МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED=45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

~~Отв~~

1) Пусть $x > 3$. Тогда $|x-1| = x-1$, $|x| = x$, $|x-3| = x-3$

тогда

$$\frac{x^2-2x+5-4(x-1)}{4x^2-12x+x(x-3)} \le 0$$

$$\frac{x^2-6x+9}{(x-3)\cdot 5x} \le 0$$

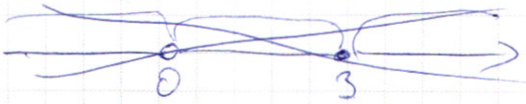
$$\frac{(x-3)^2}{5x\cdot(x-3)} \le 0$$ $x > 3 \Leftrightarrow$ можно ~~делить~~ сократить на $x-3$

$\frac{x-3}{5x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x} \le 0$

~~Нули числ: 3~~

~~Нули знам: 0~~

т.к. $x > 3$, то $x-3 > 0$; а $x > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{x-3}{x} > 0$. Противоречие.



2) Пусть $3 \ge x > 1 \Leftrightarrow |x-1| = x-1$, $|x| = x$, $|x-3| = 3-x$

Тогда

$$\frac{x^2-2x+5-4(x-1)}{4x^2-12x+x(3-x)} \le 0$$

$$\frac{x^2-6x+9}{3x^2-9x} \le 0$$

$$\frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} \le 0 \Leftrightarrow x \ne 3$$ $\Leftrightarrow$ ~~делим~~ сокр на $x-3$

$\frac{x-3}{3x} \le 0$; т.к. $3 \ge x > 1 > 0$, то $x-3 \le 0$, $3x > 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{3x} \le 0$, т.е. $x \in (1;3]$ – подходит

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \le 0$$

$\triangle BAO$, $\triangle AHD$, $\triangle CHA$

1) $x \ge 3$ $\quad \frac{x^2-2x+5-4(x-1)}{4x^2-12x+x(x-3)} \le 0$

$$\frac{x^2-6x+9}{5x(x-3)} \le 0$$

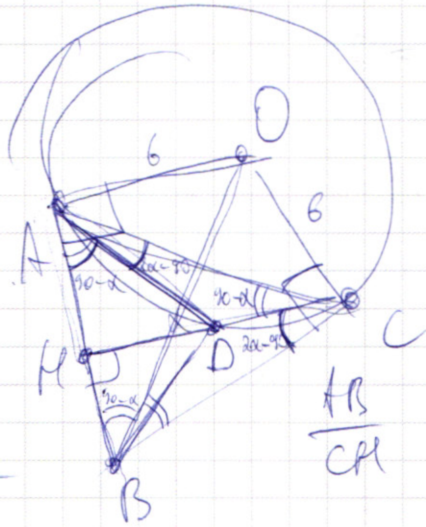
$$\frac{(x-3)^2}{5(x-3)} \le 0 \qquad x \ne 3$$

$$\frac{x-3}{5} \le 0$$

$x-3 \le 0$

$x \le 3$; $x > 3$ —

2)

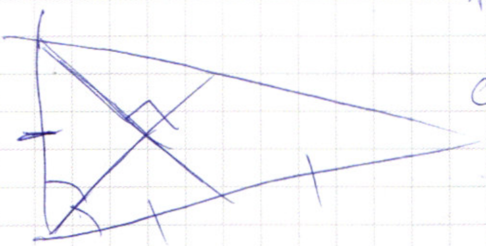


$\frac{AB}{CH}$

$180-2\alpha$

$\frac{AB}{CH} = \frac{6}{AH}$

$\frac{6}{AB} = \frac{HD}{AH} = \frac{AH}{CH}$ $\quad 90-\alpha$



~~$CH = \frac{AB\cdot AH}{6}$~~

$AB\cdot$ $\quad \frac{AB\cdot CH}{2} = 15$

~~$30 = AB\cdot DH$~~

$x^4+8x^3+2x^2-90x+81=0$

$30 = AB\cdot HD = \frac{6CH}{AH}\cdot\frac{6AH}{AB} = \frac{36CH}{AB}$

3 — 0

$81-9=72$

~~$-36-18$~~

x^2

$$y = \frac{9-x^2}{2}$$

$$\frac{9-x^2}{2} - 2x = \sqrt{xy}$$

$9-x^2-4x \ge 0$

$x^2+4x-9 \le 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

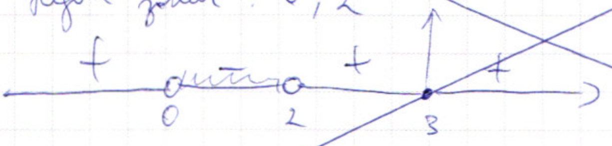
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{(x-3)^2}{x(x-2)} \le 0$ (метод интервалов)

