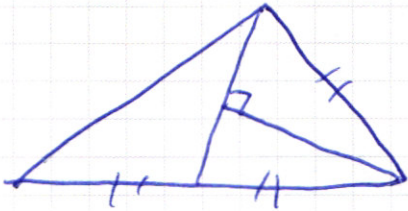
	1	6	0	-25
-5	1	1	-5	100

$$\begin{array}{r} y^3 + 6y^2 + 25 \\ - y^3 + 5y^2 \\ \hline 1y^2 - 25 \\ - y^2 + 5y \\ \hline 5y - 25 \end{array}$$

$$(y - 1)(y + 5)(y^2 + y - 5) = 0$$

$$-5y - 25$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$y \in \mathbb{N}$$

$$y : 3$$

$$y < 300 \quad y > 0$$

$$150 < y < 300$$

$$y : 3$$

$$0 < \frac{600-y}{3} + y$$

$$0 < \frac{600+2y}{3}$$

$$\frac{600-y}{3} \cdot 2 < \frac{600-y}{3} + y$$

$$300 - 250 = 250$$

$$\frac{250}{3} = 50 - 1 \rightarrow$$

$$\frac{600-y}{3} < y$$

Ответ: 49

$$600 - y < 3y$$

$$600 < 4y$$

$$150 < y$$

$$y > 250$$

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - 2y)^2 = xy \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy$$

$$x + y^2 = 5$$

$$x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|$$

$$x(2x-4) + (x-2)(2-x)$$

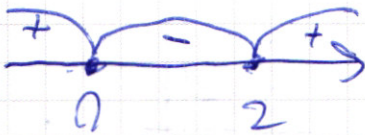
$$\begin{aligned} 2x - 009 &= 4x \\ 4x - 009 &= 2x \\ \frac{3}{4x - 009} &= 2x \end{aligned}$$

$$2x^2 - 4x < 0$$

$$x^2 - 2x < 0$$

$$\frac{3}{2x - 009} = 2x$$

$$x(x-2) \quad x=0 \quad x=2$$



$$0 \leq x \leq 4 \Rightarrow 600 = 4x$$

$$0 - 2 \quad 4x + 009 - 009 = 4x -$$

$$|x| \cdot |x-2|$$

$$4x - 009 = 2x$$

$$2x(x-2) \neq x \cdot (2-x)$$

$$(2(x-2) + (2-x))x$$

$$2x^2 - 009 = 2x -$$

$$(2x - 4 + 2 - x) \cdot x \quad 2 \cdot (2x - 009) = 2x - 009$$

$$(x-2) \cdot x$$

$$009 = 2x + 2x$$

$$2x^2 - 4x + |x| \cdot |x-2| = 0$$

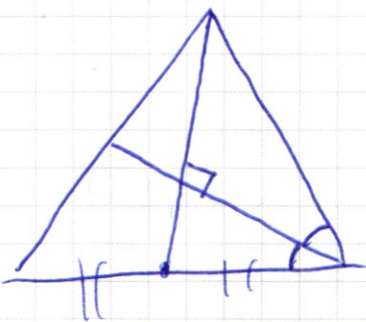
$$2x(x-2) + |x| \cdot |x-2| \rightarrow \text{умно}$$

$$0, 2$$

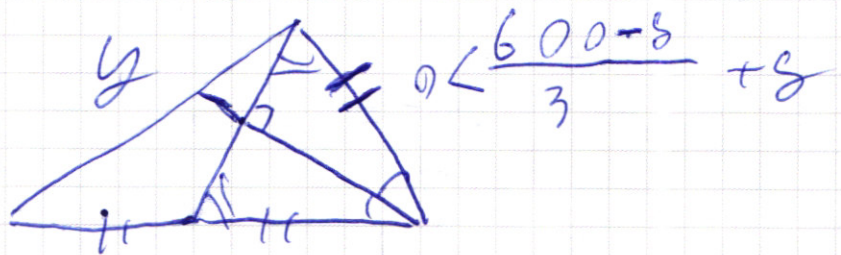
$$x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|$$

