МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE\perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2\leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 18$, $1\leqslant y\leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $\triangle AED \sim \triangle ACB$ (по двум углам, $\angle A$ — общий).

$\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}$

$AD=\frac{AE\cdot AB}{AC}=\frac{\frac{7}{\sqrt3}\cdot AE}{\sqrt7}=\frac{7}{\sqrt3\sqrt7}\cdot AE=\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot AE$

1) $AD=\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\frac{1}{3}\sqrt3=\frac{\sqrt7}{3}$

верно! $AE=\frac{1}{3}\sqrt3$

2) $AD=\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\frac{5}{3}\sqrt3=\frac{5\sqrt7}{3}$.

$\frac{5\sqrt7}{3}>\sqrt7\to AD>AC$ — против.

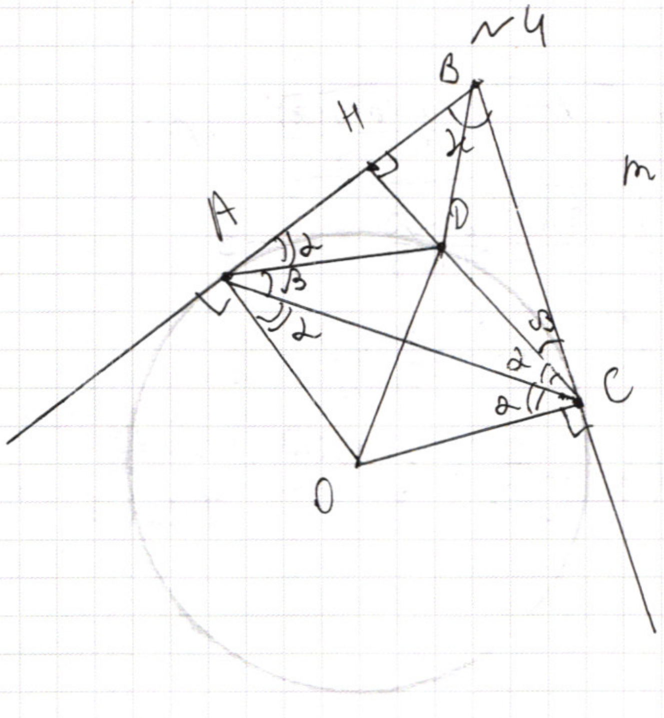
$\frac{AD}{AC}=\frac{\sqrt7}{3}:\sqrt7=\frac{1}{3}.$

$S_{\triangle AED}=\frac12 AD\cdot AE\sin\alpha=$

$=\frac12\cdot\frac{\sqrt7}{3}\cdot\frac13\sqrt3\cdot\frac{2}{\sqrt7}=\frac{\cancel{2}\cancel{\sqrt7}\cdot\sqrt3}{\cancel{2}\cdot3\cdot3\cdot\cancel{\sqrt7}}=\frac{\sqrt3}{9}.$

Ответ: $\frac{AD}{AC}=\frac13$, $S=\frac{\sqrt3}{9}$.

№4



1) $\frac{AB}{CK}=\frac{BC}{CK}=\frac{1}{\sin(90^\circ-\beta)}$, т.к. $AB=BC$, как касат. из 1 т.

2) Пусть $\angle BCK=\beta$.
Угол β — угол между касат. и секущ. $=\frac12\smile CD$, $\angle DAC$ — впис. $=\frac12\smile CD\to\angle DAC=\beta$.
Аналогично $\angle DCA=\angle HAD=\alpha$.

3) Т.к. $HC\parallel AO$ (две прямые, перпендик. AB), то $\angle CAO=\alpha$.

4) $\triangle AOC$ — равнобедр по опред. ($AO=OC=R$) $\to\angle ACO=\alpha$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

5) $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} BA \cdot AD \sin\alpha = \frac{1}{2} BC \cdot AD \sin\alpha$

По т. sin в $\triangle ADC$:

$\frac{AD}{\sin\alpha} = 2R$

$AD = 2R\sin\alpha$

$S = \frac{1}{2} BC \cdot 2R\sin^2\alpha = BCR\sin^2\alpha$

6) По т. cos в $\triangle AOC$:

$AC^2 = AO^2 + CO^2 - 2AO\,CO\cos 2(\alpha+\beta)$

$AC^2 = 32 - 32\cos 2(\alpha+\beta)$

7) По т. cos в $\triangle ABC$:

