

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках S и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{29}$, $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leq x \leq 19$, $3 \leq y \leq 19$ и $f(x/y) < 0$.

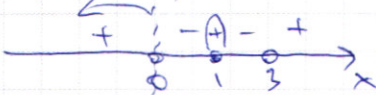
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3|} \leq 0$$

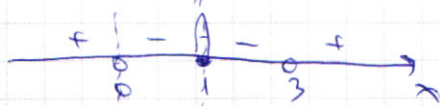
I) $\frac{x^2 - 2x + 5 + 4x - 4}{5x(x-3)} \leq 0$

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{5x(x-3)} \leq 0$$



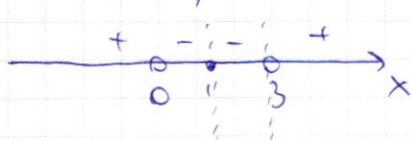
$x \in \emptyset$

II) $\frac{x^2 + 2x + 1}{3x(x-3)} \leq 0$



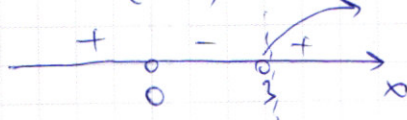
$x \in (0; 1)$

III) $\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{3x(x-3)} \leq 0$



$x \in [1; 3)$

IV) $\frac{x^2 - 6x + 9}{5x(x-3)} \leq 0$



$x \in \emptyset$

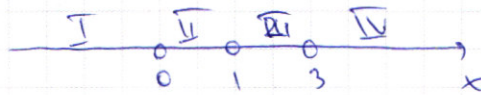
Ответ: $x \in (0; 3)$.

Рассмотрим знаки модулей:

1. ~~x~~

2. $x-1$

3. $x-3$



I. $x < 0$

1. < 0

2. < 0

3. < 0

II. $x \in [0; 1)$

1. ≥ 0

2. < 0

3. < 0

III. $x \in [1; 3)$

1. ≥ 0

2. ≥ 0

3. < 0

IV. $x \in [3; +\infty)$

1. > 0

2. > 0

3. ≥ 0

№3.

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} & \text{ОДЗ: } y \geq 2x \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

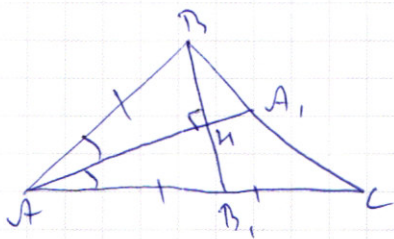
Возведем 1 уравн в сис. в квадраты (обе части) при $y \geq 2x$:

$$\begin{cases} y^2 - 4xy + 4x^2 = xy \\ 2y = 9 - x^2 \end{cases} \begin{cases} y^2 - 5xy + 4x^2 = 0 \\ y = \frac{9-x^2}{2} \end{cases} \begin{cases} y = x \text{ (по 1-й ветви)} \\ y = 4x \\ y = \frac{9-x^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x & \text{не подх. по ОДЗ} \\ y = \frac{9-x^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4x \\ y = \frac{9-x^2}{2} \end{cases} \begin{cases} y = 4x \\ 8x = 9 - x^2 \\ x^2 + 8x - 9 = 0 \end{cases} \begin{cases} \text{По 2-й ветви} \\ x^2 = 1 & y = 4 \\ x^2 = 9 & y = -36 \end{cases}$$

Ответ: $(1; 4); (-9; -36)$.



№2.