Нули числ: 3

Нули знам: 0; 2



Значит $x \in (0;2)$. При этом $3 \ge x > 1 \Leftrightarrow x \in (1;3] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (1;2)$

3) Пусть $1 \ge x > 0 \Leftrightarrow |x-1| = 1-x$, $|x| = x$, $|x-3| = 3-x$

Тогда

$$\frac{x^2-2x+5-4(1-x)}{4x^2-12x+x(3-x)} \le 0$$

$$\frac{x^2+2x+1}{3x^2-9x} \le 0$$

$$\frac{(x+1)^2}{3x(x-3)} \le 0$$ ~~$(x+1)^2 \ge 0 \Leftrightarrow$ можно~~

~~метод~~

$(x+1)^2 \ge 0$; $x-3<0$, т.к. $1 \ge x$; $3x>0$, т.к. $x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{3x(x-3)} \le 0 \Leftrightarrow x \in (0;1]$ — подходит

4) Пусть $0 \ge x$; тогда $|x| = -x$, $|x-1| = 1-x$, $|x-3| = 3-x \Leftrightarrow$

$$\frac{x^2-2x+5-4(1-x)}{4x^2-12x+(-x)(3-x)} \le 0$$

$$\frac{x^2+2x+1}{5x^2-15x} \le 0$$

$$\frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \le 0$$

Т.к. $(x+1)^2 \ge 0$, $x \le 0$, $x-3<0$ (т.к. $x \le 0$), то
$x(x-3) \ge 0$.

$x \ne 0$, т.к. x в знаменателе ⇔ Значит $\frac{(x+1)^2}{x(x-3)} = 0$ ⇔

⇔ $x(x-3) > 0$ ⇔ $\frac{(x+1)^2}{x(x-3)} \ge 0$ ~~Противоречие~~.

⇔ $(x+1)^2 = 0$ ⇔ $x=-1$, $x(x-3) \ne 0$ + и $x=-1$

4) Значит подходят $x \in (1;3]$ и $x \in (0;1]$ ✓, т.е. ~~$x \in (0;3]$~~
$x \in (0;3] \cup \{-1\}$

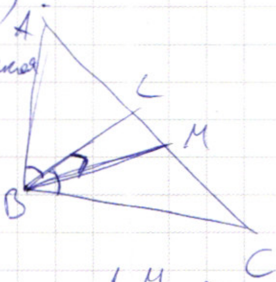
Ответ: $x \in (0;3] \cup \{-1\}$

№2

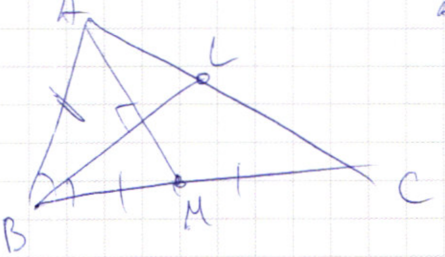
Назовём треугольник ABC

1) Очевидно, что биссектриса одного угла △ не может быть перпендикулярна медиане того же угла (иначе этот угол △ $>180°$, т.к. биссектриса и медиана всегда внутри).

BM – медиана BL – биссектриса. Без огр. общ. A, L, M, C в таком порядке ⇔ $\angle MBL = 90°$ ⇔ $\angle CBL = \angle ABL$ ⇔
⇔ $\angle CBL + \angle ABL = 2 \cdot \angle CBL > 2 \cdot 90° = 180$ Откуда $\angle ABC > 180$. Противоречие.



2) Пусть без огр. общ. биссектр BL ⊥ ~~биссектр~~ медиане AM, тогда



△ABM – равнобед. с осн AM, т.к. в нём BL – биссектр, высота ⇔
⇔ $AB = BM = MC$. Очев, что это работает и в другую сторону.

Т.е. осталось найти кол-во △ таких, что у них одна сторона вдвое больше другой.

Пусть стороны равны a, $2a$, b. ~~То Пусть~~ Тогда
$a + 2a + b = 300$ ⇔ $3a + b = 300$ ⇔ $b = 300 - 3a$.

Т.е. для любого целого a от 1 до 99 существует

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~треуголь~~ $b = 300 - 3a$ — натуральное, что $2a + a + b = 300$.

Т.к. $2a, a, b$ — стороны $\triangle$, ~~то~~ и $b = 300 - 3a$, то по нер-ву $\triangle$

$$\begin{cases} 2a + a > 300 - 3a \Leftrightarrow 6a > 300 \Leftrightarrow a > 50 \\ 2a + 300 - 3a > a \Leftrightarrow -2a > -300 \Leftrightarrow a < 150 \\ a + 300 - 3a > 2a \Leftrightarrow -4a > -300 \Leftrightarrow a < 75 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Leftrightarrow$ a — нат. число от ~~86~~ 51 до 74. Таких чисел

$74 - 51 + 1 = 74 - 50 = 24$

При этом дважды треугольник мог быть посчитан, только если в нём 2 разные пары равные по величине сторон отличаются в 2 раза, но тогда или $b = a$ (треугольники вида $a, 2a, a$ посчитаны по 1 разу, т.к. мы посчитали его для такого a один раз) или $b = 2a$ (треуг вида $a, 2a, 2a$ пос. по 1 разу) или $a = 2b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a + b = 2b + b = 3b < 2a = 4b$, т.е. нер-во $\triangle$ не вып.

