МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x-2y=\sqrt{xy},\\ x+y^2=5.\end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE\perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases}|2x|+|y|+|4-2x-y|>4,\\ x^2-2x-4y+y^2\leqslant 0.\end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 18$, $1\leqslant y\leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

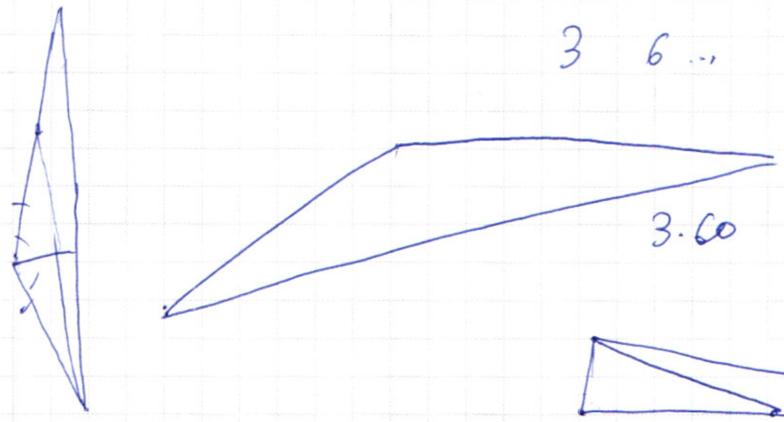
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



3 6 ...

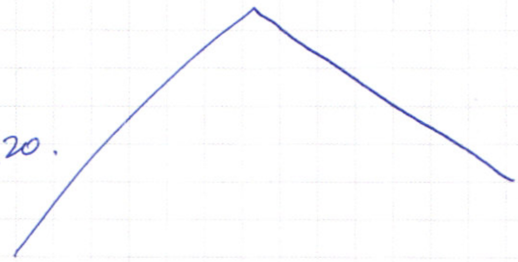
$\sqrt{x} = \frac{x-2y}{\sqrt{y}}$

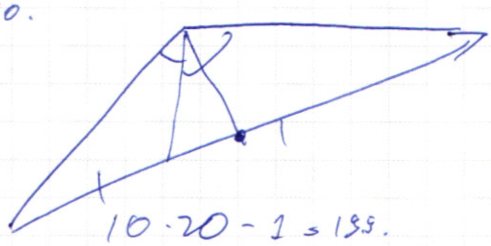
3·60 $\sqrt{xy} = 1$

3 6 9 12 15 18 21 24 27 30.

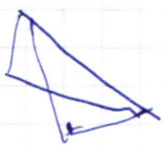
10.

$\frac{6001}{30} = \cancel{60}\cdot 20.$





$10\cdot 20 - 1 = 199.$



$y = \cancel{x-2y}$

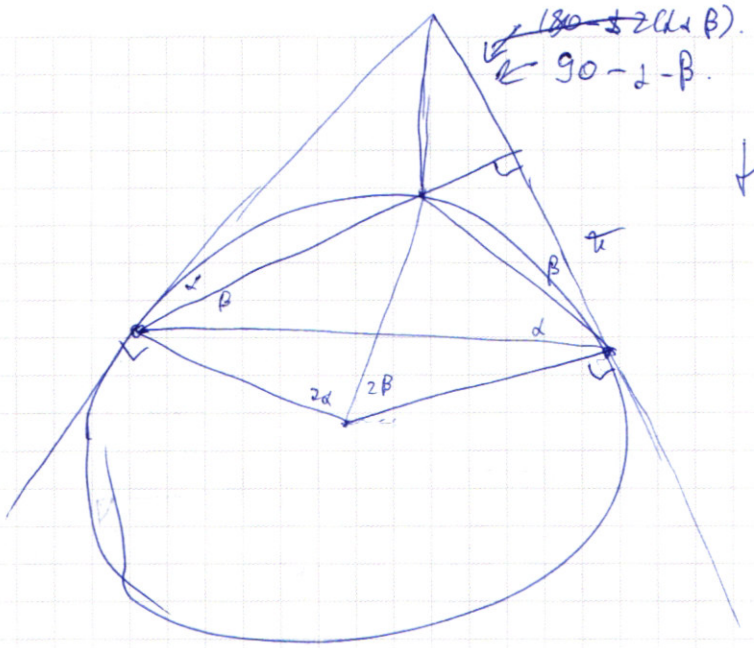
$x = 5 - 2y^2.$

$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy} \\ x+2y^2 = 5. \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-4xy+4y^2 = |xy|. \\ x+2y^2 = 5 \end{cases}$