AA_1 - бис-са и высота $\Rightarrow \triangle ABB_1$ - равноб. \Rightarrow

$$\Rightarrow AB = AB_1 \Rightarrow AB = \frac{AC}{2}$$

Условие сводится к нахождению кол-ва треугольников, у которых одна из сторон равна x , вторая $= 2x$, а третья $= y$ и подходит по неравенству треугольника

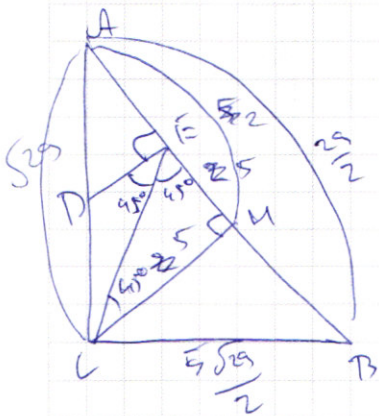
$$\begin{cases} 2x + x + y = 300 \\ 2x + x \geq y \\ y + x > 2x \\ 3x + y = 300 \\ y < 3x \\ y > x \end{cases}$$

$$4x < 300 < 6x$$

$$2x < 150 < 3x$$

$\begin{cases} x < 75 \\ x > 50 \end{cases}$ Для каждого значения $x \in (50; 75)$ значение y определяется однозначно \Rightarrow всего вариантов 24.

Ответ: 24.



$$S=5$$

$$AC = 5\sqrt{2}$$

$$BC = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$AB = 2\sqrt{2}$$

$$AB^2 = \frac{25 \cdot 29}{2^2} + 29 = \frac{841}{4}$$

Т. Пифагора

$$AB = \frac{29}{2} \subset AB$$

$$\sin \angle C = \frac{CH}{AC} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 2}{2 \cdot 29 \sqrt{2}} = \frac{5}{29}$$

Проведем высоту CH из C к гипотенузе AB .

$$\frac{CH}{AC} = \sin \angle C \Rightarrow CH = AC \cdot \sin \angle C = 5\sqrt{2} \cdot \frac{5}{29} = 25$$

$$CH^2 = AC^2 - AH^2 \Rightarrow CH = 2$$

$EH = CH$, т.к. $\angle CEH = 90^\circ$, $\angle CED = 45^\circ \Rightarrow \triangle CEH$ - равноб. $\Rightarrow EH = CH = 2$

$$\triangle ADE \sim \triangle AHC$$

$$k = \frac{AE}{AH} = \frac{AH - EH}{AH} = \frac{3}{5} = \frac{AD}{AC}$$

$$\frac{ED}{CH} = \frac{3}{5}$$

$$ED = 3 \cdot 2 = 6$$

$$ED = 1,2$$

$$S_{\triangle AED} = \frac{AE \cdot ED}{2} = \frac{3 \cdot 1,2}{2} = 1,8$$

Ответ: $AD:AC = 0,6$; $S_{\triangle AED} = 1,8$

$$\frac{AH}{EH} < 1$$

но равные стороны $\triangle ADE \sim \triangle AHC$
 $k = \frac{AE}{AH} = \frac{3}{5}$

За треугольник ABC , но такого не может быть!

т.е. лежит правее на AB , чем H но это не может быть!

т.к. AH - самый длинный отрезок, соединяющий вершину A и высоту CH \Rightarrow точка на AC . При данных условиях треугольника не существует. (до сущест. в усл.) (точнее сущест. в усл. стр. 4.)

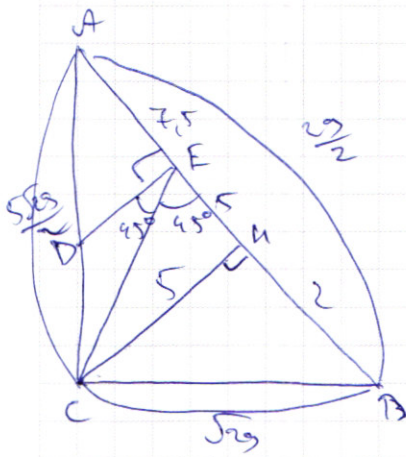
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$AB^2 = 2.5^2 + \frac{2.5 \cdot 2.5}{4} = 2.5^2 + \frac{7.25}{4} = \frac{7.25 + 25 \cdot 4}{4} = \frac{7.25 + 100}{4} = \frac{107.25}{4}$
 $AB = \sqrt{\frac{107.25}{4}} = \frac{\sqrt{107.25}}{2}$