$$(x^2 - 2x + 1) - 4x + 9 - 2|x-3|$$

$$(x+1)^2$$



$$\frac{600-y}{3} < \frac{600-y}{3} \cdot 2 + y$$



$$y < 3$$

$$y$$

$$\frac{600-y}{3}$$

$$\frac{600-y}{3} \cdot 2$$

$$y < 600 - y$$

$$2y < 600$$

$$y < 300$$

$$y > 0$$

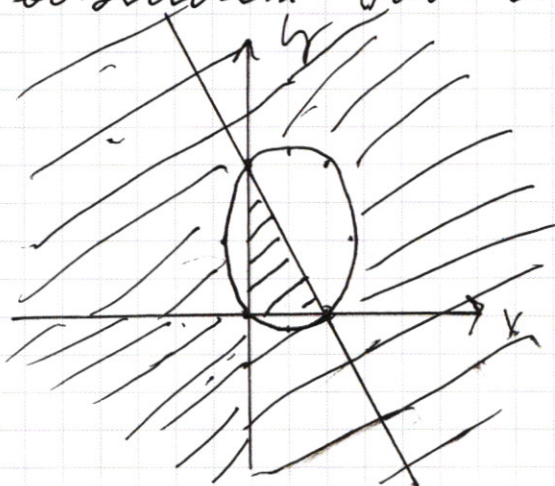


черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0$ Данное неравенство
выделяет область являющуюся эллипсом.



Площадь обрезанной площади
эллипса заданного уравне-
нием $x^2 - 2x - 4y + y^2$, и
вычислить площадь сектора,
который не является
решением первого нерав-

енства. Заметим, что при $x < 0$ и $y < 0$
 $x^2 - 2x - 4y + y^2 > 0$, а значит эллипс не
пересекает сектор $x < 0$ и $y < 0$, также
заметим, что точки $(0; 0)$; $(2; 0)$; $(0; 4)$;
 $(2; 4)$ лежат на границе этого эллипса,
а значит сектор $x \geq 0$ $y \geq 0$ $4 - 2x - y \geq 4$
полностью лежит внутри эллипса.

Найдём площадь сектора и эллипса

$$\text{Площадь сектора: } S_c = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4$$

Площадь эллипса:

$$S_e = \int_0^2 2 \sqrt{16 - 4(x^2 - 2x)} \cdot dx =$$

$$\text{Ответ: } S_c - S_e = \quad - 4 =$$

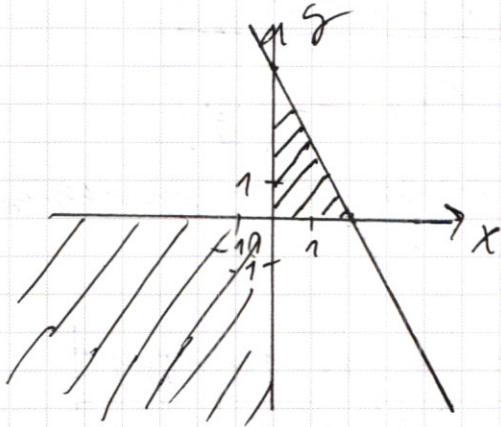
Ответ: $N = 745$ пар x, y , таких, что $f(x/y) < 0$

Задача №6

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x + y| > 4 \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим первое неравенство, его решения будут представлены в секторах плоскости. Пункты на этих секторах имеют координаты $2x = 0; y = 0$

$$4 - 2x - y = 0$$



Для построения модели и для каждого из секторов преобразуем неравенство тогда определим ^{сумма} ~~сумма~~ выполнение решений.