$x-2y \geq 0.$

$x = y$

$x \geq 2y.$

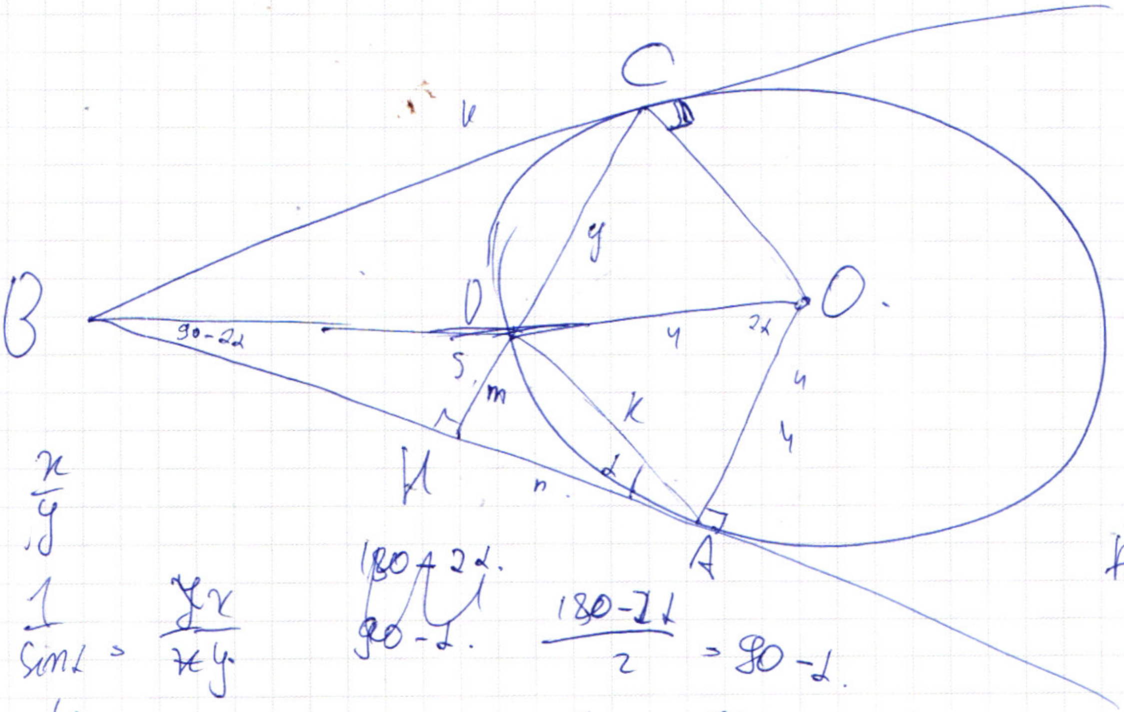


$HA^2 = HD \cdot DC.$

$180 - x + 90 - \alpha - \beta + \beta =$

$\cancel{= x}$

$x - \alpha = 90.$



$\frac{x}{y}$

$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{yx}{xy}$ $\quad 180+2\alpha. \quad 90-\alpha. \quad \frac{180-2\alpha}{2} = 90-\alpha.$

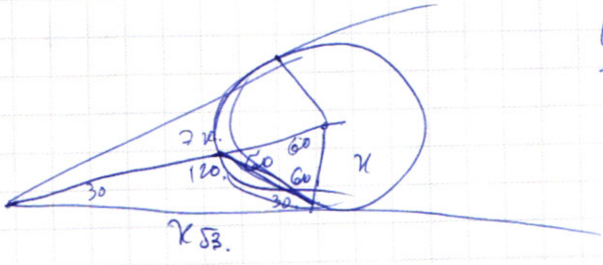
~~Ang~~

$\cancel{y \cdot m =} \quad my = n^2 \; ; \operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{n}.$

$m^2 + n^2 = k^2$ $\quad k = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4^2 \cdot \cos(2\alpha).$

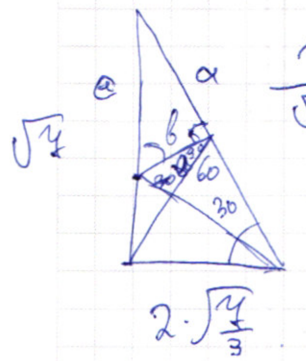
$k = 32 - 32(\cos(2\alpha)).$

$S = \frac{\sin 2\alpha \cdot 16}{2} = \sin(2\alpha) \cdot 8.$



$\frac{16\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}.$

$8\sqrt{3}$

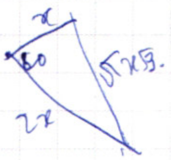


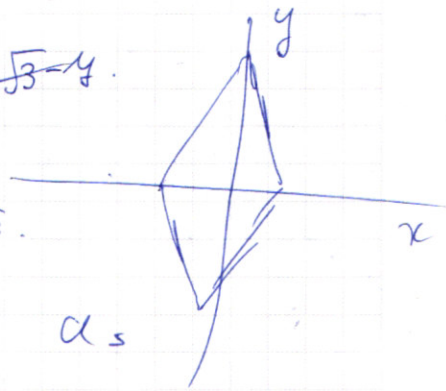
$\frac{7}{\sqrt{3}}$

$\frac{c\cdot\sqrt{3}}{7} = \frac{a}{\sqrt{7}} = \frac{b\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{7}}$

$\frac{b}{\frac{7}{\sqrt{3}}-a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $b\sqrt{3} = \frac{7-a\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$3b = a\sqrt{3}-7$



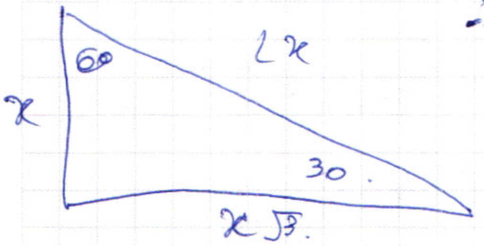


$\frac{a}{\sqrt{7}} = \frac{7-a\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}$