$32 - 32\cos 2(\alpha+\beta) = 2x^2 - 2x^2\cos(\cancel{x}\,90^\circ - \beta)$

$2x^2 = \frac{32(1-\cos 2(\alpha+\beta))}{\cancel{1-\cos\sin}\ 1-\sin\beta}$

$x = \cancel{16}\ 4\sqrt{\frac{1-\cos 2(\alpha+\beta)}{1-\sin\beta}}$

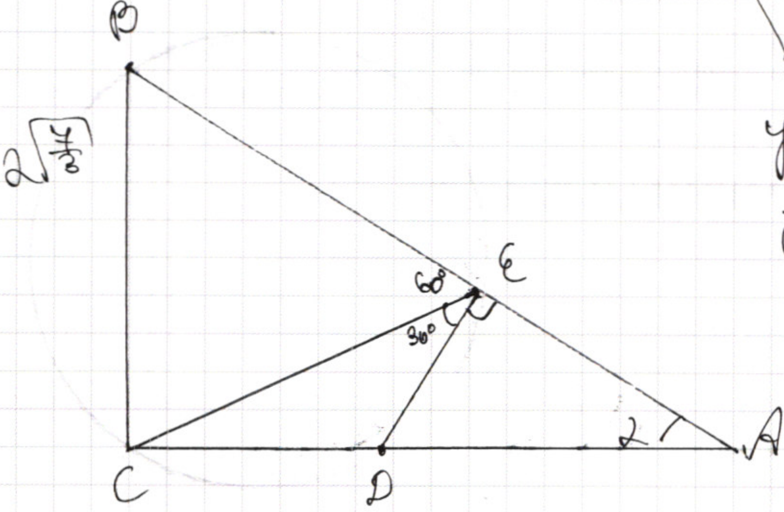
$S = 16\sin^2\alpha\sqrt{\frac{1-(1-2\sin^2(\alpha+\beta))}{1-\sin\beta}} = 6$

$8\sin^2\alpha \cdot \sqrt{\frac{2\sin^2(\alpha+\beta)}{1-\sin\beta}} = 3$

$64\sin^4\alpha \cdot \frac{2\sin^2(\alpha+\beta)}{1-\sin\beta} = 9$

$64\sin^4\left(\frac{90^\circ-\beta}{2}\right) \cdot \frac{2\sin^2\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)}{1-\sin\beta} = 9$

№5



1) По т. Пифагора:

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$\cancel{AB = \sqrt{7 + \frac{4\cdot 7}{3}} = \sqrt{\frac{28}{3}} = 2\sqrt{\frac{7}{3}}}$

$AB = \sqrt{7 + \frac{28}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$

1) $\triangle AED \sim \triangle ACB$ (по двум углам, $\angle A$ – общий):

$\frac{AE}{AC} = \frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AB}$

$\frac{AE}{ED} = \frac{AC}{BC}$

$AD \cdot AC = AE \cdot AB$

$\frac{AD}{AE} =$

$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE} = \frac{1}{\sin\alpha}$

2) $\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = 2\sqrt{\frac{7}{3}} : \frac{7}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{28}{3} \cdot \frac{3}{49}} = \sqrt{\frac{4\cdot 4}{4 \cdot 7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$

из $\triangle ABC$.

3) По т. sin в $\triangle AEC$:

$\frac{EC}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin \angle EA}$

$EC = \frac{AC \cdot \sin\alpha}{\sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{7} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 : \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

4) По т. cos в $\triangle ECA$:

$EC^2 = AE^2 + AC^2 - 2\, AE \cdot AC \cos\alpha$

По осн. тригон. тожд: $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$

$\frac{16}{3} = AE^2 + 7 - 2\, AE \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{\frac{3}{7}}$

