МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 16 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\left(\frac{(x-1)^2+9}{|x-1|}-6\right)(|x-3|+|x|-3) \leqslant 0.$$

2. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2-16y^2}=32, \\ 4y+\sqrt{x^2-16y^2}=23. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках M и N соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника AMN, касается стороны AB в точке A. Найдите радиус окружности, угол ACB и площадь треугольника ABN, если известно, что $AB=\sqrt{5}$, $BM=2$.

4. [5 баллов] Вписанная окружность остроугольного треугольника ABC касается сторон AC и AB в точках E и D. Точка Y – основание перпендикуляра, опущенного из точки E на AB, а X – вторая точка пересечения EY со вписанной окружностью треугольника ABC. Найдите радиус этой окружности, если площадь треугольника AXD равна 5, а $2AD=3EY$.

5. [5 баллов] На доске выписано $6n$ последовательных натуральных чисел ($n \in \mathbb{N}$). Из них выбираются три попарно различных числа, среди которых ровно одно кратно 2 и ровно одно кратно 3. Известно, что можно составить ровно 5 900 таких троек. Чему равно n?

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} 4y+7x \geqslant |4y-7x|, \\ y \leqslant -3x+15, \\ x^2-10y+y^2+15 \geqslant 0 \end{cases}$$

7. [5 баллов] Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые две последовательные степени числа десять равна 1356.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Внутри ряда из 6 посл. чисел есть одно кратное 6, одно число кратное 3, но не кратное шести $(6n+3)$, и два кратных 2, но не кратных 6 $(6n+2, 6n+4)$ и 2 числа не кратных 6, 2 или 3.

1) Пусть мы сначала выбрали число кратное 6, тогда остальные 2 числа должны быть не кратны ни 2, ни 3, у нас $2n$ таких чисел (в каждой группе по 2). Тогда кол-во способов так сделать это

$$n \cdot C_{2n}^{2}$$

2) Пусть мы сначала выбрали два числа, одно вида $6n+3$, другое $6n+2$ или $6n+4$, а последнее не кратное 2 и 3. Тогда кол-во способов так сделать

$$n \cdot \cancel{2n} \cdot 2n$$

$$n + n + 2n + 2n + C_{2n}^{2} = 5800$$

$$6n + \frac{(2n)!}{2!(2n-2)!} = 5800$$

$$6n + \frac{(2n)(2n-1)}{2} = 5800$$

$$6n + n(2n-1) = 5800$$

$2n \cdot n \cdot 2n + n(2n-1)(2n) =$

$= 5800 = 8n^3 - 2n^2$

$2900 = 4n^3 - n^2 = n^2(4n-1)$.

$n^2(4n-1)$ либо $\vdots 4$

$n^2(4n-1) \not\vdots 2$

Ответ: ~~0~~ ВТФ, такого не может быть

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№5

$4y+7x \geqslant |4y-7x| \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0,\ 4y \geqslant 7x \\ y \geqslant 0,\ 4y \leqslant 7x \end{cases}$

$l_1: 3x+y-15=0$

$l_2: 7x-4y=0$

$C(0;5)$

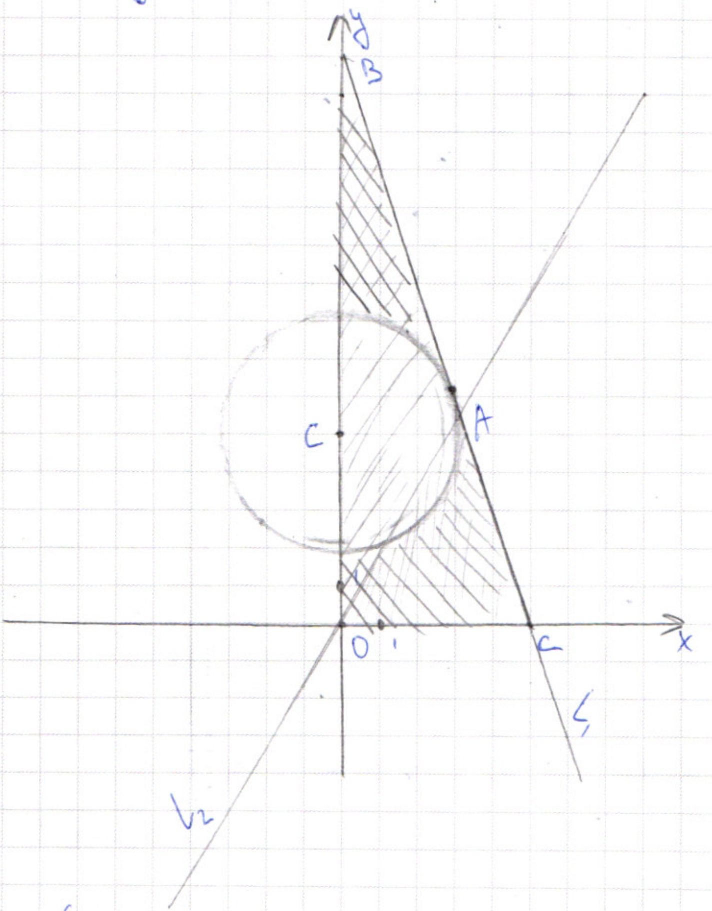
$x^2-10y+y^2+15 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-0)^2+(y-5)^2 \geqslant 10$