$a =$

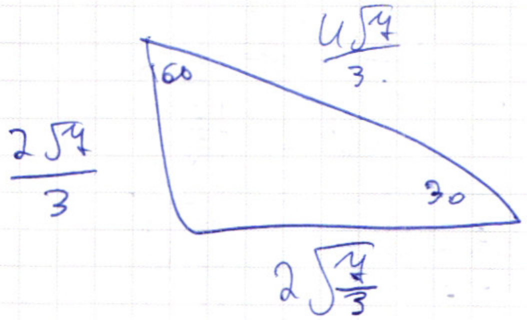
$2a\sqrt{21} = -a\sqrt{21}+7\sqrt{7}$

$3a\sqrt{21} = 7\sqrt{7}$



$a = \frac{7}{3\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{9}$

$tg = \frac{x}{x\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$



$\sqrt{\frac{28}{9}+\frac{28\cdot 3}{9}} = \frac{2\sqrt{28}}{3} = \frac{4\sqrt{7}}{3}$

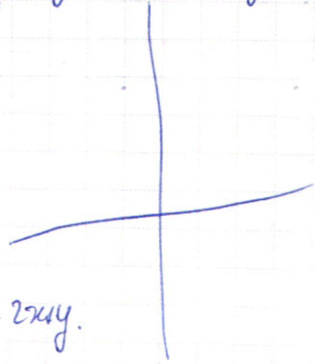
$2x+y \geq 4$, то.

$2x+y-4+2x+y>4$.

$\sqrt{\frac{28}{3}}$ $\frac{\sqrt{7}}{3}$

$2x+y>4$.

$|2x|+|y|+|4-(2x+y)|>4$.



$|2x|+|y|+4-(2x+y)>4$.

$x^2+y^2-2(x+2y)\leq 0$.

$2x+y>4$. $2x+y+|y|-4+2x+y$.

$2x+4$ $-4+2x+4>4$. $|2x|+|y|>2x+y$.

$|2x|+|y|>2x+y$.

$2x+y<4$.

$|2x|+|y|+4-(2x+y)>4$.

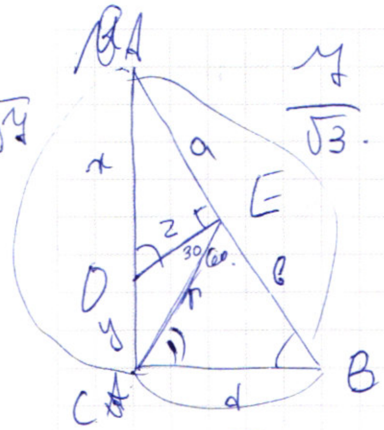
☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{7}{\sqrt{3}}$ $\sqrt{7}$

$\sqrt{7+7\cdot\frac{7}{3}} = \sqrt{\frac{21+28}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{7} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}}$

$AB \perp$ $\frac{AE}{AD} = \sqrt{\frac{3}{7}}$

$2\sqrt{\frac{7}{3}}$. $\frac{2\sqrt{7}\cdot 2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{7}}{3}$

$\cancel{\sin(180-\alpha-60)}$ $\sin(120-\alpha) = \frac{x}{}$

$\frac{x}{a+b} = \frac{a}{x+y} = \frac{2}{d}$; $\cancel{2a}$ $\boxed{S_1 = \frac{2\cdot a}{2}}$; $S_2 = \frac{1}{2}\cdot y\cdot 2\cdot\sin\alpha$.

$= \frac{r}{\sin\alpha} = \frac{4\sqrt{7}}{3}$. $r = \frac{\sin\alpha\cdot 4\sqrt{7}}{3}$. $S_1 = \frac{2\cdot a}{\cancel{2}}$

$\boxed{S_2 = \frac{1}{2}\cdot y\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}}$

$S_3 = \frac{\sin\alpha\cdot 4\sqrt{7}}{3}\cdot b\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin(60)$

$S_3 = \frac{\sqrt{3}\cdot 4\cdot\sqrt{7}\cdot b}{\sqrt{7}\cdot 3\sqrt{3}\cdot 2} = \frac{2b}{\sqrt{3}}$.

$\frac{x\cdot\sqrt{3}}{7} = \frac{a}{\sqrt{7}} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{2\sqrt{\frac{7}{3}}\,2\sqrt{7}}$

$y\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} + \frac{2b}{\sqrt{3}} = \frac{y\cdot 2\cdot 3 + 4\sqrt{7}b}{2\sqrt{7\cdot 3}}$.

$\frac{x}{\sqrt{7}}$?

$\frac{2\cdot a\cdot 2\sqrt{7\cdot 3}}{2\cdot(y\cdot 2\cdot 3+4\sqrt{7}b)} = \left(\frac{x\sqrt{3}}{7}\right)^2$.

$\cancel{xy\,2\cdot 3\sqrt{3}+x\cdot b}$

$3x^2\cdot y\cdot 2\cdot 3 + 3x^2\cdot 4\cdot\sqrt{7}\cdot b = 49\cdot 2\cdot a\cdot\sqrt{7\cdot 3}$

$x = \sqrt{\frac{49\cdot 2\cdot a\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{9y\cdot 2 + 12\sqrt{7}\cdot b}}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+\cancel{1x}+x^2-2x}=\frac{(x-2)^2}{3x^2-6x}=\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)}=$$