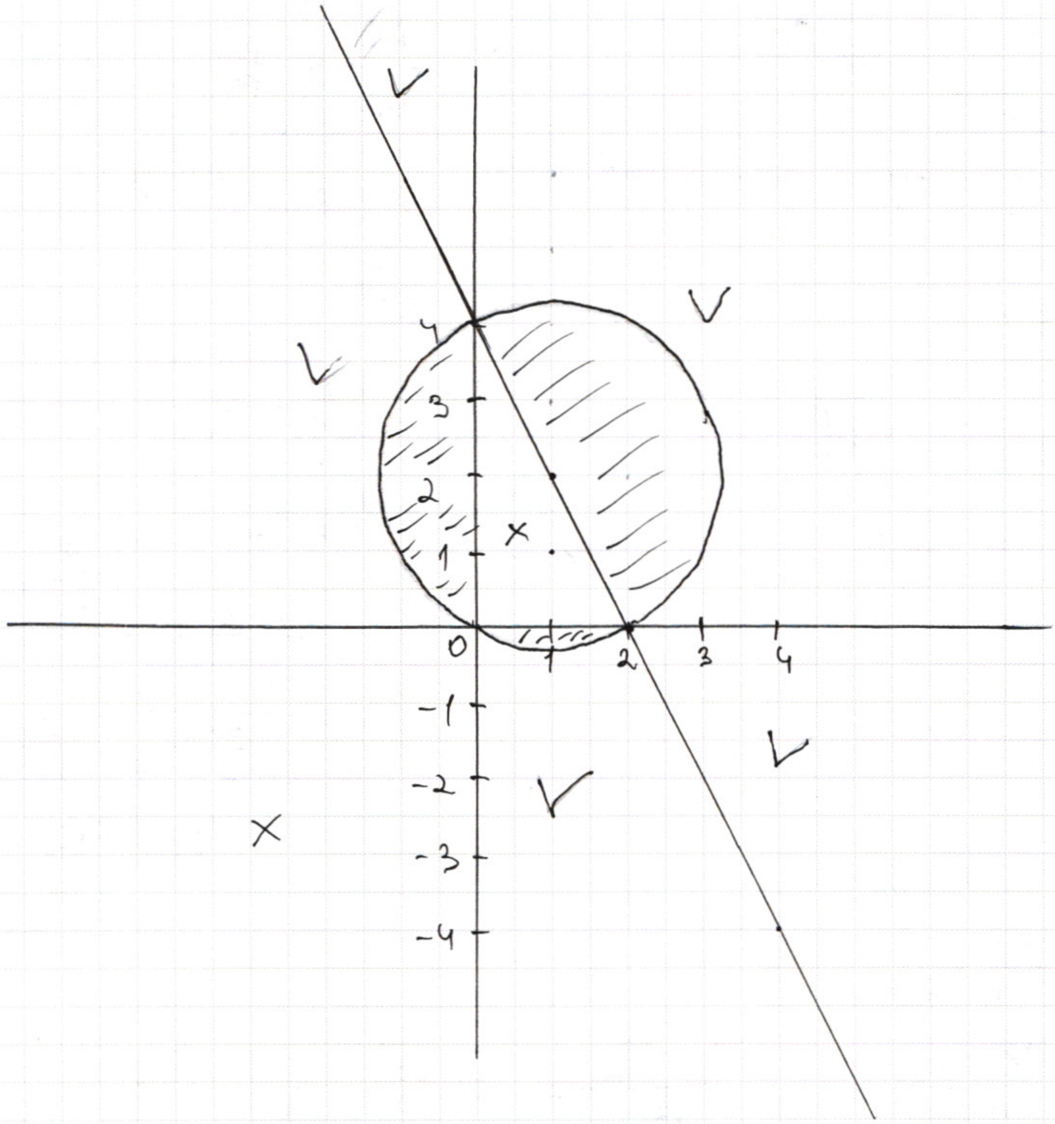
$\frac{16}{3} = AE^2 + 7 - AE \cdot 2\sqrt{3}$

$AE^2 - 2\sqrt{3}\, AE + \frac{5}{3} = 0$

$D = 12 - \frac{20}{3} = \frac{16}{3}$

$AE_{1,2} = \frac{2\sqrt{3} \pm \frac{4\sqrt{3}}{3}}{2} = \sqrt{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{3} = \sqrt{3}\left(1 \pm \frac{2}{3}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



• если $x<0$, $y\geq 0$, $4-2x-y<0$:

$-2x+y-4+2x+y>4$

$2y>8$

$y>4$

• если $x<0$, $y\geq 0$, $4-2x-y\geq 0$:

$-2x+y+4-2x-y>4$

$-4x>0$

$x<0$

• если $x<0$, $y<0$, $4-2x-y<0$:

$-2x-y-4+2x+y>4$

$8<0$ — неверно.

Получаем, что область часть круга и всех интервалов — это круг без треугольника.