Т.е. каждый такой $\triangle$ посчитан по 1 разу

Ответ: 24

№3

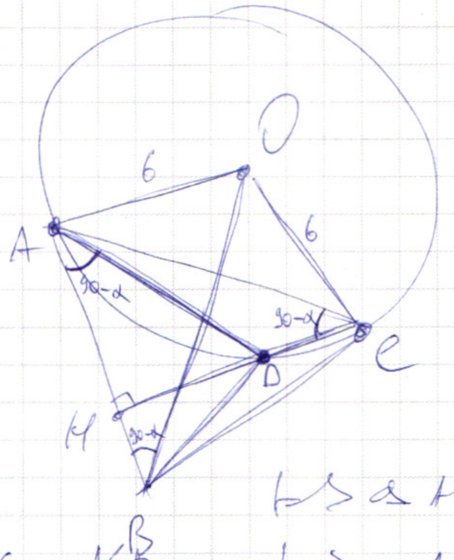
~~$\begin{cases} 9 - 2x = \sqrt{xy} \Leftrightarrow xy \geq 0 \text{ ; возв. в квадрат.} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$~~

~~$\begin{cases} (9-2x)^2 = xy \\ 2y = 9 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (9-2x)^2 = xy \\ y = \frac{9-x^2}{2} \end{cases}$ подст $\Leftrightarrow \left(\frac{9-x^2}{2} - 2x\right)^2 = x \cdot \frac{9-x^2}{2}$ домн на 4~~

~~$(9 - x^2 - 4x)^2 = 2x(9 - x^2)$~~

~~$81 + x^4 + 16x^2 - 18x^2 - 72x + 8x^3 = 18x - 4x^2$~~

№ 4



Пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда из $\triangle AHC$ $\angle HCA = 90-\alpha$.

Как угол между хордой AD и кас. AB $\angle HAD = \angle ACD = 90-\alpha$

$AB = BC$, т.к. ~~AB и~~ BA и BC – кас из B к одной окр $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \triangle ABC$ – равноб. с осн AC $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \angle BAC = \angle ACB = \alpha \Rightarrow \angle ABC = 180° - 2\alpha$.

$\triangle BOA = \triangle BOC$ ($AB = BC$, OB – общ, $AO = OC$ – радиусы) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \angle ABO = \angle OBC = \frac{1}{2} \angle ABC = 90-\alpha$.

~~Значит~~ $OA \perp AB$ – радиус и кас $\Rightarrow \angle OAB = 90°$,

$CH \perp AB$ (высота) $\Rightarrow \angle AHC = 90° = \angle DHA$.

Значит прямоуг. $\triangle BOA \sim \triangle ADH \sim \triangle CAH$, т.к.

$\angle BAO = \angle AHD = \angle CHA = 90°$,

$\angle ABO = \angle HAD = \angle ACH = 90-\alpha$

Значит $\frac{AO}{AB} = \frac{HD}{AH} = \frac{AH}{CH}$. (*)

$S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} AB \cdot HD$, т.к. DH – высота.

Из * $\frac{6}{AB} = \frac{AH}{CH} \Rightarrow AB = \frac{6CH}{AH}$

Из * $\frac{HD}{AH} = \frac{6}{AB} \Leftrightarrow HD = \frac{6AH}{AB}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} AB \cdot HD = \frac{1}{2} \cdot \frac{6CH}{AH} \cdot \frac{6AH}{AB} =$

$= \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot \frac{CH}{AB} = S_{\triangle ADB} = 15$

$\frac{CH}{AB} = \frac{15 \cdot 2}{36}$

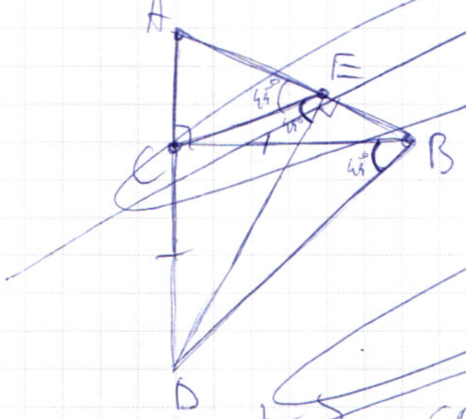
$\frac{AB}{CH} = \frac{36}{30} = \frac{12}{10} = 1,2$

Ответ: $\frac{AB}{CH} = 1,2$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



1) Очев, что D не лежит на продолжении AC за точку A, иначе $\angle CED$ — тупой

2) DCEB — впис, т.к. $\angle DCB = \angle DEB = 90^\circ$ ($BC \perp AC$) ($DE \perp AB$) — окр. с диаметром DB. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \angle CED = \angle CBD = 45^\circ$ Значит прямоуг. $\angle BCD$ — равнобед. с осн. BD $\Leftrightarrow$ [illegible]

$\Leftrightarrow CD = BC = \frac{5}{2}\sqrt{29}$.