$\rho(C, l_2) > \sqrt{10}$

$\rho(C, l_1) = \frac{|3\cdot 0+1\cdot 5-15|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \sqrt{10}$,

l_1 — касательная окружности ω;

$\omega: (x-0)^2+(y-5)^2=10$



$S_{\#} = S_{OCB} - \frac{S_\omega}{2} = \frac{15\cdot 5}{2} - \frac{\cancel{?}10\pi}{2} =$

$= 37{,}5 - 5\pi$

7, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, 11, ~~12~~

№7

$\overline{abcdef} \equiv \overline{abcdef} \pmod{10^6} > 1356$, т.к. $a \neq 0$

1) $\begin{cases} \overline{abcdef} \equiv \overline{bcdef} \\ \overline{abcdef} \underset{10^4}{\equiv} \overline{cdef} \end{cases}$; $\overline{bcdef}+\overline{cdef}=1356$, ~~b~~ $b=0$, ~~или~~ ~~иначе много~~ иначе много

~~!!! b=1 =>~~

$2\overline{cdef}=1356$, $\overline{cdef}=678$: ~~9 вариантов~~

такого не может быть: ~~$\overline{*0678}$~~

2) $\begin{cases} \overline{abcdef} \equiv \overline{cdef} \pmod{10^4} \\ \overline{abcdef} \equiv \overline{def} \pmod{10^3} \end{cases}$; $\overline{cdef}+\overline{def}=1356$, если $c=1$, то

$2\overline{def}=356$, $\overline{def}=178$ $\overline{**1178}$

90 вар.

если $c=0$, то $2\overline{def}=1356$, $\overline{def}=678$. $\overline{**0678}$ 90 вар.

$\boxed{999+99<1356, \text{ нет нужно рассматривать другие степени}}$

Ответ: 180 вар.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

8) $DX = \sqrt{DY^2 + \cancel{Y}x^2} = \sqrt{70-48\sqrt{5}}\,x$

$Dk = DE : 2 = \frac{\sqrt{DY^2+EY^2}}{2} = \frac{\sqrt{18-6\sqrt{5}}}{2}\,x$

$\cancel{BY}\ DO = x\,\frac{\sqrt{(70-48\sqrt{5})(18-6\sqrt{5})}}{\cancel{4}\,3-\sqrt{5}} = x\sqrt{\frac{420-288\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} = V$

9) $S_{AMN} = AD\cdot\frac{XY}{2} = \cancel{3x\cdot 10}$

$AD\cdot XY = 10$

$3x\cdot(\cancel{7}-3\sqrt{5})x = 10$, $x > 0$

$\cancel{x = \sqrt{\frac{10}{\frac{21-9\sqrt{5}}{3-3\sqrt{5}}}}}$ $x = \sqrt{\frac{10}{21-9\sqrt{5}}}$

10) $V = \sqrt{\frac{4200-2880\sqrt{5}}{(3-\sqrt{5})(21-9\sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{1050-720\sqrt{5}}{27-12\sqrt{5}}}$

№2

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 16y^2} = 32 \\ 4y + \sqrt{x^2 - 16y^2} = 23 \end{cases} \qquad x^2 \geq 16y^2$$