$$=\frac{(x-2)}{3x}.$$

$3x>0.$

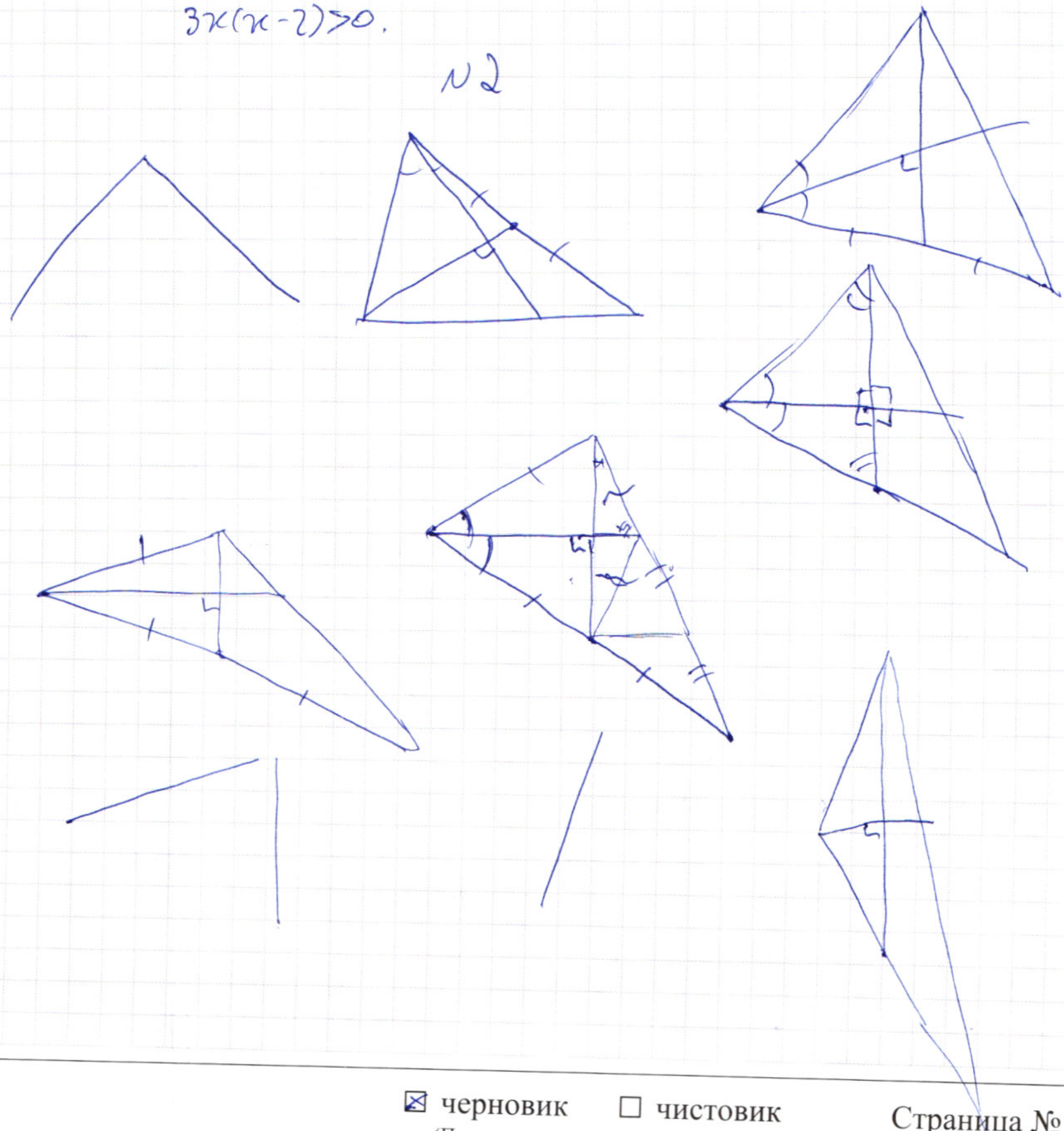
$x-2>0.$

$$\frac{x^2-6x+10-2x+6}{2x^2-4x+x^2-2x}=\frac{x^2-8x+16}{3x^2-6x}=\frac{(x-4)^2}{3x(x-2)}$$

$x-4\geq 0.$

$3x(x-2)>0.$

№2



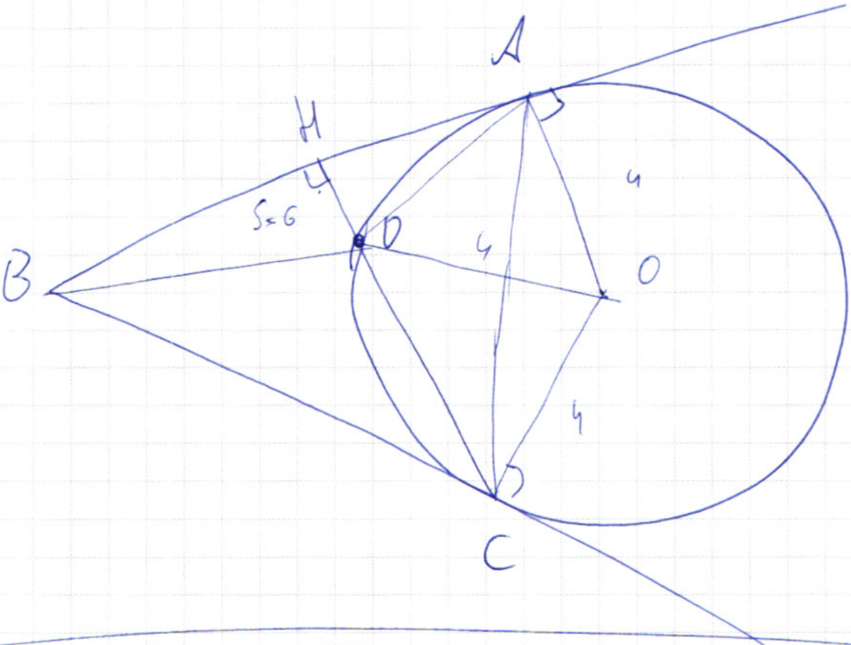
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