Очев, что $BC > AC$ (из усл.), поэтому D не лежит на отр. AC, а лежит на продолжении AC за т. C.

3) $\frac{AD}{AC} = \frac{AC + CD}{AC} = \frac{AC + CD}{AC} = \frac{\sqrt{29} + \frac{5}{2}\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$.

4) т.к. $\angle CDB$ — равнобед. с осн. BD, то $\angle CDB = \angle CBD = 45^\circ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \angle AEC = 45^\circ$ (внешн. во впис DCEB) $\Leftrightarrow$

5) $\Leftrightarrow$ EC — биссектр $\angle AED$ в $\triangle AED \Leftrightarrow \frac{AE}{ED} = \frac{AC}{CD} = \frac{\sqrt{29}}{\frac{5}{2}\sqrt{29}} = \frac{2}{5}$

При этом по т. Пифагора $AE^2 + DE^2 = AD^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{AE}{ED} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow AE = \frac{2}{5}ED \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}ED\right)^2 + ED^2 = \left(\sqrt{29} + \frac{5}{2}\sqrt{29}\right)^2$

$\left(\frac{4}{25} + 1\right) ED^2 = \sqrt{29}^2 \left(1 + \frac{5}{2}\right)^2$

$\frac{29}{25} \cdot ED^2 = 29 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2$

$\frac{ED^2}{25} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 \Leftrightarrow ED^2 = 25 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 \Leftrightarrow ED = 5 \cdot \frac{7}{2} = \frac{35}{2}$.

~~$AE = \frac{2}{5} ED = \frac{2}{5} \cdot \frac{35}{2} = 7.$~~

~~5) $S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} AE \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{35}{2} = \frac{35 \cdot 7}{4} = \frac{245}{4} =$~~

~~$= \frac{122,5}{2} = 61,25$~~

~~Ответ: $\frac{AD}{AC} = 3,5$; $S_{\triangle AED} = 61,25$~~

№3

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow xy \geq 0,\ (y-2x)^2 = xy \Leftrightarrow y^2-5xy+4x^2=0.$

$(y-4x)(y-x)=0$

$\left[\begin{array}{l} y=4x \\ y=x \end{array}\right.$

~~Рассм. y^2-5x~~

Значит или $y=4x$ или $y=x \Leftrightarrow x$ и y одного знака $\Leftrightarrow xy \geq 0$.

~~$xy \geq 0$~~

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=4x \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \\ \begin{cases} y=x \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x^2+8x-9=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+9)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=+1 \\ x=-9 \end{array}\right.$

~~$D=16+9\cdot4=16+36=52;\ x=\frac{-4\pm\sqrt{52}}{2}$~~

~~$\left[\begin{array}{l} x=\frac{-4-2\sqrt{13}}{2} \\ x=\frac{-4+2\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$~~

$\Leftrightarrow$ ~~$x^2+x-9=0$~~

~~$x=1$~~

~~$D=1^2+9\cdot4=37$~~

~~$x=\frac{-1\pm\sqrt{37}}{2}$~~

~~$x=\frac{-1-\sqrt{37}}{2}$~~

~~$x=\frac{-1+\sqrt{37}}{2}$~~

$x^2+2x-9=0$

$D=4+9\cdot4=40$

$x=\frac{-2\pm\sqrt{40}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{10}}{2}=-1\pm\sqrt{10}$

$\left[\begin{array}{l} x=-1-\sqrt{10} \\ x=-1+\sqrt{10} \end{array}\right.$

~~Значит~~

~~$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-2-\sqrt{13} \\ y=4x \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2+\sqrt{13} \\ y=4x \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{-1-\sqrt{37}}{2} \\ y=x \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{-1+\sqrt{37}}{2} \\ y=x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-2-\sqrt{13} \\ y=-8-4\sqrt{13} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2+\sqrt{13} \\ y=-8+4\sqrt{13} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{-1-\sqrt{37}}{2} \\ y=\frac{-1-\sqrt{37}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{-1+\sqrt{37}}{2} \\ y=\frac{-1-\sqrt{37}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$~~