$x - 4y = 9$; $x = 4y + 9$

$4y + 9 + \sqrt{(4y+9)^2 - (4y)^2} = 32$

$4y + \sqrt{9(8y+9)} = 23$

$9(8y+9) = (23-4y)^2$, ~~$23 \geq 4y$~~ $23 \geq 4y$

$y^2 - 16y + 28 = 0$

$(y-2)(y-14) = 0$

1) $y = 2$

$x = 4 \cdot 2 + 9 = 17$

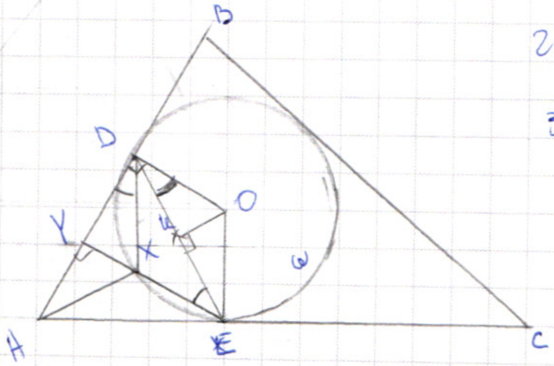
$17^2 \geq 16^2 \cdot 2$

2) $y = 14$, не подходит

~~$x = 4 \cdot 14 + 9 = 65$~~

Ответ: $(17; 2)$

№4



1) $AD = AE = 3x$, $EY = 2x$

2) $AY = \sqrt{5}x \Leftarrow \triangle AYE$, $AY \perp EY$

3) $pow(Y, \omega) = YD^2 = YX \cdot YE \Rightarrow$

$\Rightarrow YX = \frac{YD^2}{YE} = \frac{(AD - AY)^2}{YE} =$

$= (7 - 3\sqrt{5})x$

4) $\angle XED = \angle ADX$, иссл. и хорд

5) $YE \perp AD$, $OD \perp AD \Rightarrow YE \parallel OD \Rightarrow \angle XED = \angle ODE$

6) ~~$\triangle DYX \sim \triangle D$~~ $K \in DE$: $OK \perp DE \Rightarrow DK = KE$

7) $\triangle DYX \sim \triangle DKO \Rightarrow \frac{DY}{DX} = \frac{DK}{DO} \Rightarrow DO = \frac{DX \cdot DK}{DY} = r$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Рассмотрим первую скобку и сравним с нулём

$$\left(\frac{|x-1|^2+9}{|x-1|}-6\right) \vee 0, \quad x \neq 1 \quad \cancel{x+} \quad \sqrt{p^2} = |p|$$

$$\left(\frac{(x-1)^2+9}{\sqrt{(x-1)^2}}-6\right) \vee 0 \qquad (x-1)^2 \longrightarrow t$$

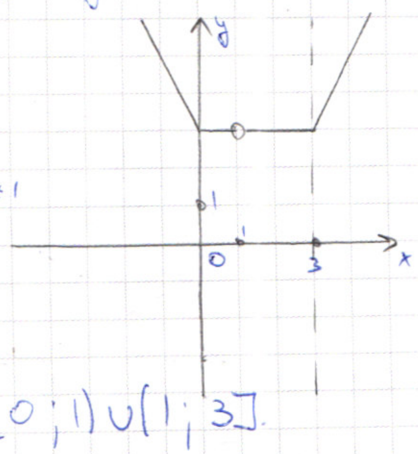
$$\frac{t+9}{\sqrt{t}}-6 \vee 0 \qquad \sqrt{t} > 0$$

$$t+9-6\sqrt{t} \vee 0$$

$(\sqrt{t}-3)^2 \geq 0$, т.е. первая скобка всегда неотрицательна, тогда чтобы выполнялось неравенство второе должно быть неположительно.

$$(|x-3|+|x|-3) \leq 0$$

$$|x-3|+|x| \leq 3, \quad F(x) = |x-3|+|x|, x \neq 1$$



по графику видно что нам подходит $[0;1) \cup (1;3]$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{(x-1)^2+9}{\sqrt{(x-1)^2}}-6\right)\left(|x-3|+|x|-3\right)\le 0$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}A\ge 0\\ B\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}A\le 0\\ B\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$t=(x-1)^2$

$t\ge 0$

① $\frac{t+9}{\sqrt{t}}-6\ge 0$

$t+9-6\sqrt{t}\ge 0$

$t-2\cdot 3\cdot\sqrt{t}+9\ge 0$

$(\sqrt{t}-3)^2\ge 0$

② $|x-3|+|x|-3\le 0 \Leftrightarrow$

$|x-3|$: $-$ 0 $-$ 3 $+$

$|x|$: $-$ 0 $+$ 3 $+$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-(x-3)-x-3\le 0, & x\le 0\\ -(x-3)+x-3\le 0, & x\in[0;3]\\ (x-3)+x-3\le 0, & x\ge 3\end{cases}$$