	$4 - 2x - y \geq 0$	$4 - 2x - y < 0$
$x \geq 0, y \geq 0$	\emptyset	$4x + 2y > 8$
$x < 0, y \geq 0$	$-4x > 0$	$2y > 8$
$x \geq 0, y < 0$	$-2y > 0$	$4x > 8$
$x < 0, y < 0$	$-4x - 2y > 0$	\emptyset

Заметим, что все сектора, кроме

$$\{x \geq 0, y \geq 0, 4 - 2x - y \geq 0\}; \{x < 0, y < 0, 4x + 2y > 8\}$$

являются областями решений неравенств.

Отметим невидимую ^{решений} область на

заданной структуре. Рассмотрим второе неравенство:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) рассмотрим $f(1)$, ~~это может быть так же можно~~
представить, как $f(\frac{x}{x})$, где x - любое натуральное
целое число. и т.к. $f(1) = 0$, то и
 $f(\frac{x}{x}) = 0$, кроме того $f(\frac{x}{x}) = f(x \cdot \frac{1}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x})$
 $f(1) = 0 = f(x) + f(\frac{1}{x}) \rightarrow \underline{f(\frac{1}{x}) = -f(x)}$

4) Таким образом $f(x/y) = f(x) - f(y)$

5) Найдем значение $f(x)$, для всех натуральных
 x , которые $1 \leq x \leq 18$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$f(x)$	0	2	3	4	5	5	7	6	6	7	11	7	13	9	8	8

x	17	18
$f(x)$	17	8

Теперь для каждого значения $f(x)$,
рассчитаем количество n - количе-
ство x , y которые ~~такие же~~ ^{имеют} ~~равны~~ ^{равны} $f(x)$

$f(x)$	0	2	3	4	5	6	7	8	9	11	13	17
n	1	1	1	1	2	2	3	3	1	1	1	1

$f(x/y) < 0$, при $f(x) < f(y)$, считаем
такое количество пар

$$N = 1 \cdot 17 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 15 + 1 \cdot 14 + 2 \cdot 12 + 2 \cdot 10 +$$

$$+ 3 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 + 0 =$$

$$= 17 + 16 + 15 + 14 + 24 + 20 + 21 + 12 + 3 + 2 + 1 =$$

$$= 149$$

Найдем решения системы:

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 5 - y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -5 \\ x = 5 - y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -5 \\ x = -20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -0,5 - \sqrt{5,25} \\ x = 5 - y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -0,5 - \sqrt{5,25} \\ x = 5 - (0,25 + \sqrt{5,25} + 5,25) = -0,5 - \sqrt{5,25} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -0,5 + \sqrt{5,25} \\ x = 5 - y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -0,5 + \sqrt{5,25} \\ x = 5 - (0,25 - \sqrt{5,25} + 5,25) = -0,5 + \sqrt{5,25} \end{cases}$$

Ответ: $(4; 1)$; $(-20; -5)$; $(-0,5 - \sqrt{5,25}; -0,5 - \sqrt{5,25})$;
 $(-0,5 + \sqrt{5,25}; -0,5 + \sqrt{5,25})$.

Задача № 7

Рассмотрим функцию f более детально:

1) $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$, мы заметили a на 1:

$$f(b) = f(1) + f(b) \Rightarrow f(1) = 0.$$

2) т.к. $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$, представим a как $c \cdot d$,
тогда: $f(a \cdot b) = f(c \cdot d) + f(b) = f(c \cdot d) + f(b) =$

$$= f(c) + f(d) + f(b) = \dots, \text{ а поскольку } f$$

можно разлагать на множители мы можем
только за простыми числами, то

$$f(x) = f(p_1) + f(p_2) + \dots + f(p_n) \text{ где } p_1 - p_n \text{ простые}$$

числа, при разложении запятой x , а т.к.

$$f(p) = p, \text{ где } p - \text{ простое, то и:}$$

$$f(x) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 \dots. \text{ Упрощая запись}$$

$f(x)$ равно сумме простых множителей числа x .