~~Ответ: $\{(-2-\sqrt{13}; -8-4\sqrt{13}); (-2+\sqrt{13}; -8+4\sqrt{13}); \left(\frac{-1-\sqrt{37}}{2}; \frac{-1-\sqrt{37}}{2}\right); \left(\frac{-1+\sqrt{37}}{2}; \frac{-1+\sqrt{37}}{2}\right)\}$~~

~~Ответ: $\{(-2-\sqrt{13}; -8-4\sqrt{13}), ($~~

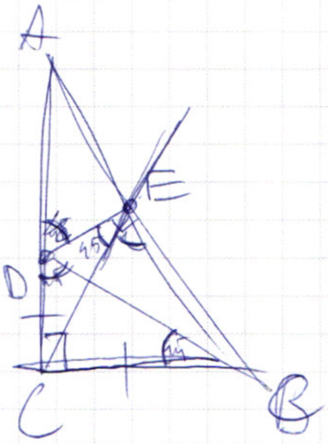
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Значит

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=4x\end{cases}\\\begin{cases}x=-9\\y=4x\end{cases}\\\begin{cases}x=-1-\sqrt{10}\\y=x\end{cases}\\\begin{cases}x=-1+\sqrt{10}\\y=x\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}\\\begin{cases}x=-9\\y=-36\end{cases}\\\begin{cases}x=-1-\sqrt{10}\\y=-1-\sqrt{10}\end{cases}\\\begin{cases}x=-1+\sqrt{10}\\y=-1+\sqrt{10}\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\{(1;4),(-9;-36),(-1-\sqrt{10};-1-\sqrt{10}),(-1+\sqrt{10};-1+\sqrt{10})\}$

$$\frac{1+2+5-4|-1-1|}{4+12+(-1)\cdot|-1-3|}=\frac{8-4\cdot 2}{4+12+4}=0$$



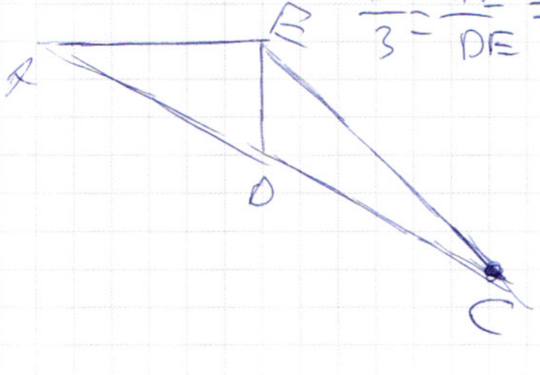
$$\frac{AD}{AC}=\frac{AC-BC}{AC}=$$

$$=\frac{\frac{5}{2}\sqrt{29}-\sqrt{29}}{\sqrt{29}}=\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}=1{,}5$$

$$\frac{AE}{DE}=\frac{AC}{CD}=\frac{\frac{5}{2}\sqrt{29}}{\sqrt{29}}=\frac{5}{2}$$

$$AE=\frac{5}{2}DE$$

$$\frac{6}{3}=\frac{AE}{DE}=\frac{AC}{CD}=\frac{6}{3}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

$f(2)=2$, т.к. 2 – простое

$f(1)+f(2)=f(2)$, т.к. $1\cdot 2=2$ $\Rightarrow$ $f(1)=0$

$f(3)=3$, т.к. 3 – простое

$f(4)=f(2)+f(2)$, т.к. $2\cdot 2=4$ $\Rightarrow$ $f(4)=4$

$f(5)=5$, т.к. 5 – простое

$f(6)=f(2)+f(3)=2+3=5$

$f(7)=7$, т.к. 7 – простое

$f(8)=f(2)+f(4)=2+4=6$

$f(9)=f(3)+f(3)=3+3=6$

$f(10)=f(2)+f(5)=2+5=7$

$f(11)=11$, т.к. 11 – простое

$f(12)=f(2)+f(6)=2+5=7$

$f(13)=13$, т.к. 13 – простое

$f(14)=f(2)+f(7)=2+7=9$

$f(15)=f(3)+f(5)=3+5=8$

$f(16)=f(2)+f(8)=2+6=8$

$f(17)=17$, т.к. 17 – простое

$f(18)=f(2)+f(9)=2+6=8$

$f(19)=19$, т.к. 19 – простое.

$f(x/y)+f(y)=f(x) \Rightarrow f(x/y)=f(x)-f(y)$, т.е. нам необходимо найти кол-во пар $(x;y)$ таких, что $f(y)>f(x)$ (т.к. это равносильно $f(x)-f(y)<0$)

~~Тогда нам необходимо найти кол-во~~ пар$(x;y)$ ~~где $x \neq y$~~.
~~и $f(x)$~~

~~Тогда в таких парах $x \neq y$.~~

Заметим, что требуемое от нас число — в два раза меньше, чем кол-во пар $(x;y)$, где $f(x) \neq f(y)$ ~~т.к.~~..

