

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x - 3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x - 2|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy}, \\ x + y^2 = 5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.
5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{7}$, $BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4, \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

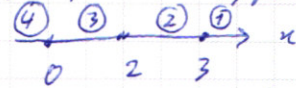
7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 18$, $1 \leq y \leq 18$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x-2|} \leq 0$$

N1

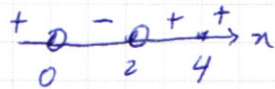
Сигналы расширения модулей:



① $x > 3$; $\frac{(x-4)^2}{3x(x-2)} \leq 0$

② $2 \leq x < 3$; $\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \leq 0 \rightarrow x \neq 2$

$\frac{x-2}{3x} \leq 0$



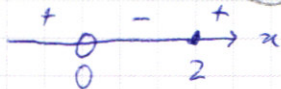
$\begin{cases} 0 < x < 2 \\ x > 3 \end{cases} \rightarrow \emptyset$



$\begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ 2 \leq x < 3 \\ x \neq 2 \end{cases} \rightarrow \emptyset$

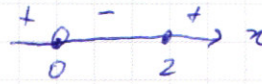
③ $0 \leq x < 2$; $\frac{(x-2)^2}{x(x-2)} \leq 0 \rightarrow x \neq 2$

$\frac{x-2}{x} \leq 0$



$\begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ 0 \leq x < 2 \\ x \neq 2 \end{cases} \rightarrow x \in (0; 2)$

④ $x < 0$; $x \neq 2$; $\frac{(x-2)^2}{3x} \leq 0$



$\begin{cases} x < 0 \\ 0 < x \leq 2 \\ x \neq 2 \end{cases} \rightarrow \emptyset$

Ответ: $x \in (0; 2)$
 $* 0 < x < 2$

N3

$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases} \quad * \sqrt{xy} \geq 0; xy \geq 0; x - 2y \geq 0$

при $x - 2y \geq 0$:

① $4y + y^2 = 5$

$y^2 + 4y - 5 = 0$

$(y+5)(y-1) = 0$

$y = -5 \rightarrow x = -20$ а) \emptyset

$y = 1 \rightarrow x = 4$ б) \checkmark

$(x - 2y)^2 = (\sqrt{xy})^2$

$x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$

$x(x - 4y) + y(4y - x) = 0$

$(x - y)(x - 4y) = 0$

$\begin{cases} x = y & \text{а) } \checkmark \\ x = 4y & \text{б) } \checkmark \end{cases}$

а) $x - 2y \geq 0$
 $-20 + 10 \geq 0$
 \emptyset

б) $4 - 2 \geq 0$
 \checkmark

$$\textcircled{1} \quad y + y^2 = 5$$

$$y^2 + y - 5 = 0$$

$$D = 1 + 20 = 21$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \text{ а) } (x=y) \\ y_2 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \text{ б) } \end{cases}$$

$$\text{а) } x - 2y > 0$$

$$-x > 0$$

$$x < 0$$

\emptyset

$$\text{б) } x \leq 0$$

$$x = y = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}$$

✓

Ответ: $(4; 1), (\frac{-1 - \sqrt{21}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{21}}{2})$

№6

$$\begin{cases} |2x| + |y| + 14 - 2x - y > 4 & \textcircled{I} \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0 & \textcircled{II} \end{cases}$$

$$\textcircled{II} \quad (x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 \leq 0$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 5$$

(уравнение окр-сти с центром в $(1; 2)$.)

Раскрытие модулей:

$$\text{а) } 2x + y \leq 4 \quad \text{б) } 2x + y > 4$$

$$\textcircled{1} \quad x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$\textcircled{2} \quad x < 0$$