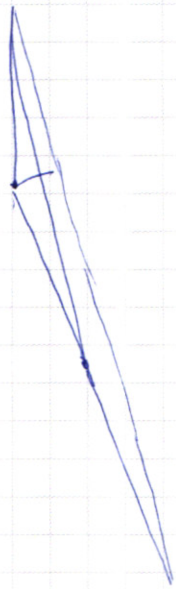
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

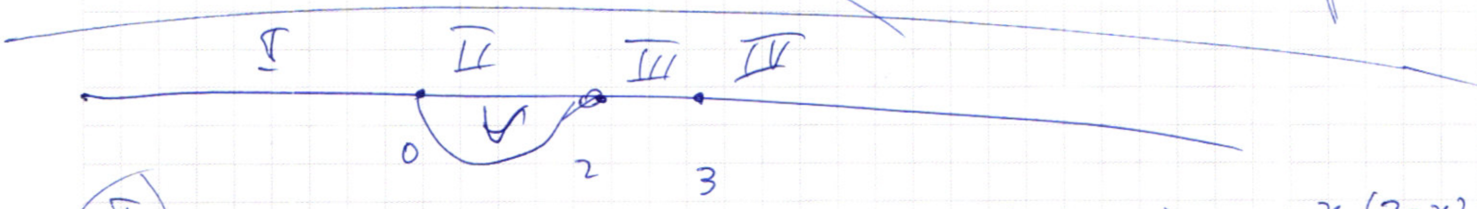
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА







I

$-x(x-2)$ $\quad -x(2-x).$

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x-2x+x^2}$$

$$\cancel{x^2} < \frac{x^2-4x+4}{3x^2-6x} =$$

$$= \frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \le 0 \qquad \frac{x-2}{3x} \le 0.$$

$3x<0.$

$x-2<0.$

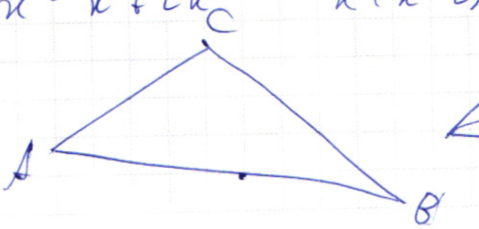
II

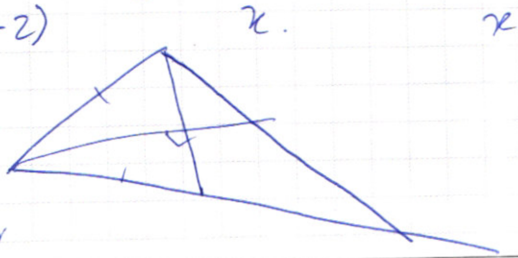
$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x-x^2+2x} = \frac{(x-2)^2}{x(x-2)} = \frac{x-2}{x}.$$

$x-2<0.$

$x \ge 0.$

x^2-2x





черновик ☑ чистовик ☐ (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

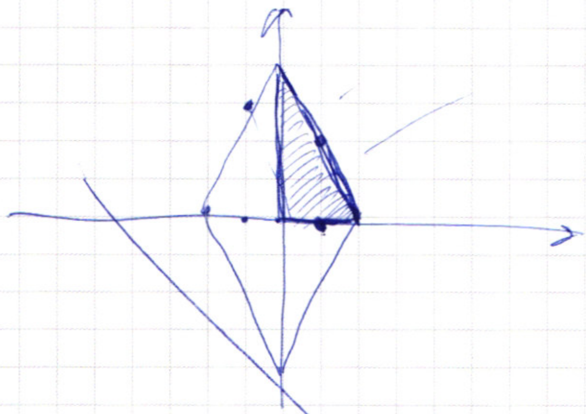
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$(x-1)^2-2+(y-2)^2-4 \le 0.$

$(x-1)^2+(y-2)^2 \le 6.$

$\sqrt{6}.$

$(x-1)^2+(y-3)^2=3.$

$x=-1. \quad y=1. \qquad 4+2-1=5$

$2+1+5.$

$-y-2y+5=0.$

$y_1 y_2=-5$

$y_1+y_2=-2.$

$x-2y=\sqrt{xy}$

$x=5-y^2.$

$5-y^2-2y=\sqrt{y(5-y^2)}.$

$(y^2+2y-5)(y^2+2y-5).$

$\boxed{y=1. \quad x=4.}$

$\boxed{y=-1;\ x=4}$

$y^4+2y^3-5y^2+2y^3+4y^2-10y$

$4-2=2.$

$-4+6=2.$

$-5y^2-10y+25=5y-y^3.$

$x+y^2=5.$

$-2.\ y=-3 \quad x=-4$

$y=-4 \quad x=-11.$

$y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0 \,|\, y-1$

$-\ y^4-y^3 \qquad y^3+6y^2-25$

$6y^3-6y^2-25y+25$

$-\ 6y^3-6y^2$

$-25y+25$

$-\ -25y+25.$

0

$-11+8.$

$y^3+6y^2-25 \,|\, y+5$

$-\ y^3+5y^2 \qquad y^2+y-5$

y^2-25

$-\ y^2+5y$

$-5y-25$

$-\ -5y-25.$

0

$2 \quad 8+6\cdot4=$

$-5.$

$-125+6\cdot25-25.$

☑ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (продолжение).