~~Это~~ Число пар ~~, где~~ $(x;y)$, где $f(x)=f(y)$ это 33

т.к. это пары ~~(1;1), (2;2)~~, (3;3), (4;4), (5;5), (5;6), (6;5), (6;6), (7;7), (7;10), (7;12), (8;8), (8;9), (9;8), (9;9), (10;7), (10;10), (10;12), (11;11), (12;7), (12;10), (12;12), (13;13), (14;14), (15;15), (15;16), (15;18), (16;15), (16;16), (16;18), (17;17), (18;15), (18;16), (18;18), (19;19). Значит кол-во пар $(x;y)$, где $f(x) \neq f(y)$ это кол-во пар $(x;y)$, где $3 \leq x \leq 19$, $3 \leq y \leq 19$, т.е. 17^2 минус кол-во пар $(x;y)$, где $f(x) = f(y)$, т.е. 33.

Число пар, где $f(x) \neq f(y)$ это $17^2 - 33 = 289 - 33 = 256$.

Значит кол-во пар $(x;y)$, где $f(x) < f(y)$ это $\frac{256}{2} = 128$.

Ответ: 128

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

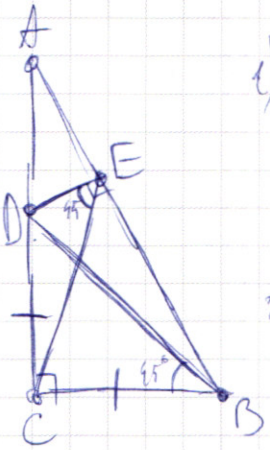
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



1) $DEBC$ – вписан (окр с диам. BD) $\Leftrightarrow \angle CED = \angle CBD = 45°$ (опир на $\smile CD$)

Значит прямоуг. $\triangle BCD$ – равноб. ($\angle CBD = 45°$) с осн. BD.

Значит $BC = CD \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AC-CD}{AC} = \frac{AC-BC}{AC} = \frac{\frac{5}{2}\sqrt{29}-\sqrt{29}}{\frac{5}{2}\sqrt{29}} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{29}}{\frac{5}{2}\sqrt{29}} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

2) ~~$\triangle BCD$ – равноб. с осн~~ $\angle CEB = \angle DEB - \angle CED = 90° - 45° = 45°$ ($\angle DEB = 90°$, т.к. $DE \perp AB$)

Значит EC – биссектриса $\angle DEB$ – внешнего угла $\triangle AED$.

По св-ву биссектрисы внешнего угла $\frac{AE}{DE} = \frac{AC}{DC} = \frac{AC}{BC} = \frac{\frac{5}{2}\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = \frac{5}{2}$

Значит $AE = \frac{5}{2}DE$.

3) По т. Пифагора для $\triangle AED$, $AD^2 = AE^2 + DE^2 = \left(\frac{5}{2}DE\right)^2 + DE^2$

$AD = AC - CD = AC - BC = \frac{5}{2}\sqrt{29} - \sqrt{29} = 1{,}5\sqrt{29} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\sqrt{29}\right)^2 = \left(\frac{25}{4}+1\right)DE^2 \Leftrightarrow \frac{9}{4}\cdot 29 = \frac{29}{4}DE^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow DE^2 = \cancel{169}\ 9 \Leftrightarrow DE = 3 \Leftrightarrow AE = \frac{5}{2}DE = \frac{5}{2}\cdot 3 = \cancel{10}\ \frac{15}{2}$

4) $S_{\triangle AED} = \frac{1}{2}AE\cdot DE$ ($\angle DEA = 90°$) $\Leftrightarrow$ ~~$S_{\triangle AED} = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 16 = 10\cdot 8 = 80$~~

$S_{\triangle AED} = \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{2}\cdot 3 = \frac{45}{4} = \frac{22{,}5}{2} = 11{,}25$