$$y \geq 0$$

$$\textcircled{3} \quad x < 0$$

$$y < 0$$

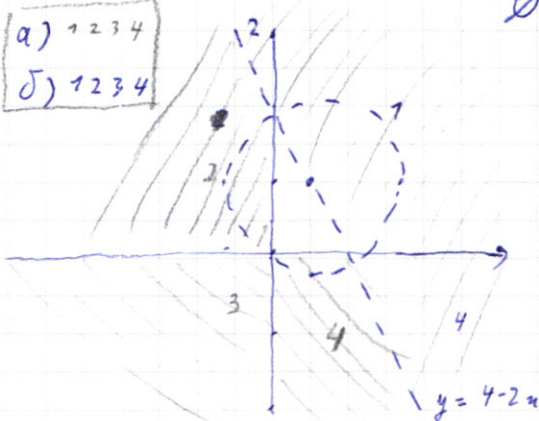
$$\textcircled{4} \quad x > 0$$

$$y < 0$$

$$\text{а) } \textcircled{1} \quad 4 > 4 \quad \textcircled{2} \quad x < 0 \quad \textcircled{3} \quad y < -2x \quad \textcircled{4} \quad y < 0$$

$$\text{б) } \textcircled{1} \quad y > 4 - 2x \quad \textcircled{2} \quad y > 4 \quad \textcircled{3} \quad -4 > 4 \quad \textcircled{4} \quad x > 2$$

$$\begin{cases} \text{а) } 1234 \\ \text{б) } 1234 \end{cases}$$



$$S = S_{\text{окр}} - S_{\Delta}$$

$$S_{\text{окр}} = \pi R^2 = (\sqrt{5})^2 \cdot \pi = 5\pi$$

$$S_{\Delta} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4$$

$$S = 5\pi - 4$$

Ответ: $S = 5\pi - 4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Дано: $\triangle ABC$
 AL - бис-се
 BO - мед.

$AL \cap BO = K$
 $AL \perp BO$

Решение:

Рассмотрим $\triangle ABO$, AK - бис-се, высота, тогда $\triangle ABO$ - р.т.б.;
 $AB = BO$, AK - медиана.

П.к. $BK = KO$ (AK - мед.), достроим $\triangle ABO$ до параллельн с диагональ-
 ной BO , AG ; тк $BO \perp AG$, $ABGO$ - ромб, след-но $AO = AB = BO = GO$

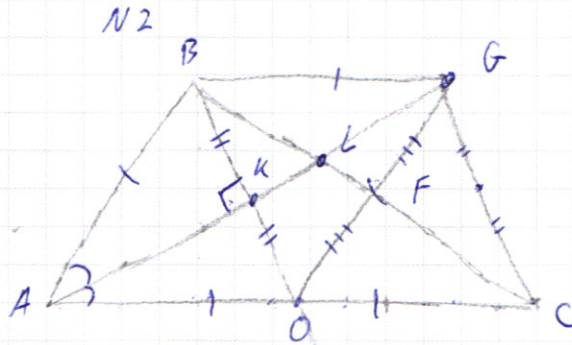
$BOCG$ - тоже паралл-грамм, тогда $BO = GC$.

Если $BOCG$ - пр-грамм, тк $OF = GF = \frac{1}{2} AB$

При $P_{ABC} = 600$ пусть $AO = x$, $BC = y$, тогда

$$3x + y = 600 \quad ; \quad BC > AB + AC, \text{ след-но } y > 3x, \text{ тогда}$$

$$y > 200; \quad x > 100$$



Дано:

$$AC = \sqrt{7}$$

$$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$\angle CED = 30^\circ$$

Найти: $SAED$ - ?

$$\frac{AD}{AC} = ?$$

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (по двум углам)

$$\cos \beta = \frac{CB}{AB} = \frac{2}{\sqrt{7}} \quad \cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$CE^2 = AC^2 + AE^2 - 2AC \cdot AE \cdot \cos \alpha$$

$$CE^2 = BC^2 + (AB - AE)^2 - 2BC \cdot (AB - AE) \cdot \cos \beta$$

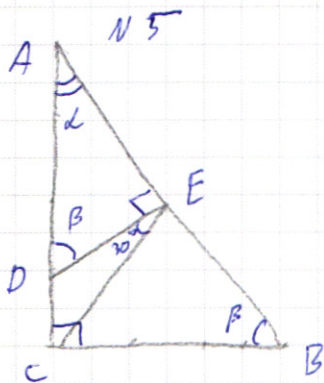
* Пусть $CE = a$,
тогда:

$$7 + a^2 - 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{3} \cdot a = 4 \cdot \frac{7}{3} + \left(\frac{49}{3} - \frac{24a}{\sqrt{7}} + a^2 \right) - \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{7}{\sqrt{3}} - a \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$7 - 2\sqrt{3}a = \frac{77}{3} - \frac{24a}{\sqrt{7}} + \frac{8a}{\sqrt{3}} - \frac{56}{3}$$

$$\frac{8a}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}a = \frac{24a}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{AD}{DC} = 3 \quad S = 7\sqrt{3}$$

