

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках S и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{29}$, $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leq x \leq 19$, $3 \leq y \leq 19$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4(x-1)}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3|} \leq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (-\infty; 0) \\ \frac{x^2 - 2x + 5 - 4(1-x)}{4x^2 - 12x + x(x-3)} \leq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in [0; 1] \\ \frac{x^2 - 2x + 5 - 4(1-x)}{4x^2 - 12x - x(x-3)} \leq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (1; 3] \\ \frac{x^2 - 2x + 5 - 4(x-1)}{4x^2 - 12x - x(x-3)} \leq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (3; \infty) \\ \frac{x^2 - 2x + 5 - 4(x-1)}{4x^2 - 12x + x(x-3)} \leq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (-\infty; 0) \\ x \in (0; 3) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in [0; 1] \\ x \in (0; 3) \Leftrightarrow x \in (0; 3) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (1; 3] \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (0; 3) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (3; \infty) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (0; 3) \end{array} \right.$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4 + 4x}{4x^2 - 12x + x(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{4x(x-3) + x(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{(x+1)^2}{x(x-3)} \leq 0$$

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x(x-3)}$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$$

Нули: $\{-1\}$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4 + 4x}{4x^2 - 12x - x(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{4x(x-3) - x(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{(x+1)^2}{3x(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{(x+1)^2}{x(x-3)} \leq 0$$

$$x \in (0; 3)$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x - x(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x + x(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{4x(x-3) - x(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{4x(x-3) + x(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} \leq 0$$

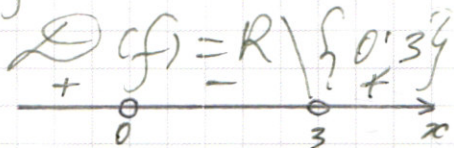
$$\frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)^2}{x(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)^2}{x(x-3)} \leq 0$$

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x(x-3)}$$

$$x \in (0; 3)$$



$$x \in (0; 3)$$

Ответ: $x \in (0; 3)$

№3.

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + 2x - 9 = 0 \\ y = 4x \\ x^2 + 8x - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -1 - \sqrt{10} \\ y = -1 - \sqrt{10} \\ x = -1 + \sqrt{10} \text{ (не подходит)} \\ y = -1 + \sqrt{10} \\ x = -9 \\ y = -36 \text{ (не подходит)} \\ x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \textcircled{1}$$

$$y - 2x = \sqrt{xy}$$

$$x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy$$

$$\frac{D}{4} = 1 + 9 = 10$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$$

$$D = \sqrt{10}$$

$$x = -9$$

$$\begin{cases} y = x \\ y = 4x \end{cases}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{10}$$

$$x = 1$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{10} \\ y = -1 - \sqrt{10} \\ x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Ответ: $(-1 - \sqrt{10}; -1 - \sqrt{10}); (1; 4)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Дано:

$\triangle ABC$ - т.к.

$DE \perp AB$

$$AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$$

$$BC = \sqrt{29}$$

$$\angle CED = 45^\circ$$

Найти: $\frac{AD}{AC} = ?$, $S_{AED} = ?$

Проведём высоту CH и продолжим

$$\Rightarrow \angle HCE = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

По теор. Пифаг.: т.к. $\triangle CME$ - р/д и т.к., то

$$AB^2 = \frac{15 \cdot 29}{4} + \frac{29 \cdot 4}{1}$$

$$CH = EH$$

$$AB^2 = \frac{29 \cdot 29}{4}$$

$$hc = \frac{ab}{c}$$

$$AB = \frac{29}{2}$$

$$hc = \frac{5 \cdot 29 \cdot 2}{2 \cdot 29}$$

$$hc = 5 \Rightarrow CH = EH = 5$$

$$AH^2 = \frac{25 \cdot 29}{4} - \frac{25 \cdot 4}{1}$$

$$AH^2 = \frac{25 \cdot 25}{4}$$

$$AE = AH - EH$$

$$AH = \frac{25}{2}$$

$$AE = \frac{25}{2} - \frac{5 \cdot 2}{1} = \frac{25}{2} - \frac{10}{1} = \frac{15}{2}$$

$$\cos \angle C = \frac{5\sqrt{29} \cdot 2}{2 \cdot 29}$$

$$\cos \angle C = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{5\sqrt{29}}{29} = \frac{15 \cdot 3}{2 \cdot AD}$$

$$\sin \angle C = \frac{\sqrt{29} \cdot 2}{29}$$

$$\sin \angle C = \frac{2\sqrt{29}}{29}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$2AD\sqrt{29} = 3 \cdot 29$$