$S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2 = 4.$

~~$S_0 = \pi r^2 = 3{,}14$~~ $S_0 = \pi r^2 = \pi\cdot 5 = 5\pi$

$S = S_0 - S_\Delta = 5\pi - 4.$

Ответ: $5\pi-4$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\begin{cases} x^2-2x-4y+y^2\le 0 \ (2) \\ |2x|+|y|+|4-2x-y|>4 \ (1) \end{cases}$$

(1) $2|x|+|y|+|4-2x-y|>4$

$4-2x-y=0$

$y=4-2x$ – уравнение прямой, делящей плоскость.

(2) $(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)-5\le 0$

$(x-1)^2+(y-2)^2\le 5$ – круг; $O(1;2)$, $R=\sqrt{5}$.

(1) • если $x\ge 0, y\ge 0$ и $4-2x-y\ge 0$, то

$2x+y+4-2x-y>4$

$4>4$ – неверно.

• если $x\ge 0, y\ge 0$ и $4-2x-y<0$, то

$2x+y-4+2x+y>4$

$4x+2y>8$

$y>4-2x$; I четверть ~~под~~ над прямой $y=4-2x$.

• если $x\ge 0, y<0$, $4-2x-y\ge 0$, то

$2x-y+4-2x-y>4$

$-2y>0$

$y<0$ – верно! ; IV четверть под прямой $y=4-2x$.

• если $x\ge 0, y<0, 4-2x-y<0$, то

$2x-y-4+2x+y>4 \to x>2$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Если $b=a$, то

$4a=600$

$a=150$.

Проверка:

$a=150 \to b=600-3\cdot150=150$ - не удв.

$a=149 \to b=600-3\cdot149=\cancel{14}\ 153$ - удв. ус.

$a\in[101;149] \longrightarrow 49$ вариантов.

Ответ: 49 треугольников.

№3

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \quad (1) \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

ОДЗ: $xy\geq0$

(1) $x-2y=\sqrt{xy}$ $\quad$?^{2}

$$\begin{cases} x-2y\geq0 \\ (x-2y)^2=xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq2y \\ x^2-4xy+4y^2-xy=0 \quad (2) \end{cases}$$

(2) $x^2-5xy+4y^2=0$

$D=25y^2-16y^2=9y^2$

$x_{1,2}=\dfrac{5y\pm3y}{2}=4y;\ y.$

не удв. ус.

$$\begin{cases} x = 4y \\ x + y^2 = 5 \quad (4) \end{cases}$$

(4) $\cancel{16y^2}$ $y^2 + 4y - 5 = 0$

$D = 16 + 4 \cdot 5 = 36$

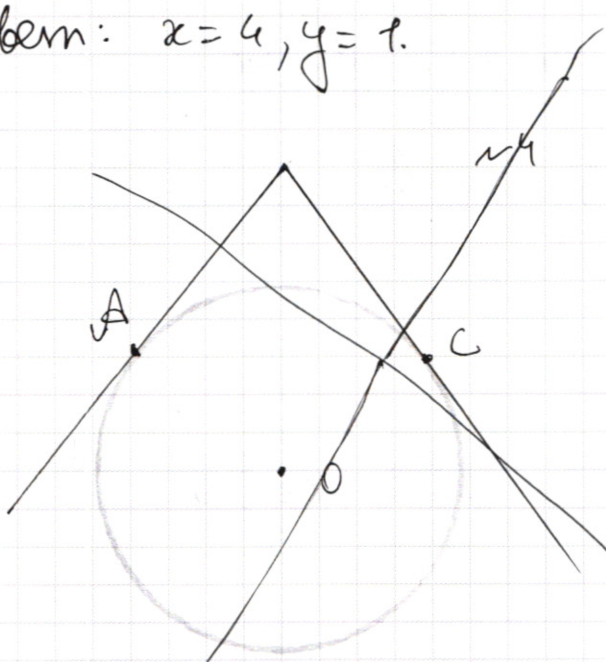
$y_{1,2} = \frac{-4 \pm 6}{2} = 1; -5.$

$y = 1 \rightarrow x = 4$ — $xy \geq 0$ – верно!

$y = -5 \rightarrow x = -20$ – не удв. усл. $x \geq 2y$.

Ответ: $x = 4, y = 1$.