$-2x\le 0$, $x\in\varnothing$

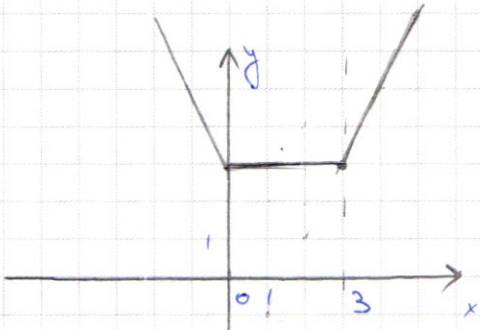
$-(x-3)+x-3\le 0$

$0\le 0$ $x\in\mathbb{R}$

$2x-6\le 0$

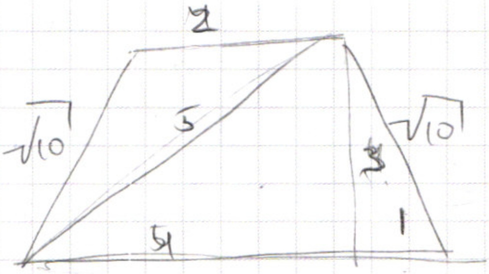
$x\le 3$

$f(x) = |x-3| + |x| \leq 3$



$\cancel{29 = 10+10}$

$50 = 20 + \cancel{4} + 26$



$x - 4y = 9$

$25 = 4^2 + \cancel{2^2 + 10 + 10}$ $\quad$ $\cancel{30 = 2(8+10}$

$$4y + \sqrt{x^2 - 16y^2} = 23$$

$$4y + \sqrt{9(8y+9)} = 23$$

$$4y + 3\sqrt{8y+9} = 23$$

$$9(8y+9) = 23^2 + (4y)^2 - 2 \cdot 23 \cdot 4y = 23^2 + 16y^2 - 184y$$

$$72y + 81 = 16y^2 - 184y + 23^2$$

$$16y^2 - 256y + (23-9)(23+9) = 0$$

$$16y^2 - 256y + 14 \cdot 32 = 0$$

$$y^2 - 16y + 28 = 0$$

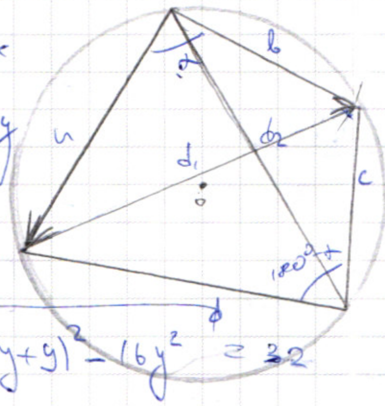
$$(y-2)(y-14) = 0$$

$x^2 \geq 16y^2$

$$\begin{cases} x + \sqrt{(x-4y)(x+4y)} = 32 \\ 4y + \sqrt{(x-4y)(x+4y)} = 23 \end{cases}$$

$A = 32 - x$

$A = 23 - 4y$



$x - 4y = 9$

$x = 4y + 9$

$$4y + 9 + \sqrt{(4y+9)^2 - 16y^2} = 32$$

$\cancel{4y + 9 + \sqrt{(9-12y)(20}}$

$$4y + 9 + \sqrt{9(8y+9)} = 32$$

$$4y + 3\sqrt{8y+9} = 23$$

$$3\sqrt{8y+9} = 23 - 4y$$

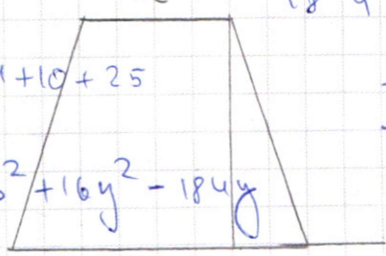
$$9(8y+8) = 23^2 - 2 \cdot 4y \cdot 23 + 16y^2$$