~~Ответ: $\frac{AD}{AC} = 0{,}6$; $S_{\triangle AED} = 80$~~

Ответ: $\frac{AD}{AC} = 0{,}6$; $S_{\triangle AED} = 11{,}25$

$|3x|+|2y|+|6-3x-2y|\geq 6$

$x^2-2x-3y+y^2\leq 0$

$\cancel{x>0}$
$\cancel{y>0}$ $|p>$

$6-3x-2y<6-3x-2(3-1{,}5x)=0$

$6-3x-2y=0$

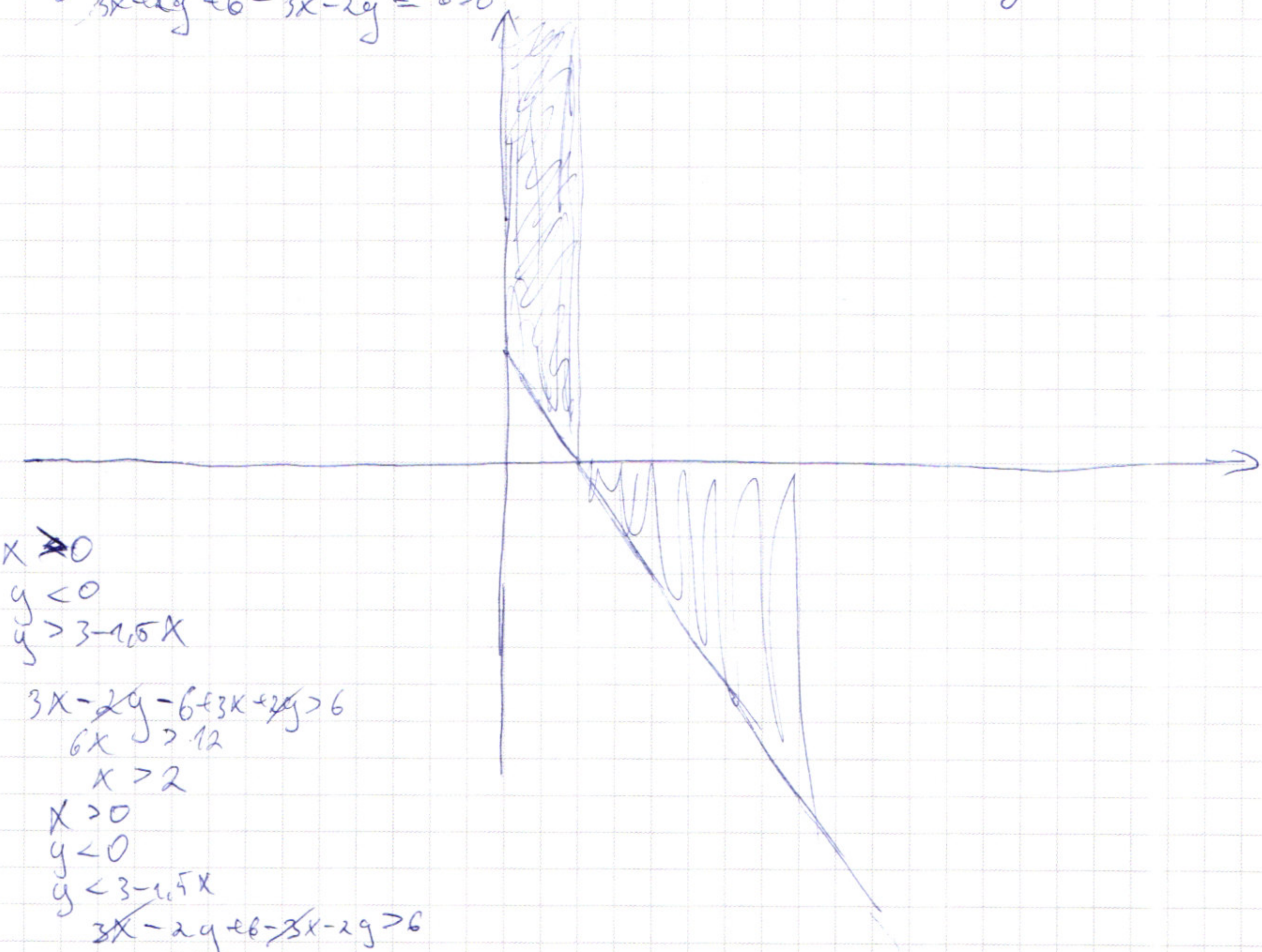
$2y=6-3x$

$y=3-1{,}5x$

y $x>0$
$y>0$
$y>3-1{,}5x$

$3x+2y+3x+2y-6>6$
$6x+4y>12$
$3x+2y>6$
$0>6-3x-2y$ +

$x>0$
$y>0$
$y<3-1{,}5x$
$3x+2y+6-3x-2y=6>0$ =



$x>0$
$y<0$
$y>3-1{,}5x$

$3x-\cancel{2y}-6+3x+\cancel{2y}>6$
$6x>12$
$x>2$

$x>0$
$y<0$
$y<3-1{,}5x$
$\cancel{3x}-2y+6-\cancel{3x}-2y>6$
$-4y>0$
$y<0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y-2x=\sqrt{xy}$

$2y+x^2=9$

$y^2-4xy+4x^2=xy$

$y^2-5xy+4x^2=0$

$2y+x^2=9$

$\cancel{(3x)^2-4\cdot 4x^2=}$

$25x^2-16x^2=9x^2$

$y=\frac{5x\pm 3x}{2}$

$y=\frac{8x}{2}=4x$

$y=\frac{2x}{2}=x$

$\cancel{3x+x^2}$

$17\cdot 17$: $119 + 17\,\,\, = 289$

$f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y)=f(x)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)<0$