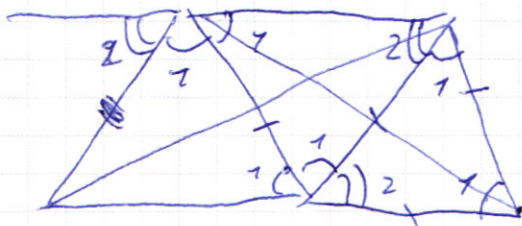
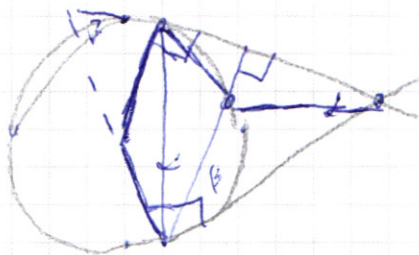
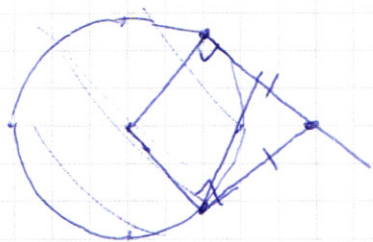


Решение:

$$AB^2 = \frac{49}{3} \quad (\text{По т. Пифагора})$$

$$AB = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

№ 4



ABC

$AE = a$

6 9

$$CE^2 = AC^2 + AE^2 - 2AC \cdot AE \cdot \cos \angle C$$

$$CE^2 = BC^2 + (AB - AE)^2 - 2BC \cdot \sin \angle C \cdot (AB - AE)$$

$$7 + a^2 - 2\sqrt{7}$$

$$\frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}}{7} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$\frac{47}{3} \quad 2AB \cdot AE$$

$$\frac{4\sqrt{7} \cdot 2}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}}$$

$$-7 \cdot \frac{8}{3} + \frac{8a}{\sqrt{3}}$$

$$7 + a^2 - 2\sqrt{3}a = \frac{28 + 49}{3} - \frac{24a}{\sqrt{7}} + a^2$$

$$7 - 7 \quad \frac{47 - 56}{21}$$

$$\frac{8a}{\sqrt{3}} - \frac{24a}{\sqrt{7}} + 2\sqrt{3}a = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4-2x-y| > 4 \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0 \quad \text{а)} \\ (x^2 - 1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 \leq 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 5 \end{cases}$$

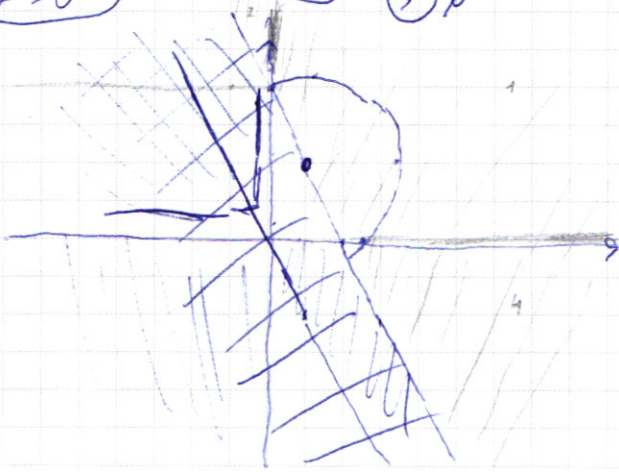
$$\begin{aligned} &\text{а)} \begin{cases} 2x + y \leq 4 \quad \text{①} \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \\ &\text{б)} \begin{cases} 2x + y \geq 4 \\ x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad \text{②} \quad \begin{cases} -''- \\ x < 0 \quad \text{③} \\ y < 0 \end{cases} \\ &\text{в)} \begin{cases} -''- \\ x \geq 0 \quad \text{④} \\ y < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