$25 + \sqrt{25^2 - 16 \cdot 4} = 2$

$= 25 +$

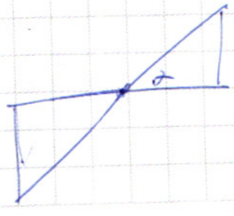
$25 =$

$\times \frac{23}{8}$, 184



$27 + 25 = 10 + 4 + 10 + 25$

$+ \frac{184}{72}$, 256



$d_1 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$

$d_2 = d^2 + c^2 - 2dc\cos(180° - \alpha)$

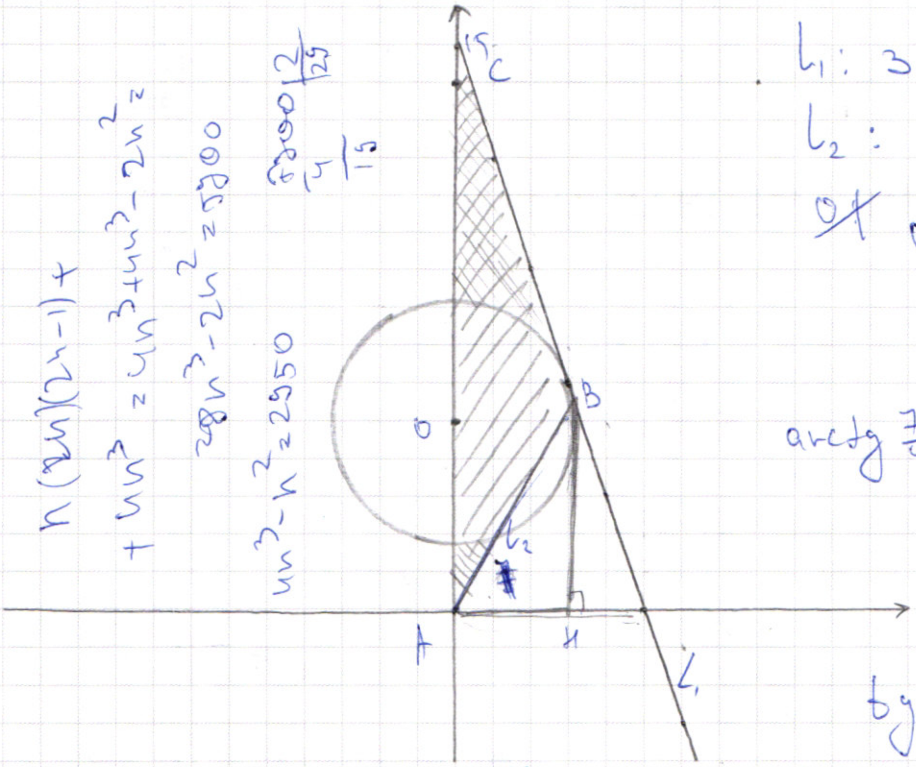
$y = 2$, $x = 25$

65

$\cancel{2d_1 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2(ab +}$

☑ черновик $\quad$ ☐ чистовик $\quad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\quad$ (Нумеровать только чистовики)



$l_1:\ 3x + y - 15 = 0$

$l_2:\ 7x - 4y = 0$

$\rho(O, l_1) = \frac{|3\cdot 0 + 1\cdot 5 - 15|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