$x^2-2x-4y+y^2\le 0.$

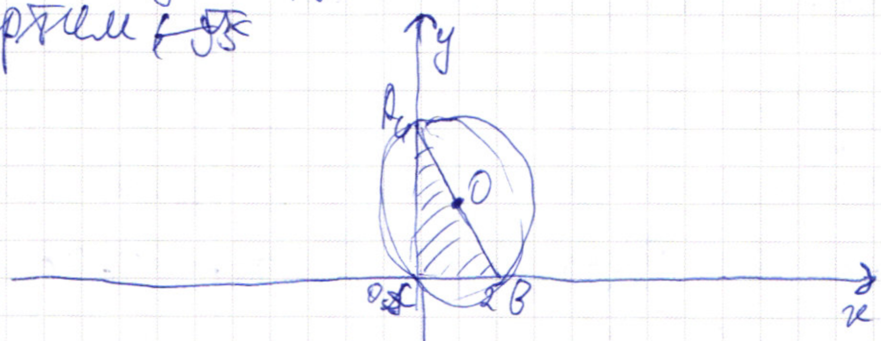
$x^2-2x-4y+y^2 = x^2-2x+1-1+y^2-4y+4-4 =$

$=(x-1)^2+(y-2)^2-5 \Rightarrow$

$(x-1)^2+(y-2)^2-5\le 0;$ $(x-1)^2+(y-2)^2 = 5.$

$(x-1)^2+(y-2)^2\le 5.$ Это уравнение окружности, где координаты центра $O(1;2)$, а $r=\sqrt{5}$.

Начертим ~~$r=\sqrt5$~~



Центр окружности ~~лежит не~~ равноудалён от вершин треугольника ABC; (т.к. по т-ме пифагора $CO=OA=OB=$ $=\sqrt{\cancel{4+}2^2+1}=\sqrt5$; $r=\sqrt5$. Т.к. $(x-1)^2+(y-2)^2\le 5$, то нам подходит область внутри окружности, но не подходить область ~~тру~~ треуг. $ABC \Rightarrow$

$S=S_{ок}-S_{ABC}$, где $S_{ок}$ – пл. окр. с центром O; S_{ABC} – пл. треуг. ABC; S – искомая (нужная) окружность) $\Rightarrow$

№ 6 (продолжение)

~~S = π~~. $S_{ок} = \pi r^2$, ~~r~~ $r = \sqrt{5}$; $S_{ABC} = 4 \cdot 2 : 2$. $\Rightarrow$

$S = 5\pi - 4$. Ответ: $5\pi - 4$.

№3.

$$\begin{cases} (I)\ x - 2y = \sqrt{xy} \\ (II)\ x + y^2 = 5 \Rightarrow x = 5 - y^2 \end{cases}$$

(I) $5 - y^2 - 2y = \sqrt{(5-y^2)y}$ (возв. в квад.)

$y^4 + 2y^3 \cancel{+} - 5y^2 + 2y^3 + 4y^2 - 10y - 5y^2 - 10y + 25 = 5y - y^3$.

$y^4 + 5y^3 - 6y^2 \cancel{+} - 25y + 25 = 0$. Из-за коэффициентов легко заметить, что $y = 1$, то $x = 4$.

~~$y^4 + 5y^3$~~

$(y-1)(y^3 + 6y^2 - 25) = 0$.

если y - целое, то (возм.) $y = \pm 1$ или $y = \pm 5$ или $y = \pm 25$ (делит. на свобод. коэф.), ~~то~~ $y = -5$ подх., то $x = -20$, то.

$(y-1)(y+5)(y^2 - y - 5) = 0$.

$y = 1$ или $y = -5$ или $y^2 - y - 5 = 0$

$D = \cancel{1 + 5^2 = 26}$; $1 + 4 \cdot 5 = 21$.

$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$, если $y = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$, то

$x = 5 - \frac{1 + 2\sqrt{21} + 21}{2} = 5 - 11 - \sqrt{21} = -6 - \sqrt{21}$.

~~если~~

если $y = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$, то $x = 5 - \frac{1 - 2\sqrt{21} + 21}{2} = 5 - 11 + \sqrt{21} = -6 + \sqrt{21}$.

соберем все корни и...

Ответ: $(4; 1); (-20; -5); (-6-\sqrt{21}; \frac{1+\sqrt{21}}{2}); (-6+\sqrt{21}; \frac{1-\sqrt{21}}{2})$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5 (продолжение)

$AD = AC - CD = \sqrt{7} - \frac{2}{3}\sqrt{7} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{7}$; а значит.

$\boxed{\frac{AD}{AC} = \frac{1\cdot\sqrt{7}}{3\cdot\sqrt{7}} = \frac{1}{3}}$. Найдём S_{AED}

$S_{ABC} = \frac{AC\cdot CB}{2} = \frac{\sqrt{7}\cdot 2\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{3}\cdot 2} = \frac{7}{\sqrt{3}}$.

$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \frac{7}{\sqrt{3}}$ (по т-ме Пифагора). по подобию $\triangle EDA$ и $\triangle CBA$.

$\frac{AD}{AB} = k$; $\frac{1\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{3\cdot 7} = \frac{1}{\sqrt{21}} = k$; а ко $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = k^2 \Rightarrow$

$\frac{S_{ADE}\cdot\sqrt{3}}{7} = \frac{1}{21}$; $S_{ADE}\cdot 21\cdot\sqrt{3} = 7$; $S_{ADE} = \frac{7}{21\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$; $S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

№6.

Рассмотрим первое уравнение в системе.

$|2x| + |y| + |4 - 2x - y| = 4$;

$|2x| + |y| + |4 - (2x + y)| = 4$.