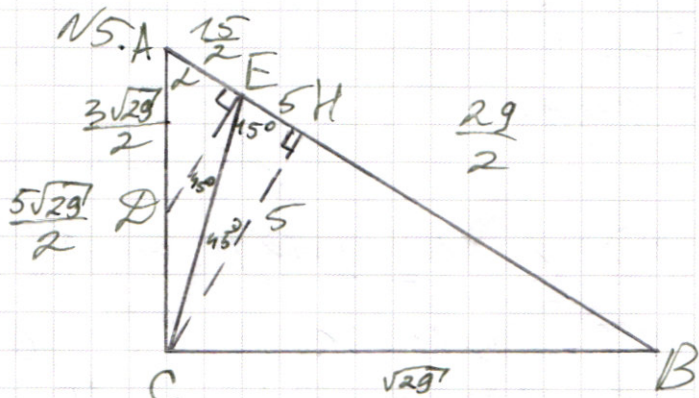
$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} ab \sin \angle C$$

$$S_{AED} = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{3\sqrt{29}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{29}}{29} = \frac{45}{4}$$

$$AD = \frac{3 \cdot 29}{2 \cdot \sqrt{29}}$$

$$AD = \frac{3\sqrt{29}}{2}$$

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$, $S_{AED} = \frac{45}{4}$



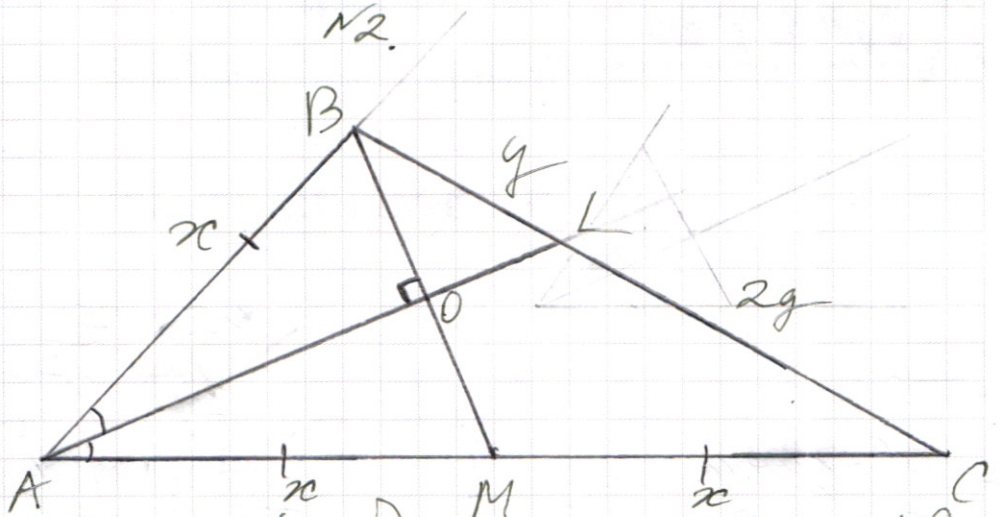
Дано:

$\triangle ABC$

$P = 300$

$AL \perp BM$

Найти: $n = ?$



П.р. $AL \perp BM$ и AL - выс., то $\triangle ABO = \triangle AMO$
(по 2 углам и AO - общая)

$AB = AM$ и $BO = OM$

П.р. AL - выс., то:

$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}$

$BL = y$

$LC = 2y$

$3x + 3y = 300$

① $xy = 100$

П.р. $x \in \mathbb{N}, 3y \in \mathbb{N}$ и $(xy) \in \mathbb{N}$, то $y \in \mathbb{N}$

П.р. ABC - треуг., то:

$x > 2x - 3y$

$3y - x > -3y$

$x < 3y$

Из ① следует, что $x = y$ или $x = 2y$

$x = y$

$x = 2y$

$x = 50$

$3y = 100$

$y = 50$

П.р. $y \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$

, но тогда стороны 50, 100, 150, что тоже быть не может

Ответ: $n = 0$

$$(y - 2x)^2 = xy$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy$$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$$

$$D = 25x^2 - 4 \cdot 4x^2 = 9x^2$$

~~Скорее~~

$$y_1 = x \text{ (не подходит)}$$

$$y_2 = 4x$$

$$-1 + \sqrt{10} + 2 - 2\sqrt{10} = 1 - \sqrt{10}$$

$$2 \cdot 4x + x^2 = 9$$

$$2 \cdot x + x^2 = 9$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$p = 1$$

$$D = 1 + 36 = 37$$

$$\sqrt{37} = \sqrt{10}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{10}$$

$$x = -9 \quad y = -36$$

$$x = 1 \quad y = 9$$

$$x = -1 - \sqrt{10}$$
$$y = -1 - \sqrt{10}$$

$$x = -1 + \sqrt{10}$$

$$y = -1 + \sqrt{10}$$

$$-1 + \sqrt{10} + 2 - 2\sqrt{10}$$

$$1 - \sqrt{10}$$

$$= \frac{-1 - \sqrt{10} + 2 + 2\sqrt{10}}{1 + \sqrt{10}}$$

№

~~Скорее~~

$$-2 - 2\sqrt{10} + 1 + 2\sqrt{10} + 10$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$x^2 - 2x + 5 = 0$~~ $x^2 - 2x + 5 = 0$

$D = 4 - 20 = -16$

$x_1 = 1 + 2i$ $x_2 = 1 - 2i$



$+ (-x)(3-x)$

$x(x-3)$

$+ x(3-x)$

$= x(x-3)$

$y - 2x = \sqrt{xy}$

$2y + x^2 = 9$

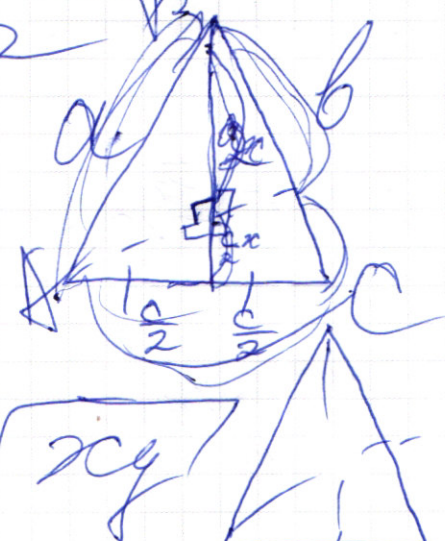
$2y = 9 - x^2$

$y = \frac{9 - x^2}{2}$

$\frac{9 - x^2}{2} - 2x = \sqrt{x \cdot \frac{9 - x^2}{2}}$

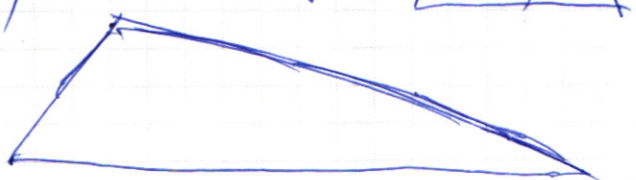
$2y - 4x = 2\sqrt{xy}$

$2y + x^2 = 9$



$x^2 + 4x = 9 - 2\sqrt{xy}$

$y = 2x + \sqrt{xy}$



$$x < 3y + 2x \quad -x < 3y \quad x > 3y - 2x$$

$$\begin{cases} x > 2x - 3y \\ x > -3y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x < 2x + 3y \\ x = 4 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x > -3y \\ -x < 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3y \\ x > -3y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= 99 \\ y &= 1 \\ 99, 198, 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 50 \\ y &= 50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 2y \\ x + y &= 100 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x < 2x + 3y \\ -x < 3y \\ x = 2y \\ x + y = 100 \end{cases} \Rightarrow 3y = 100$$

$$\begin{cases} x > 2x - 3y \\ 2x > x - 3y \\ 2x > 3y - x \\ 3x > 3y \\ x < 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x > 3y \\ x > y \end{cases}$$