№4



$\frac{1}{2} AB \cdot AD = 6$

$AB \cdot AD = 12$

$\frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin\beta = 6$

$\sin\beta = \frac{12}{AB \cdot AD}$

$\sin\beta = 2R\,AD$

$\alpha + 2\beta = 90^\circ$

$90^\circ - \alpha\beta = 180^\circ - 3\beta$

$\alpha\beta = 90^\circ$

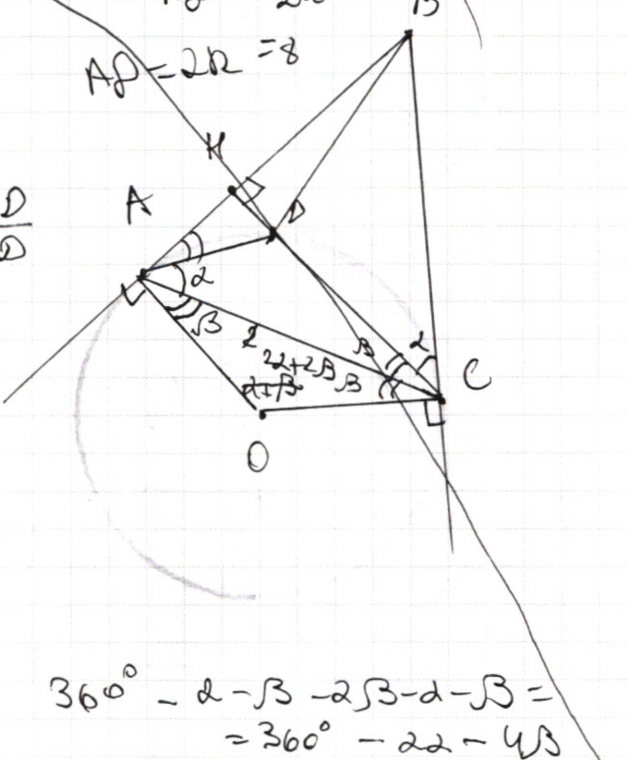
$\sin\beta = \frac{HD}{AD} = \frac{HD}{2R}$ $\sin\beta =$

$AD = 2R = 8$

$\frac{\sin\beta}{AD} = 2R$

$2R\,AD = \frac{HD}{AD}$

$2R\,AD =$



1) По усл. $S_{\triangle ABD} = 6$

$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot HD = 6$

$AB \cdot HD = 12$

2) $\frac{AB}{CK} = \frac{BC}{CK} = \frac{1}{\cos\alpha}$

$\beta + \beta + \alpha + \beta = 180^\circ$

$3\beta + \alpha = 180^\circ$

$\alpha = 180^\circ - 3\beta$

$2\beta + 2\beta + 2\alpha = 180^\circ$

$2\beta + \alpha = 90^\circ$

$360^\circ - \alpha - \beta - 2\beta - \alpha - \beta =$

$= 360^\circ - 2\alpha - 4\beta$

☐ черновик ☑ чистовик

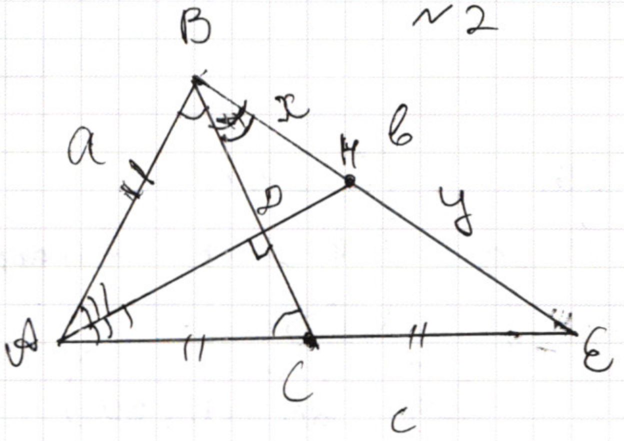
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l} \varnothing \\ x\in(0;2) \\ \varnothing \end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(0;2)$.

№2



1) $a+b+c=600$

2) По свойству биссектр: $\frac{x}{y}=\frac{a}{c}$

3) $\triangle ABD=\triangle ACD$ по катету и прилеж. острому углу (AD общая; $\angle BAD=\angle CAD$, т.к. AD – биссектр)

$AC=AB \rightarrow a=\frac{c}{2}$.

4) Т.к. $\triangle ABC$ – равнобедр по определению ($AB=AC$), то AD – еще и медиана $\rightarrow BD=CD$.