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} (5-y^2)^2 - 5(5-y^2) \cdot y + 4y^2 = 0 \\ x = 5 - y^2 \end{cases}$$

Решим уравнение ~~уравнение~~.

$$(5-y^2)^2 - 5(5-y^2) \cdot y + 4y^2 = 0$$

Заметим, что оно не совсем квадрат разности
добавим и отнимем $2,25y^2$

$$(5-y^2)^2 - 5(5-y^2) \cdot y + 6,25y^2 - 2,25y^2 = 0$$

Вернем квадрат разности:

$$(5-y^2-2,5y)^2 - 2,25y^2 = 0$$

Разложим квадрат суммы разности квадратов:

$$(5-y^2-2,5y-1,5y)(5-y^2-2,5y+1,5y) = 0$$

$$(5-y^2-4y)(5-y^2-y) = 0$$

$$(y^2+4y-5)(y^2+y-5) = 0$$

Решим линейные корни этого разпадающегося
уравнения:

$$y^2 + 4y - 5 = 0$$

По Т. обратной Т. Виета:

$$y_1 + y_2 = -4 \quad y_1 \cdot y_2 = -5 \quad y_1 = -1 \quad y_2 = -5$$

$$y^2 + y - 5 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 5 = 21 \quad y = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$y_3 = -0,5 - \sqrt{5,25} \quad y_4 = -0,5 + \sqrt{5,25}$$

решим эту систему:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{600 - x_2}{3} \cdot 2 \\ x_2 = \frac{600 - x_1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 = 1200 - 2x_2 \\ x_2 = 600 - 3x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 = 1200 - 2x_2 \\ 2x_2 = 600 - x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3(600 - 3x_2) = 1200 - 2x_2 \\ x_1 = 600 - 3x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1800 - 3x_2 = 1200 - 2x_2 \\ x_2 = 600 - 3x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} 600 - x_2 = 0 \\ x_2 = 600 - 3x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{600 - x_2}{3} \cdot 2 \\ x_2 = \frac{600 - x_1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 = 1200 - 2x_2 \\ 3x_2 = 600 - x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 = 1200 - 2x_2 \\ x_1 = 600 - 3x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3 \cdot (600 - 3x_2) = 1200 - 2x_2 \\ x_1 = 600 - 3x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1800 - 9x_2 = 1200 - 2x_2 \\ x_2 = 600 - 3x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} 600 = 7x_2 \\ x_1 = 600 - 3x_2 \end{cases}$$

$x_2 = \frac{600}{7} \rightarrow$ не является целым, но переменная целая, а значит таких двух треугольников не существует.

7) Т.к. x задает треугольник, то различных треугольников будет столько, сколько различных $x = 49$

Ответ: 49

Задача №3

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \quad | \uparrow \\ x + y^2 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} (x - 2y)^2 = (\sqrt{xy})^2 \\ x + y^2 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 = xy \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 5xy + 4y^2 = 0 \\ x = 5 - y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} (5 - y^2)^2 - 5(5 - y^2) \cdot y + 4y^2 = 0 \\ x = 5 - y^2 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) Таким образом мы имеем следующую
ограничения на x :

$$250 < x < 300 \quad x : 3$$

Найдём количество таких x , не забывая уч-
сть, что 300 не входит
в число.

$$\frac{300 - 250}{3} - 1 = 49$$

6) ~~Т.к. x задаёт только треугольник, то~~

~~и различное количество будет 49~~

Выполним проверку на то, что не
существует таких треугольников, у
которых разные x , но они равны:

предь есть x_1 и x_2 , при этом $x_1 \neq x_2$,
что бы каждое было равноугольным и третья
сторона была равна, то

$$x_1 = \frac{600 - x_2}{3} \cdot 2 \quad x_2 = \frac{600 - x_1}{3}$$

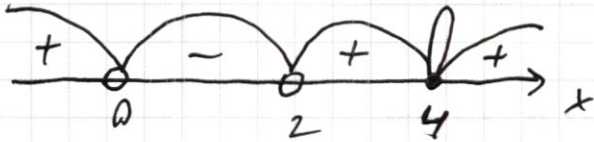
Если поменять x_1 и x_2 местами то

эти выражения не изменятся, а три
сторон будут равны сторонам, будет
верно, то /

$$x_1 = x_2 \quad \text{или} \quad \frac{600 - x_2}{3} = \frac{600 - x_1}{3} \quad \text{или} \quad \frac{600 - x_2}{3} \cdot 2 = \frac{600 - x_1}{3}$$