$\sin \angle AED = \frac{5 \cdot \frac{\sqrt{25} \cdot 2}{2}}{2 \cdot 2.5} = \frac{5}{\sqrt{25}}$
 $\sin \angle ABC = \frac{\frac{\sqrt{25} \cdot 2}{2}}{2.5} = \frac{2}{\sqrt{25}}$

$CH = 5$
 $AM = 2$

$f(ab) = f(a) + f(b)$
 $f(ab) = f\left(\frac{ab}{b}\right) + f\left(\frac{ab}{a}\right)$
 $f(p) = p$
 $f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{x}{y^2}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right)$
 $f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{x}{y^2}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$
 $f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$
 $f(a) = f\left(\frac{a^2}{a}\right) + f\left(\frac{1}{a}\right) < 0$



$$\sqrt{5} = 8.$$

$$AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$$

$$BC = \sqrt{29}$$

по т. Пифагора:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow \frac{29}{2}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{29}{2}$$

проедем высоту CM из т. C к гипотенузе

AB.

$$\sin \angle CAB = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$CM = AC \cdot \sin \angle CAB = \frac{5\sqrt{29} \cdot 2}{2\sqrt{29}} = 5$$

по т. Пифагора:

$$MB = 2$$

$CM = EM$, так $\angle CFM = 90^\circ - \angle CFD = 45^\circ \Rightarrow \triangle CFM$ - равноб. + равнос.

$$CM = 5 = EM$$

$$AE = AB - MB - ME = \frac{29}{2} - 2 - 2 = \frac{29}{2} - \frac{4}{2} = 11,5$$

$\triangle AED \sim \triangle AEC$ (по двум углам, $\angle A$ - общий, $\angle AED = \angle AEC$ по построению)

$$\frac{AE}{AM} = \frac{AD}{AC}$$

$$\frac{11,5}{12,5} = \frac{AD}{AC}$$

$$S_{\triangle AED} = \frac{ED \cdot AE}{2} = \frac{3 \cdot 11,5}{2} = \frac{34,5}{2} = \frac{69}{4}$$

$$\text{Ответ: } S_{\triangle AED} = \frac{69}{4}, AD:AC = 0,6$$

$$\frac{3}{5} = \frac{ED}{CM}$$

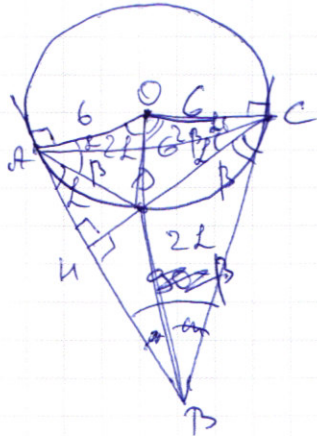
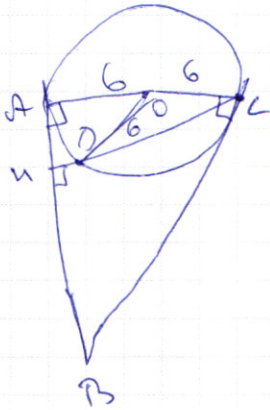
$$\frac{3}{5} = \frac{ED}{5}$$

$$ED = 3$$

$$ED = 3$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.4.



$$\frac{AB \cdot DH}{2} = 16$$

$$AB \cdot DH = 32$$

$$AB = CB \text{ (кас. к } \odot \text{ по 1-й)}$$

$$BO \text{ содержит } D$$

$$\frac{BC}{CH} = ?$$

$$90^\circ$$

$$90^\circ - \beta - 120^\circ - 2\alpha - 2\beta$$

$$2\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\angle ODH = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 2\alpha = 180^\circ - 2\alpha$$