5) По т. Менелая в $\triangle$ ~~ABE~~ EBC и прямой AD:

$\frac{y}{x}\cdot 1\cdot\frac{\frac{c}{2}}{c}=1 \xrightarrow{\text{из}(2)} \frac{c}{a}=2 \rightarrow c=2a$.

б) $a+b+c=600$

$a+2a+b=600$

$\cancel{2a}$ $3a+b=600$

$a=1 \rightarrow b=597,\ c=2.$ – не удв. нерав. треуг.

~~a= a Нерав. треуг:~~

~~$a+c<b$ $\quad$ $b+a<c$ $\quad$ $c+b<a$~~

~~$3a<b$ $\quad$ $b+a<2a$ $\quad$ $2a+b<a$~~

~~$b<a$ $\quad$ $b<-a$ – вып. всегда~~

~~$\Rightarrow \begin{cases} b<a \\ b>3a \end{cases}$~~

b

Нерав. треугольника:

$\begin{cases} b<a+c \\ a<b+c \\ c<a+b \end{cases}$ $\quad \begin{cases} b<3a \\ a<b+2a \\ 2a<a+b \end{cases}$ $\quad \begin{cases} b<3a \\ b>-a \text{ – выполн. всегда} \\ b>a \end{cases}$

ОДЗ: $b\in(a;3a)$.

$3a+b=600$

Т.к. b должно быть в любом случае больше a, но меньше 3a, то ~~a=1,2,3~~ маленькие a не подходят:

$a=100 \rightarrow b=300$ – не удв. – крайний случай ОДЗ.

$a=99 \rightarrow b=600-3\cdot99=600-297=303$ – не удв. } проверка

$a=98 \rightarrow b=600-3\cdot98=600-294=306$ – не удв.

~~при росте a~~ при уменьшении a, b растет и ОДЗ не будет выполняться.

$a=101 \rightarrow b=600-303=297$ – верно!

до тех пор пока $b>a$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\le 0 \qquad x(x-3$$

Числитель:

$x^2-6x+10-2|x-3|=0$

1) Если $x-3\ge 0$:

$x^2-6x+10-2x+6=0$

$x^2-8x+16=0$

$(x-4)^2=0$.

2) Если $x-3<0$;

$x^2-6x+10+2x-6=0$

$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$

Знаменатель:

$2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|=0$

1) Если $x-2\ge 0$ и $x\ge 0 \to x\ge 2$:

$2x^2-4x+x(x-2)=0$

$2x(x-2)+x(x-2)=0$

$x(x-2)\cancel{(}\cdot 3=0$

$3x(x-2)=0$

2) Если $x-2<0 \to x<0 \to x<0$:

$2x^2-4x-x\cdot(2-x)=0$

$2x^2-4x-2x+x^2=0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$3x^2 - 6x = 0$

$3x(x-2)=0$

3) Если $x \geq 0$ и $x-2<0 \to x \in [0;2)$:

$2x^2 - \cancel{x}4x + x(2-x)=0$

$2x^2 - 4x + 2x - x^2 = 0$

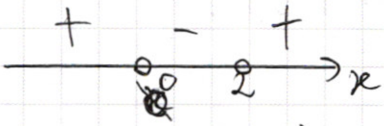
$x^2 - 2x = 0$

$x(x-2)=0$

Получаем:

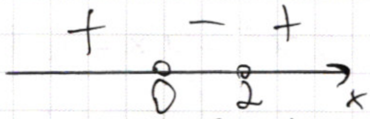
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0 \\ \dfrac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \leq 0 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} x \in [0;2) \\ \dfrac{(x-2)^2}{x(x-2)} \leq 0 \end{cases} \quad (2) \\ \begin{cases} x \in [2;+\infty) \\ \dfrac{(x-4)^2}{3x(x-2)} \leq 0 \end{cases} \quad (3) \end{array}\right.$$

(1)



$\begin{cases} x \in (0;2) \\ x < 0 \end{cases} - \varnothing$

(2)

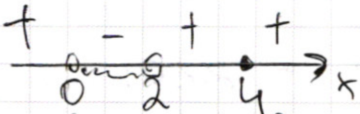


$\begin{cases} x \in (0;2) \\ x \in [0;2) \end{cases}$

$\downarrow$

$x \in (0;2)$

(3)



$\begin{cases} x \in (0;2) \\ x \in [2;+\infty) \end{cases} \to \cancel{x \in}\ \varnothing$