$\operatorname{arctg} \frac{7}{4}$

$n(2n)(2n-1) + 4n^3 = 4n^3 + 4n^3 - 2n^2 =$

$8n^3 - 2n^2 = 5900$

$4n^3 - n^2 = 2950$

$tg\,\alpha = \frac{7}{4}$

$\frac{\frac{BH}{AH}}{x} = BH$

$n\,2n\cdot 2n + n(2n)(2n-1) =$

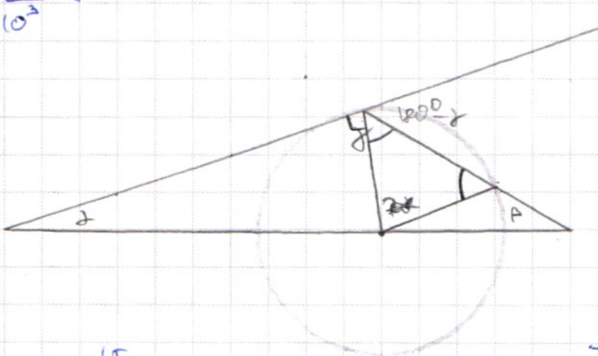
$2n^2(2n + 2n - 1) =$

$= 8n^3 - 2n^2 = 5900$

abcdef

cbcdef

$4\cdot 20^3 - 20^2 =$



$n^2(4n-1) = 2950$

$S_{ABC} = \int_0^{15} 3x - 15 = \frac{15\cdot 5}{2} -$

$\frac{60}{19}$

$\begin{cases} y = 15 - 3x \\ 4y = 7x \end{cases}$

$3x + y - 15 = 7x - 4y$

$5y = 4x + 15$

$7x - 60 + 12x = 0$

$19x = 60$

$x = \frac{60}{19}$

$y = 15 - \frac{180}{19} = \frac{285 - 180}{19} = \frac{105}{19}$

$2950 \,|\, 4$

18^2

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

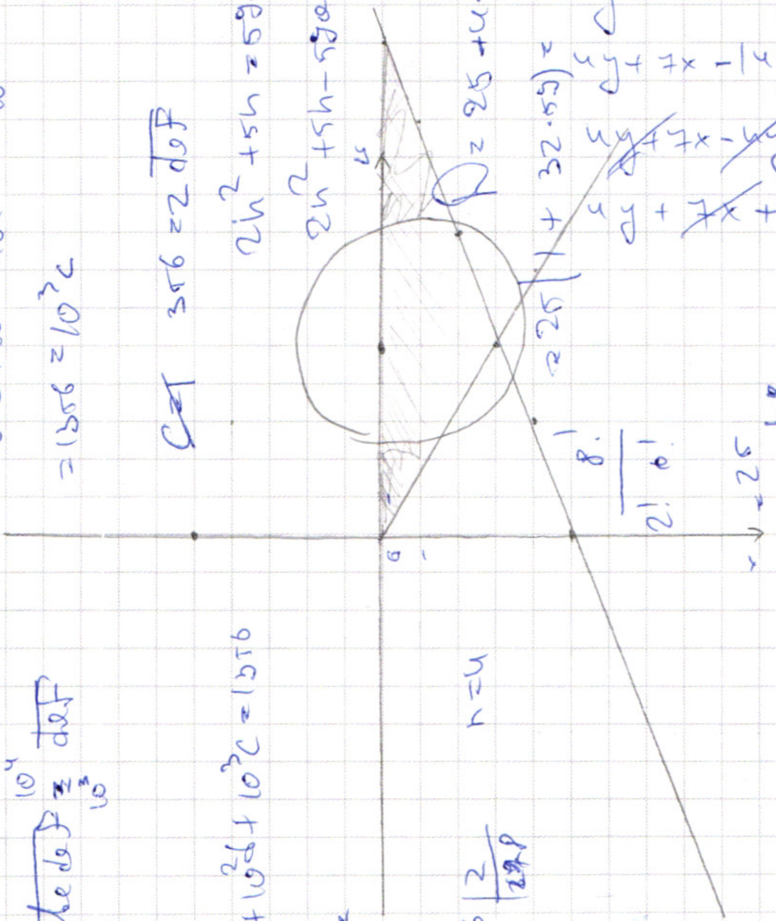
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$4y + 7x \geq |4y - 7x|$