что противоречит утверждению $x_1 \neq x_2$

Положительные корни на ось:

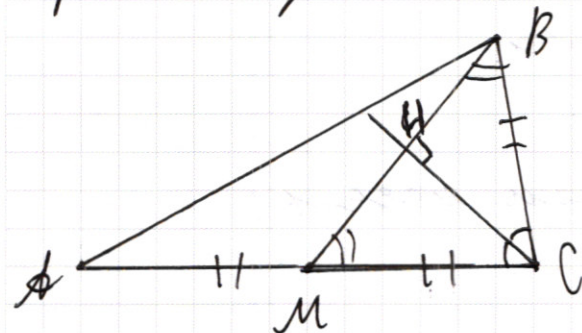


Положительные образы: $x \in (0; 2) \cup \{4\}$

Ответ: $x \in (0; 2) \cup \{4\}$

Задача №2

рассмотрим такой треугольник ABC , в



котором пересеклись
 две трапеции $AMCH$
 медиана BM и биссектриса CH .

1) Т.к. CH - биссектриса и $CH \perp MB \rightarrow \Delta MBC$ - равнобедренный $\rightarrow MC = CB = AM$

2) Пусть сторона AB будет длиной x , тогда
 $AC = \frac{600-x}{3} \cdot 2$ $BC = \frac{600-x}{3}$

3) Чтобы существовал такой треугольник, должно выполняться неравенство треугольника, и что бы все стороны были целочисленными, то x должно делиться на 3, т.к. в противном случае сторона BC и AC не будет целочисленной.

$$4) x < \frac{600-x}{3} + \frac{600-x}{3} \cdot 2 \rightarrow x < 600-x \rightarrow x < 300$$

$$\frac{600-x}{3} < x + \frac{600-x}{3} \cdot 2 \rightarrow 0 < \frac{600-x}{3} + x$$

$$\frac{600-x}{3} \cdot 2 < x + \frac{600-x}{3} \rightarrow \frac{600-x}{3} < x \rightarrow 600 < 4x \rightarrow 150 < x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 1

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x-2|} \leq 0$$

Воспользуемся методом интервалов для решения этого неравенства:

Найдём нули числителя:

$$x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|, \text{ раскроем модуль:}$$

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 10 - 2x + 6, & \text{при } x-3 \geq 0 \\ x^2 - 6x + 10 + 2x - 6, & \text{при } x-3 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 16, & \text{при } x \geq 3 \\ x^2 - 4x + 4, & \text{при } x < 3 \end{cases} \begin{cases} (x-4)^2, & \text{при } x \geq 3 \\ (x-2)^2, & \text{при } x < 3 \end{cases}$$

$(x-4)^2 \geq 0$ $(x-2)^2 \geq 0$ - не забудем это учесть при нахождении интервалов.

$$(x-2)^2 = 0 \quad x=2, \text{ при } x < 3 - \text{противоречие}$$

$$(x-4)^2 = 0 \quad x=4, \text{ при } x \geq 3$$

Найдём нули знаменателя

$$2x^2 - 4x + |x| \cdot |x-2| = 2x(x-2) + |x| \cdot |x-2|$$

Заметим, что произведения содержатся равные числа по модулю, знаки равны по модулю

$$2|x(x-2)| = |x| \cdot |x-2|, \text{ при этом } |x| \cdot |x-2| > 0$$

$$\text{тогда } 2x(x-2) + |x| \cdot |x-2| = 0, \text{ при } x \geq 0 \quad x=2.$$

»