$$= 4\alpha + 2\beta - 2\alpha =$$

$$= 2\alpha + 2\beta$$

$$\frac{BC}{x} = \frac{CH}{y}$$

$$180^\circ - 2\alpha - 2\beta = \angle DBH = 90^\circ - \angle DBH$$

$$90^\circ + 2\alpha + 2\beta = \angle DBH$$

$$90^\circ - 2\alpha - 2\beta = \angle DBH$$

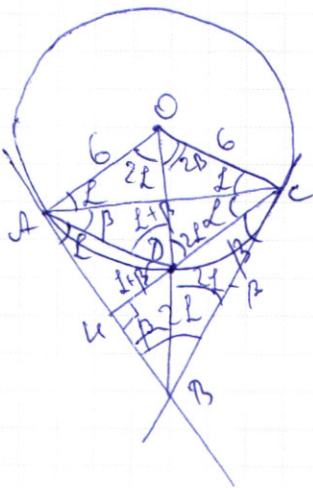
$$90^\circ + 2\alpha - 2\beta = \angle DBH$$

$$\beta = \angle DBH \Rightarrow BO \text{ содержит } D$$

$$6 + BD = 6 + \frac{DH}{\sin \beta}$$

$$AB^2 = OB \cdot CH$$

$$CH = \sqrt{AH \cdot HB}$$



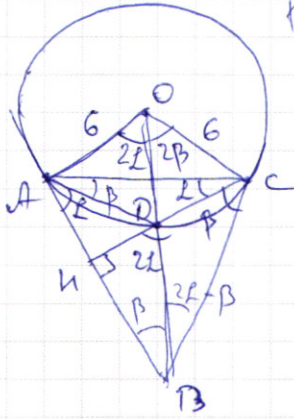
$$\triangle AOB \sim \triangle BHC$$

$$\frac{AO}{HB} = \frac{OB}{BC} = \frac{AB}{CH}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Дано:
 $\frac{AB \cdot KD}{2} = 15$

$\beta = 4$



Пусть $\alpha = \angle CAD$;

$\beta = \angle DCB$

Тогда $\angle AOD = 2\alpha$, $\overset{\curvearrowright}{AD} = \overset{\curvearrowright}{AD}$,
т.к. $\angle CAD = \frac{1}{2} \overset{\curvearrowright}{AD}$,

$\angle COD = 2\beta$

$\angle ACB = \alpha$ (впис.), $\angle CAD = \beta$ (впис.)

$2\alpha + \beta = 90^\circ$ (из $\triangle ACD$)

$\angle ODK = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 2\alpha = 180^\circ - 2\alpha = 2\alpha + 2\beta$
($\angle AOD$) ($\angle OAC$) ($\angle AOD$)

$\angle KDB = 180^\circ - \angle ODK = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$

$\angle KBD = 90^\circ - \angle KDB = 2\alpha + 2\beta - 90^\circ = \beta$

из $\triangle AOB$ имеем:

$\angle AOB + \angle OBA = 90^\circ \Rightarrow \text{т. } B, O, D \text{ лежат на } l$

$AB = BC$ (касат.,
провед. из 1 точки)
прямой.

$\angle ABC = 2\alpha = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta = 2\alpha$

$\triangle AOB \sim \triangle KBC$ ($\angle OAB = \angle CKB = 90^\circ$, $\angle OBA = \angle CKB$)

$\frac{AO}{KB} = \frac{OB}{BC} = \frac{AB}{CK}$

$\triangle AOB \sim \triangle KDB$

$\frac{AO}{KD} = \frac{AB}{KB}$

$AO \cdot KB = AB \cdot KD = 30$

$6 \cdot KB = 30$

$KB = 5$

$\frac{OB}{BD} = \frac{AO}{KD}$
 $\frac{OD+OB}{BD} = \frac{AO}{KD}$

$\frac{AO}{KB} = \frac{AB}{CK}$

$\frac{6}{5} = \frac{AB}{CK}$

Ответ: $AB : CK = 6 : 5$.