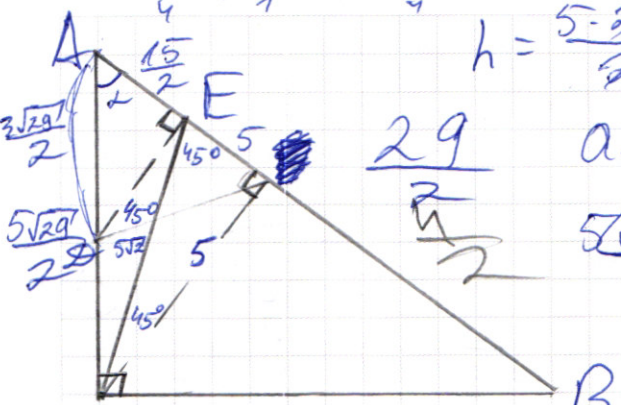
$$\begin{cases} x < 2x + 3y \\ -x < 3y \\ x > 3y - 2x \\ 3x > 3y \\ x > y \\ x < 3y + 2x \\ -x < 3y \\ x > -3y \\ x < 3y + 2x \\ x < 3y \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a = \sqrt{ac \cdot c}$
 $S_{ABD} = 15$
 $R = 15$
 $ac = \sqrt{a \cdot c}$
 $x = \frac{\sqrt{29 \cdot 29}}{2}$
 $\frac{29\sqrt{29}}{2} = a \cdot \frac{c}{2} - a \cdot \frac{c}{2} \cdot \pi$
 $29\sqrt{29} = a \cdot \frac{c}{2} (1 - \pi)$
 $\frac{29\sqrt{29}}{2} (1 - \pi) = 20$
 $a = \sqrt{ac \cdot c} - \frac{29\sqrt{29}}{2} (1 - \pi)$
 $a = \sqrt{ac \cdot c}$
 $hc = \pi \left(\frac{29}{2} - \pi \right)$
 $5 = \pi \left(\frac{29}{2} - \pi \right)$
 $5 = \frac{29\pi}{2} - \pi^2$
 $25 = 29\pi - \pi^2$
 $\pi^2 - 29\pi + 25 = 0$
 $\pi = \frac{29 \pm \sqrt{29^2 - 4 \cdot 25}}{2} = \frac{29 \pm \sqrt{841 - 100}}{2} = \frac{29 \pm \sqrt{741}}{2}$
 $\pi = \frac{29 - \sqrt{741}}{2}$
 $h = \frac{29 \cdot \pi}{2} = \frac{29 \cdot \frac{29 - \sqrt{741}}{2}}{2} = \frac{29(29 - \sqrt{741})}{4}$
 $h = \frac{29 \cdot 5}{2} = \frac{145}{2}$
 $h = \frac{29}{2}$

$$\frac{25 \cdot 29}{4} + \frac{29^2}{1} = \frac{29 \cdot 29}{4}$$

$$h = \frac{5 \cdot 29 \cdot 2}{2 \cdot 20}$$



$$\frac{29}{2}$$

$$a = \sqrt{ac \cdot c}$$

$$\frac{5\sqrt{29}}{2} = x \cdot \frac{29}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{29} \cdot 2}{29}$$

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{29}}{29}$$

$$5\sqrt{29} = x \cdot 29 \sqrt{29}$$

$$x = \frac{5\sqrt{29}}{29}$$

$$\cos \alpha = \frac{5\sqrt{29} \cdot 2}{29 \cdot 29}$$

$$\frac{3 \cdot 29 \cdot \sqrt{29}}{29 \cdot 29}$$

$$\frac{25 \cdot 29}{4} - \frac{25^2}{1}$$

$$\frac{25}{2} - \frac{5}{1}$$

$$\frac{15}{2} \cdot 2 \cdot 29$$

$$\frac{25 \cdot (29 - 4)}{4} = \frac{25}{2}$$

$$\frac{5\sqrt{29}}{29} = \frac{15}{2} \cdot 3$$

$$60 + 29$$

$$\frac{3\sqrt{29} \cdot 2}{7 - 5\sqrt{29}}$$

$$2x\sqrt{29} = 29 \cdot 3$$

$$x = \frac{29 \cdot 3}{2 \cdot \sqrt{29}}$$

$$20 \cdot 1 \cdot 18 \cdot 1$$

$$x = \frac{29 \cdot 3 \cdot \sqrt{29}}{2 \cdot 29}$$

$$\frac{9 \cdot 29}{4} = \frac{225}{4}$$

$$\frac{30}{9} = 9$$

$$\frac{15}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$$

Значит, $f(a) = f(b)$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)