$4y + 7x - |4y - 7x| \geq 0$

$4y + 7x - 4y + 7x \geq 0$

$4y + \cancel{7x} + 4y - \cancel{7x} \geq 0$

$y \geq \frac{7}{4}x$

$x^2 - 10y + y^2 + 15 \geq 0$

$y^2 - 10y + 25 - 25 + x^2 + 15 \geq 0$

$(y-5)^2 + x^2 \geq (\sqrt{10})^2$

$y = \frac{7}{4}x$

$4y - 7x + 0 = 0$

$\frac{4\cdot5 - 7\cdot0 + 0}{\sqrt{4^2+7^2}} = \frac{20}{\sqrt{65}}$

$\frac{20}{\sqrt{65}} < \sqrt{10}$

$400 < 650$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

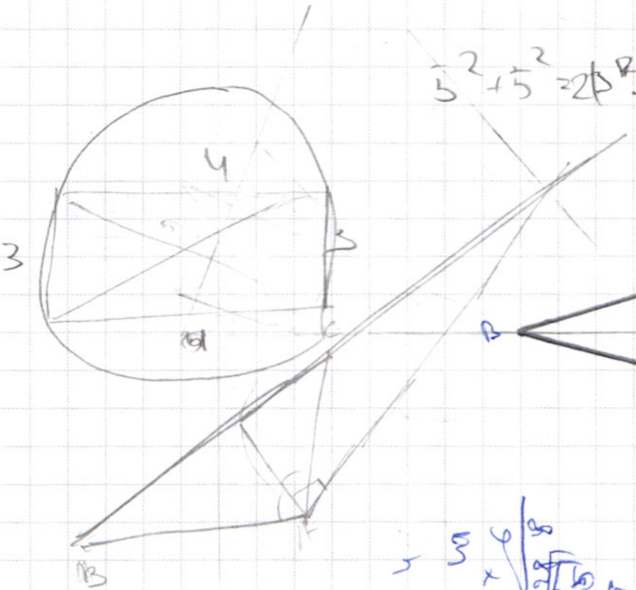
ШИФР

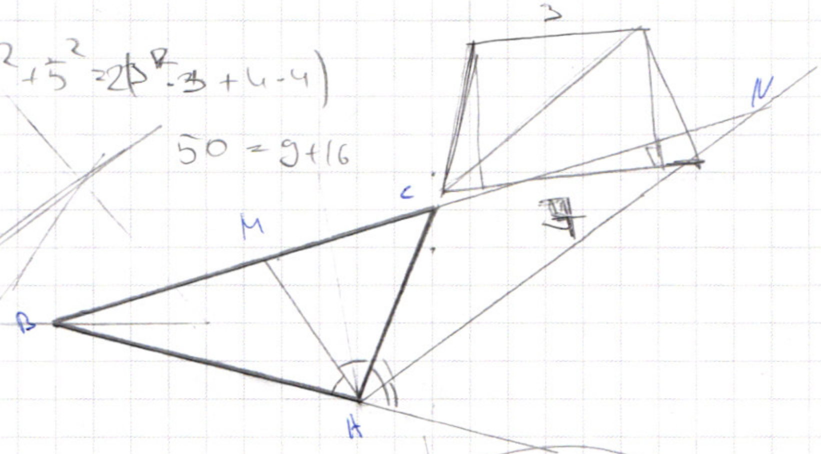
(заполняется секретарём)

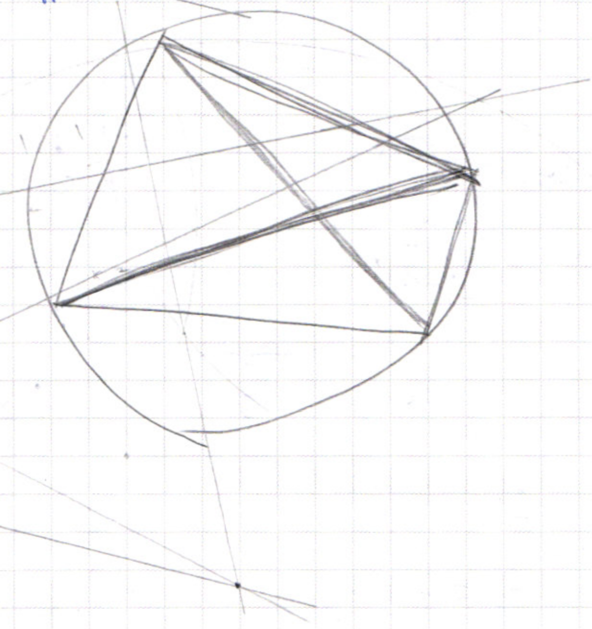
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^2+5^2=2(3^2-3+4-4)$