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 - 3y + \frac{7}{4} \leq \frac{7}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dots \\ (x-1)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 \leq \frac{7}{4} \end{cases}$$

Из 1 уравнения имеем x

$S: 7.$

$$\begin{cases} f(ab) = f(a) + f(b) \\ f(p) = p, p \in \text{прости.} \end{cases}$$

$f(ab)$ = сумма простых чисел, на которые можно разбить число ab

$$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$$

$$x \in [3; 15]$$

$$y \in [3; 15]$$

$$|x| + |y| > |x+y| \text{ когда?}$$

$$|3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6 \text{ при } 3x + 2y > 6$$

при

$$6 - 3x - 2y < 0$$

$$3x + 2y > 6$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№: 7.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(ab) = f(a) + f(b) \\ f(p) = p, \quad p \in \text{простые} \end{array} \right\} \Rightarrow f(ab) = \text{сумма простых делителей числа}$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(p_1) + f(p_2) + f(p_3) \dots + f(p_n), \text{ где } p_i - \text{простые делители } \frac{x}{y}. \text{ и}$$

эта сумма > 0

Ответ: 0.

№: 6.

$$\left\{ \begin{array}{l} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 - 3y + \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 \leq \frac{13}{4} \end{array} \right.$$

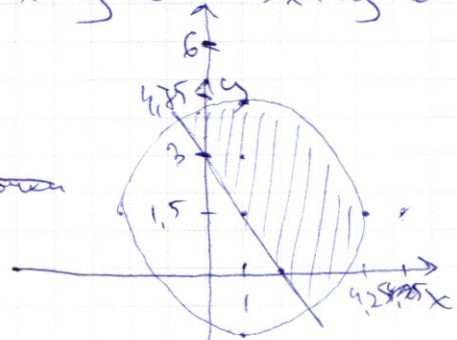
$$\left\{ \begin{array}{l} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6 \\ (x-1)^2 + (y-1,5)^2 \leq \frac{13}{4} \end{array} \right. \text{ - окружность с } r = \frac{\sqrt{13}}{2} \text{ и все}$$

точки внутри неё

$$|3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6 \text{ при } 6 - 3x - 2y < 0 \Rightarrow 3x + 2y > 6$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y > 6 \\ (x-1)^2 + (y-1,5)^2 \leq \frac{13}{4} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x > 6 - 2y \Rightarrow 2y > 6 - 3x \\ (x-1)^2 + (y-1,5)^2 \leq \frac{13}{4} \end{array} \right. \text{ - выше прямой точки}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} y > 3 - 1,5x \text{ - прямая через центр окружности } \Rightarrow \text{ диаметр } \Rightarrow \\ (x-1)^2 + (y-1,5)^2 \leq \frac{13}{4} \end{array} \right. \text{ площадь фигуры, заданной}$$

систем $=$ половине площади круга.

$$\frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi \cdot \frac{13}{4}}{2}$$

Ответ: $\frac{13\pi}{8}$.



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

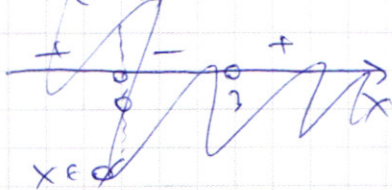
$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x(x-3) + |x||x-3|} \leq 0 \quad \sqrt{=1.}$$

$$\frac{x^2 - 2x + 1 + 4 - 4|x-1|}{4x(x-3) + |x||x-3|} \leq 0$$

$$1) \frac{x^2 - 2x + 5 + 4|x-1|}{4x(x-3) + |x||x-3|} \leq 0$$

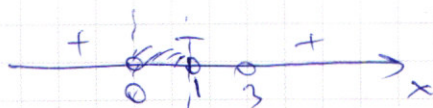
$$\frac{x^2 + 2x + 9}{(x-3)(4x+x)} \leq 0$$

$$\frac{x^2 + 2x + 9}{5x(x-3)} \leq 0$$



$$2) \frac{x^2 - 2x + 5 + (x+4)}{4x(x-3) - x(x-3)} \leq 0$$

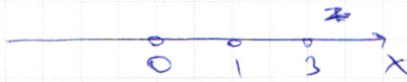
$$\frac{x^2 + 2x + 9}{3x(x-3)} \leq 0$$



$$x \in (0; 1)$$

$$4x(x-3) + x(x-3)$$

Рассматриваем знаки модулей:



1. $|x|$

2. $|x-1|$

3. $|x-3|$

$x \leq 0$

1. < 0

2. < 0

3. < 0

2) $x \in [0; 1)$

1. > 0

2. < 0

3. < 0

3) $x \in [1; 3)$

1. > 0

2. > 0

3. < 0

4) $x \in [3; +\infty)$

1. > 0

2. > 0

3. > 0

$\sqrt{3}$.