$f(y)>f(x)$

$14+(1+1+3+3)\cdot 2=$

$=19+16=35$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

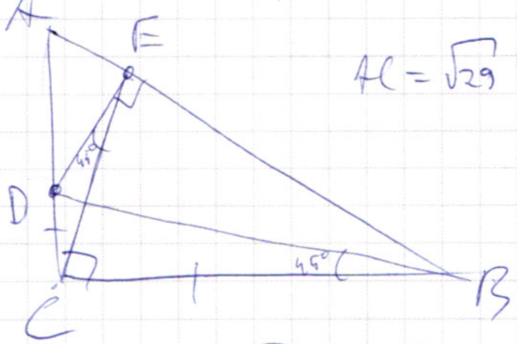
0 2 3 4 5 5 7 6 6 7 11 7 13 9 8 8 17 8 19

0 2 3 4 5 6 7 8 9 11 13 17 19

5 6 7 8

7 8

$\frac{AD}{AC}$, $S_{\triangle AED}$

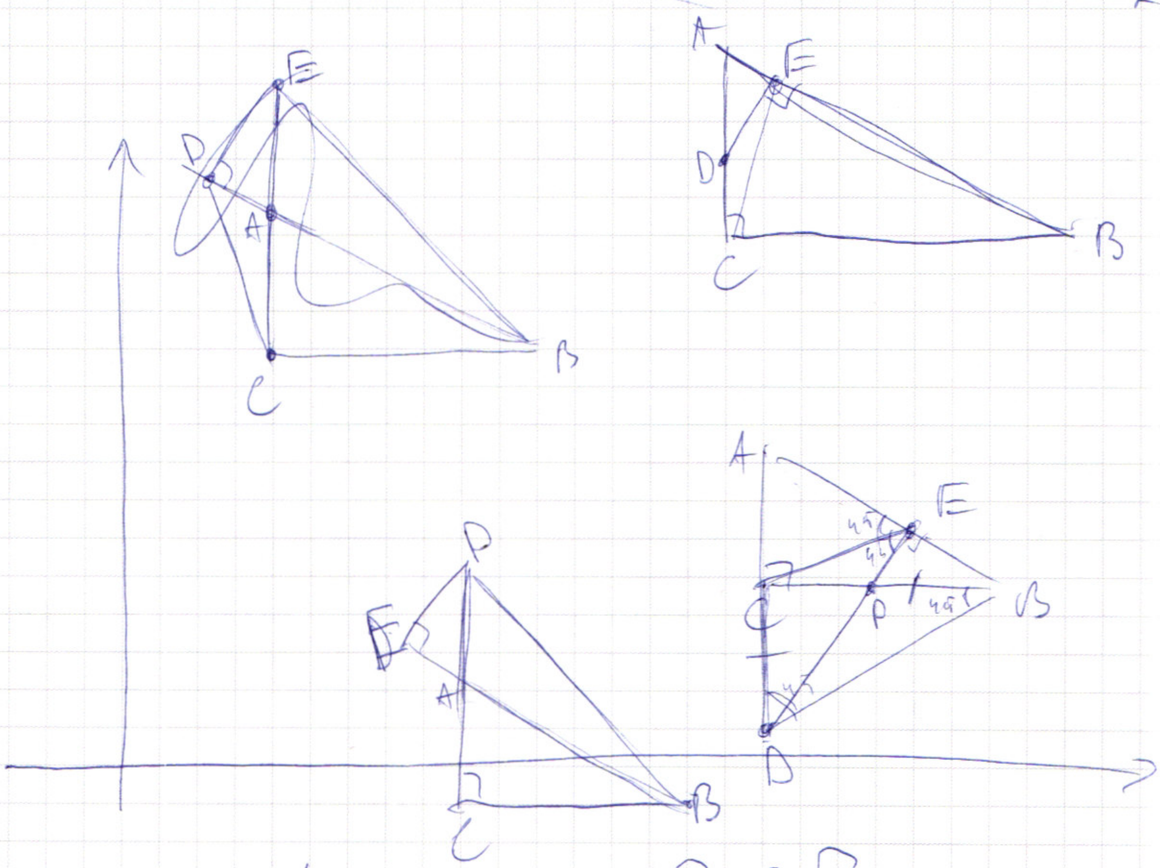


$AC = \sqrt{29}$ $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$ $\angle CED = 45°$

$$AB = \sqrt{29 + \frac{25 \cdot 29}{4}} = \sqrt{\frac{29 \cdot 29}{4}} = \frac{29}{2}$$

$$\cancel{\frac{AD}{AC} = \frac{AC + CD}{AC} = \frac{\sqrt{29} - \frac{5}{2}\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = 1 - \frac{5}{2}}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times\ 7 \\ \hline 245 \end{array}$$



$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC + CD}{AC} = \frac{\sqrt{29} + \frac{5}{2}\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = \frac{7}{2}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)