Если $(2x + y) \leq 4$, то корней нет;

Если $(2x + y) > 4$, то.

$|2x| + |y| - 4 + 2x + y = 4$; $|2x| + |y| + 2x + y = 8$; докажем, что $|a| + |b| \geq a + b$ (a и b – целые числа);

если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то $|a| + |b| = a + b$; но если $a < 0$ или $b < 0$ ~~или $a+b$~~ $a<0$ и $b<0$, то $a < |a|$ или $b < |b|$, то $|a| + |b| > a + b$. все

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№6 (продолжение).

случаи рассмотрены ⇒ и т.д., а так вот.

$|2x| + |y| + 2x + y \ge 8$, при всех $(2x+y) > 4$, т.к.

$2x+y > 4$ и $|2x|+|y| > 4$ ⇒ все $(2x+y) > 4$ подходят.

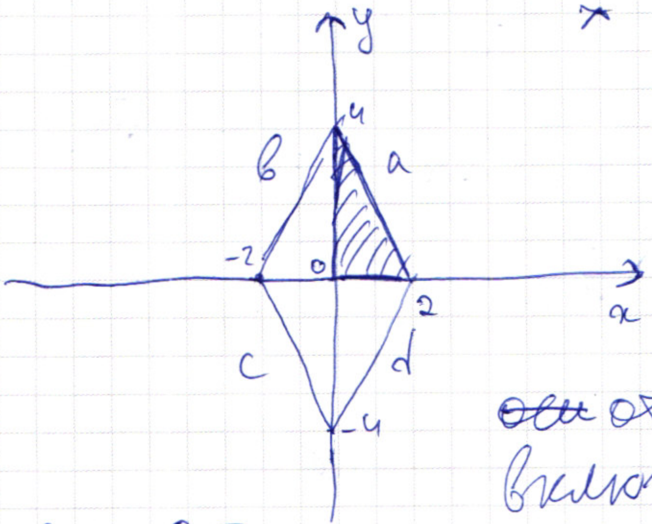
Если $(2x+y) < 4$, то

$|2x|+|y|+|4-(2x+y)| > 4$.

$|2x|+|y|+4-(2x+y) > 4$.

$|2x|+|y| > 2x+y$ только если $x<0$ или $y<0$.

~~Отве~~ Отметим решения уравнения на координатной плоскости.



* Контуры ромба включены внутрь ромба.

Закрашена область, которая не подходит. (включая прилегающие ~~оси~~ отрезки на осях x и y и включая отрезки a, b, c, d).

~~Объ~~ Объяснение: из случая $(2x+y)>4$ понятно, что a, b, c, d не подходят; из случая $|2x+y|>4$ ясно, что вся область вне ромба подходит. Из условия $(2x+y)<4$ ясно, что если $x<0 \cup y<0$, то область подходит.

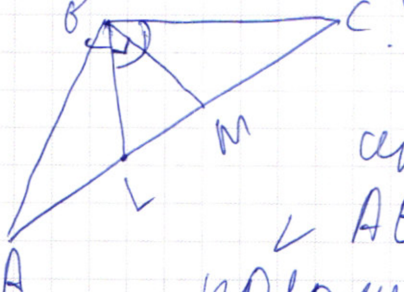
Рассмотрим второе уравнение в системе:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 (продолжение).

в равнобедренном треугольнике ($\triangle ACM$) ~~Б~~ биссектриса (AO), проведённая к основанию (CM) является высотой $\Rightarrow AO$ – высота $\Rightarrow AK \perp CM$. ч.т.д.

~~Б~~ Мы доказали случай если медиана и бисс. выходят из разных вершин. Докажем, что если медиана и бисс. выходят из одной вершины, то угол между ними не равен $90°$.



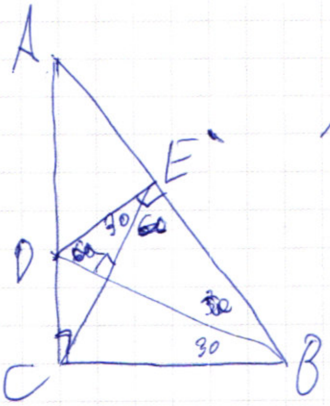
$\triangle ABC$; пусть BL – бисс; BM – медиана; то $\angle CBL = \frac{\angle ABC}{2}$, но ~~если угол~~ $\angle ABC < 180°$; $\Rightarrow \angle CBL < 90°$. Мы предположили, что $\angle LBM = 90°$, ~~то~~ но $\angle LBM < \angle CBL$ (это очевидно: один угол лежит в другом), то $\angle LBM < 90°$; противоречие $\Rightarrow$ возможен только случай, если бисс. и мед. выходят из разных вершин. Посчитаем кол-во возможных вариантов, если $P=600$ и стороны целочисл.; тогда пусть $a=x$; $b=2x$; $c=600-3x$ (a, b и c – стороны треугольника) $\Rightarrow x$ – целое, т.к. a целое, и c – целое; $0<c<600$, значит вариантов выбрать c целых $= 600:3-1 = 200-1 = \cancel{19}\ 199$ (-1, т.к. $c \neq 600$). Именно столько у нас вариантов выбора

№2 (продолжение)

треугольников, т.к. после выбора c ~~мы можем~~ две другие стороны k и $2k$; x.
треугольник со сторонами $[c; k; 2k]$ ~~и $[c; 2k; k]$~~ ~~равны~~ по ~~3 признаку (т.е.~~ (менять в принципе стороны местами бесполезно; треугольники разные получаться не будут) $\Rightarrow$

Ответ: таких треугольников 199.