а) ① $2x + x + 4 - 2x - x > 4$ \emptyset
 ② $-2x - 2x + x > 4$ $x < 0$
 ③ $-4x - 2y + 4 > 4$ $-2x > y$

④ $-2y + 4 > 4$ $y < 0$

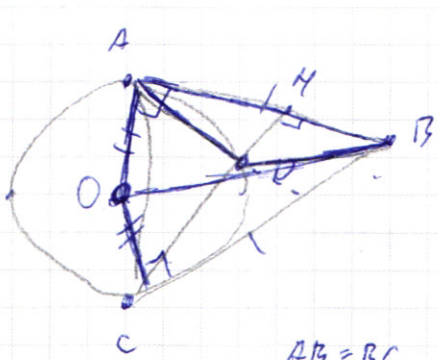
б) ① $4x + 2y - 4 > 4$ $4x - 6 > -2y$ $4 - 2x < y$ $y > 4 - 2x$
 ② $-2x$ $2y > 0$ $y > 0$
 ③ $-4 > 4$ \emptyset
 ④ $4x - 4 > 4$ $4x > 8$

а) ① \emptyset ; ② $x < 0, y \geq 0$ ③ $y < -2x, x < 0, y \leq 0, 2x + y \leq 4$ ④ $y < 0, x \geq 0$
 б) ① $y > 4 - 2x, x \geq 0, y \geq 0$ ② $y > 4, x < 0$ ③ \emptyset ④ $x > 2, y < 0$
 (y + 2x ≤ 4)
 y ≤ 4 - 2x
 (y + 2x > 4)
 y > 4 - 2x



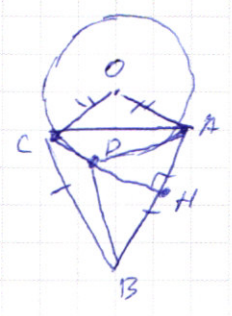
$$S = \pi R^2$$

$$\frac{5\pi}{2} = 2,5\pi$$



$\frac{AB}{CH} = ?$ $S_{ABD} = 6$
 $R = 4$

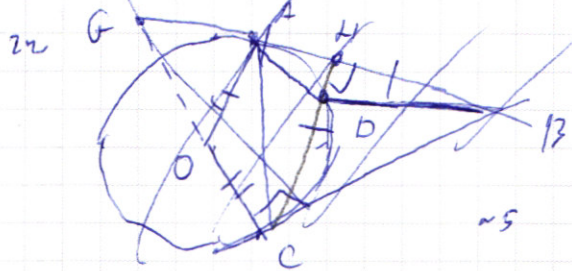
$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2R$ $S = pR$
 $S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DH$



$AB = BC$ (кас. к окруж. по двум радиусам)

$\angle BAC = \angle BCA$

$AB = \frac{2 \cdot 6}{DH}$



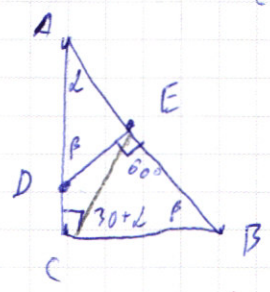
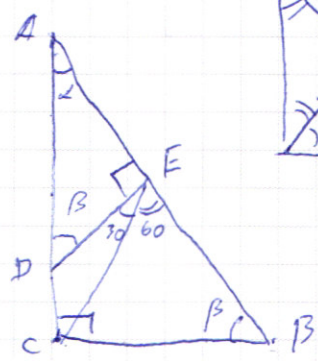
$AD \perp AC$ - ?

S_{AED} - ?