$50=9+16$







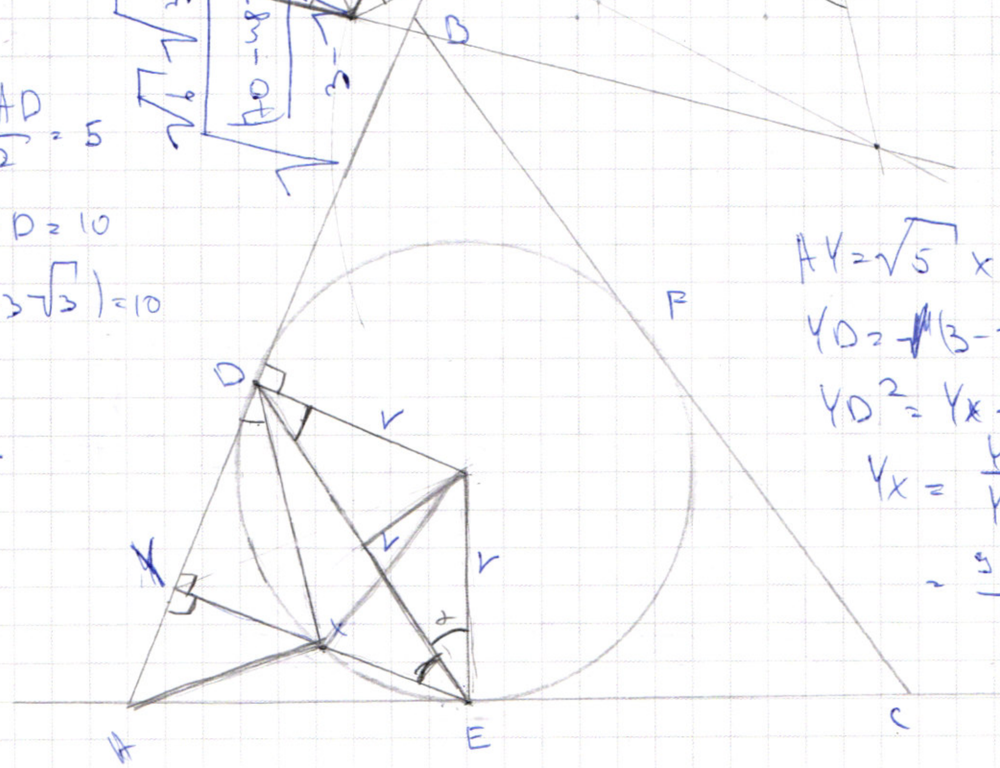
$$\frac{XY\cdot AD}{2}=5$$

$$XY\cdot AD=10$$

$$3x^2(7-3\sqrt3)=10$$

$\cancel{2x}$

$x^2(21-$



$AY=\sqrt5\,x$

$YD=(3-\sqrt5)x$

$YD^2=YX\cdot YE$

$$YX=\frac{YD^2}{YE}=\frac{(3-\sqrt5)^2}{2}x=$$

$$=\frac{9+5-6\sqrt5}{2}x=$$

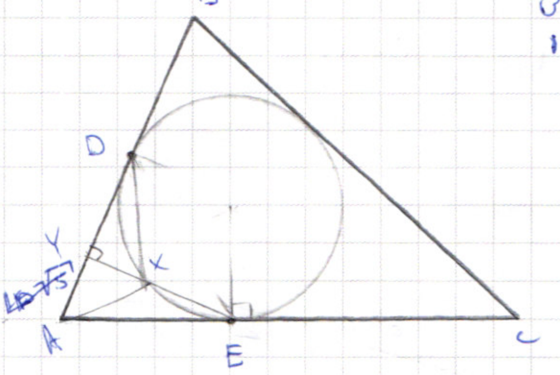
$$=(7-3\sqrt5)x$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$\cancel{\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}}$

$\cancel{(2\,AD)^2-3}$

$\frac{AD}{EY}=\frac{3}{2}$

$AD=1{,}5\,EY$

$\sqrt{(1{,}5\,x)^2-x^2}=\sqrt{\frac{5}{4}x^2}=\frac{\sqrt{5}\,EY}{2}$

$AE=3x,\ EY=2x \Rightarrow AY=\sqrt{5}\,x$

$YX=\frac{YD^2}{YE}=\frac{(AD-AY)^2}{YE}=$

$=\frac{(3x-\sqrt{5}x)^2}{2x}=$

$=\frac{9+5-6\sqrt{5}}{2}x=x(7-3\sqrt{5})$

$YX\cdot AD=10$

$x^2(7-3\sqrt{5})\,3=10$

$x=\sqrt{\frac{10}{21-9\sqrt{5}}}$

$\sqrt{21-9\sqrt{5}}$

$\cancel{4{,}5\ 23}\quad 2\cdot 4{,}5\cdot\sqrt{5}$

$21=$

$A=x^2+y^2$

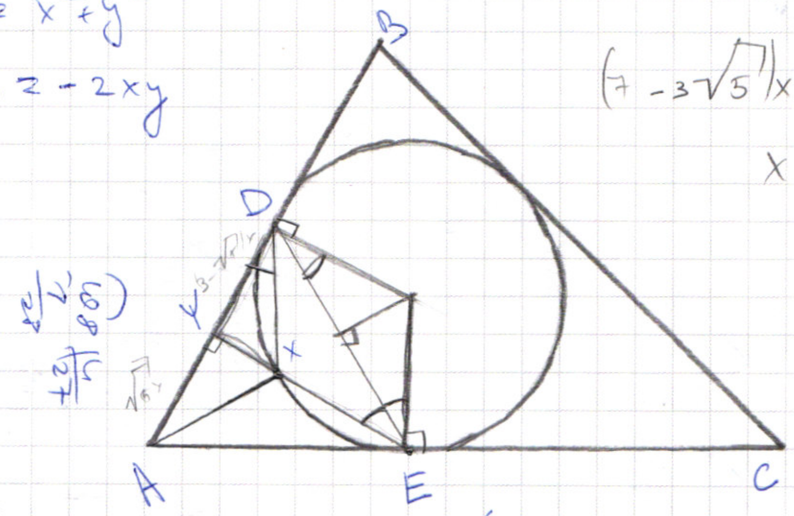
$B=-2xy$

$(7-3\sqrt{5})x\,3x=10$

$x^2=\frac{10}{21-9\sqrt{3}}$

$x=\sqrt{\frac{10}{21-9\sqrt{3}}}$

$\cancel{DE=\sqrt{14-3\sqrt{5}}}$



$\frac{DE}{2r}=\frac{DY}{DX}\Rightarrow r=\frac{DE\cdot DX}{2DY}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)