№5.



$AC = \sqrt{7}$; $BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$; $\angle CED = 30°$; $DE \perp CB$.

$\triangle EDA$ подобен $\triangle CBA$, т.к. $\angle A$ - общ. и $\angle C = \angle DEA = 90° \Rightarrow$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{CB};$$

~~$AB = \sqrt{7 + 4\cdot\frac{7}{3}} = \sqrt{\frac{21+28}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$ (по т-ме Пифагора).~~

~~$\angle CEB = 90 - 30 = 60$.~~

$CDEB$ – вписанный в окр. ω, т.к. $\angle C + \angle DEB$ = (противополож. углы) $= 90° + 90° = 180°$. ~~DB – диаметр этой окр. ω, т.к. вписанный угол $C = 90$ опирается на DB, и т.к. DB – это диаметр, а CE – хорда, то $DB \perp CE$; $\angle EBD = 180 - 90 - 60 = 30$, т.к. $\angle A + \angle B + \angle C = 180$, то $\Rightarrow \angle EDB = 90 - 30 = 60$.~~

$\angle DEC$ и $\angle DBC$ опир. на одну и ту же дугу в окр. $\omega \Rightarrow$

$\angle DBC = \angle DEC = 30°$; $tg(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{CD}{CB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $CD = \frac{CB}{\sqrt{3}}$;

$CD = \frac{2\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{7}}{3}$; ε $AC = \sqrt{7}$ получ $\Rightarrow$ ~~$\frac{AD}{AC}$~~ $\Rightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Рассмотрим промежутки:

(I) $x\in(-\infty;0)$; (II) $x\in[0;2)$; (III) $x\in[2;3)$; (IV) $x\in[3;\infty)$.

(I) $\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}=\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x^2-2x}=\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)}$;

$\forall x\neq 2$ ($x\neq 0$) ($x<0$) $\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{3x(x-2)}=\frac{x-2}{3x}$. $x-2<0; 3x<0$

(т.к. $x<0$) $\Rightarrow \frac{x-2}{3x}>0$, т.е. на промежутке (I) нет решений.

(II) $\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x||x-2|}=\frac{(x-2)^2}{2x^2-4x-x^2+2x}=\frac{(x-2)^2}{x^2-2x}=$

$=\frac{(x-2)^2}{x(x-2)}$; т.к. $x\neq 2$ ($x\neq 0$) ($0<x<2$) $\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{x(x-2)}=\frac{x-2}{x}$

$x\neq 0$, т.к. иначе знаменатель будет $=0$

$x-2<0; x>0$ (т.к. $0<x<2$) $\Rightarrow \frac{x-2}{x}<0 \Rightarrow$

промежуток (II) ($x\in(0;2)$) является решением.

(III) $\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x||x-2|}=\frac{(x-2)^2}{2x^2-4x+x^2-2x}=\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)}$;

$x\neq 2$ (иначе знамен. $=0$) $\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{3x(x-2)}=\frac{x-2}{3x}$; $x-2>0$;

$3x>0$ (т.к. $2<x<3$, т.к. $x=2$ мы исключили) $\Rightarrow$

$\frac{x-2}{3x}>0 \Rightarrow$ промежуток не подходит.

(IV) $\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x||x-2|}=\frac{x^2-6x+10-2x+6}{2x^2-4x+x^2-2x}=\frac{x^2-8x+16}{3x^2-6x}=$

$\frac{(x-4)^2}{3x(x-2)}$; $(x-4)^2 \geq 0$; $3x>0$; $x-2>0$; (т.к. $3 \leq x$) $\Rightarrow$

$\frac{(x-4)^2}{3x(x-2)} \geq 0$ ~~только~~, а значит

$\frac{(x-4)^2}{3x(x-2)} \leq 0$ только если $\frac{(x-4)^2}{3x(x-2)} = 0 \Rightarrow x=4$.

в промежутке IV ($x \in [3;\infty)$) решением является только $x=4$.

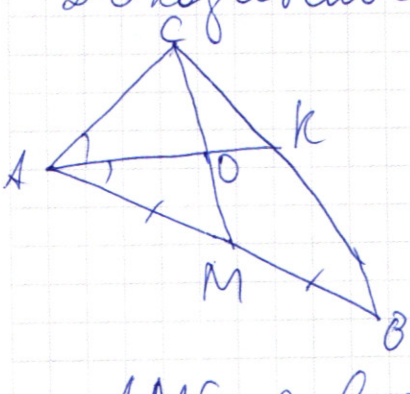
Итого: $x \in (0;2)$ или $x=4$.

Ответ: $x \in (0;2) \cup x=4$.

№2.

Я утверждаю, что если в треугольнике ABC сторона AB в ~~драз~~ 2 раза ~~вб~~ больше стороны AC, то в этом треугольнике медиана из вершины C будет перпендикулярна биссектрисе из ~~угла~~ вершины A.
(Буквы в треугольнике взяты не по условию задачи, я их придумал сам для удобства).

Доказательство:



Пусть CM — ~~би~~ медиана;
AK — биссектриса; $AB = 2 \cdot AC$ (по усл. моему).
Т.к. CM — мед. и $AB = 2 \cdot AC \Rightarrow$
$AM = MB = AC = \frac{AB}{2} \Rightarrow AC = AM \Rightarrow$

$\triangle AMC$ — равнобедренный (CM — основание);
Пусть точка пересечения AK и CM это O. (AKO