$AC = \sqrt{7}$

$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\angle CED = 30^\circ$



$AB^2 = 7 + 4 \cdot \frac{7}{3} = \frac{28 + 28}{3} = \frac{56}{3}$

$AB = 7\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

$\frac{DE}{CB} = \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$

$\cos \beta = \frac{CB}{AB} = \frac{2\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 7} = \frac{2}{\sqrt{7}}$

$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$

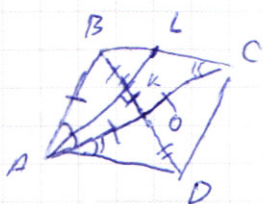
$BC^2 = CE^2 + BE^2 - 2CE \cdot BE \cdot \cos 60^\circ$ $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$BC^2 = CE^2 + (AB - AE)^2 - CE(AB - AE)$

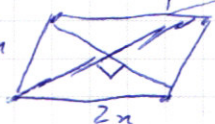
$AE = \sqrt{AD^2 + DE^2}$

$S_{ABC} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3} \text{ см}^2$

$2:20$
см



π



AC, BD - диаг.

$\angle ABO$ - $\pi/2$, т.к. AK - высота, диаг. ср.

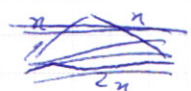
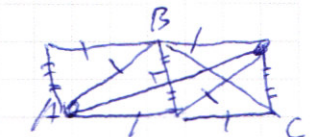
$P_{ABCD} = 600, AB, BC, AC \in \mathbb{N}$

$BC > 3\pi$

$y > 300 \quad \pi > 100$

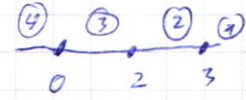
$BC = AB = \pi$

$3\pi + y = 600$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x-2|} \leq 0 \quad x \in \mathbb{R} \quad 0, 2, 3$$



$$① \frac{x^2 - 6x + 10 - 2x + 6}{2x^2 - 4x + x^2 - 2x} = \frac{x^2 - 8x + 16}{3x^2 - 6x} = \frac{(x-4)^2}{3x(x-2)} \quad (x \geq 3) \quad 4, 0, 2$$

$$② \frac{x^2 - 6x + 10 + 2x - 6}{3x(x-2)} = \frac{x^2 - 4x + 4}{3x(x-2)} = \frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \quad (2 \leq x < 3) \quad \emptyset \quad \left(\frac{x-2}{3x}\right)$$

$$③ \frac{(x-2)^2}{2x^2 - 4x - x^2 + 2x} = \frac{(x-2)^2}{x^2 - 2x} = \frac{(x-2)^2}{x(x-2)} \quad (0 \leq x < 2) \quad \emptyset \rightarrow \left(\frac{x-2}{x}\right)$$

$$④ \frac{(x-2)^2}{3x^2 - 6x} \Rightarrow ②$$

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 5 - y^2 - 2y = \sqrt{xy} \\ x = 5 - y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 + 2y - 5 = -\sqrt{xy} \\ y^2 + 2y - 5 \leq 0 \\ D = 4 + 20 = 24 \end{cases}$$

$$y^2 = 5 - x \quad x \leq 5$$

$$y = \sqrt{5-x} \quad x - 2\sqrt{5-x} = \sqrt{xy}$$

или $x - 2y \leq 0$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy$$

$$x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$$

$$x(x - 4y) + y(4y - x) = 0$$

$$(x-y)(x-4y) = 0$$

$$\begin{cases} x = y \\ x = 4y \end{cases} \quad \begin{cases} \emptyset \\ \text{①} \\ \text{②} \end{cases}$$

$$② \quad 4y + y^2 = 5$$

$$y^2 + 4y - 5 = 0$$

D =

$$(y+5)(y-1) = 0$$

$$y = -5, y = 1$$

$$x = -20, x = 4$$

$$① \quad x + x^2 = 5 \quad D^2 = 4ac \quad 4, 5 \quad 2\sqrt{21}$$

$$x^2 + x - 5 = 0$$

$$D = 1 + 20 = 21$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$x - 2x = \sqrt{x^2}$$

$$-x = x$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

$$x + y^2 = 5 \quad \emptyset$$

$$4 - 2 = \sqrt{4} \quad \checkmark$$

$$-20 + 10 = \sqrt{100} \quad \checkmark$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)