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} / (1) \text{ ODB}; \text{ } y \geq 2x \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - 4xy + 4x^2 = xy \\ \text{ } \end{cases}$$

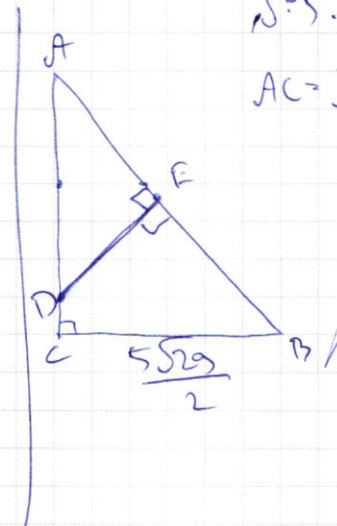
$$\begin{cases} y^2 - 5xy + 4x^2 = 0 \\ y^2 = \frac{9-x^2}{2} \end{cases}$$

т.о. т. Вуета;

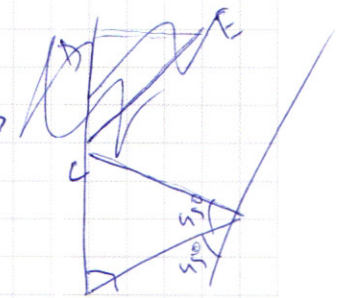
$$\begin{cases} y = x \\ y = 4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x \\ 2x = 9 - x^2 \\ y = 4x \\ 8x = 9 - x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + 2x - 9 = 0 \\ y = 4x \\ x^2 + 8x - 9 = 0 \\ \begin{cases} x = 1 & y = 4 \\ x = -9 & y = -36 \end{cases} \end{cases}$$



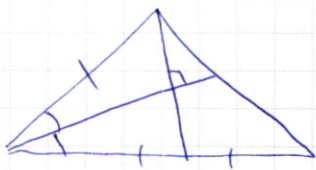
$\sqrt{5}$.
 $AC = \sqrt{29}$



не похж. по ODB:

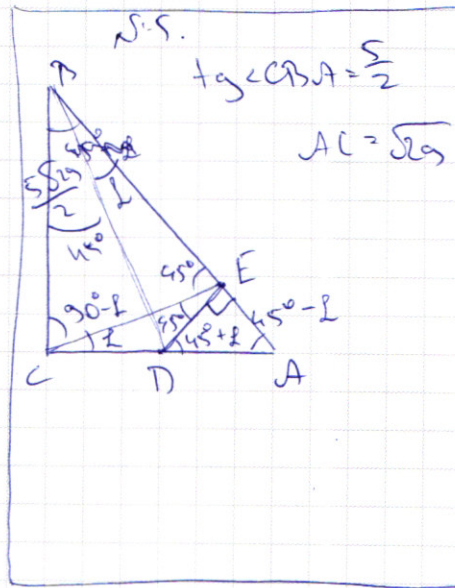
$$D = 1 + 9 = 10 \quad \begin{cases} x = -1 \pm \sqrt{10} \\ x = -1 - \sqrt{10} \end{cases} \quad \begin{cases} y = +\sqrt{10} - 1 \\ y = -1 - \sqrt{10} \end{cases}$$

$\sqrt{2}$.



Условие сводится к нахождению кента
треугольников, у которых одна из сторон $2x$,
другая $2x$, а третья y подходит по неравенству
треугольника

$$\begin{cases} 3x + y = 300 \\ 2x + x = y \\ y + x = 2x \\ 4x \leq 300 \\ 2x \leq 150 \\ \begin{cases} y \leq 3x \\ y \geq x \end{cases} \end{cases}$$



~~80~~

Для каждого из значений
 x значение y определено
 \Rightarrow вариантов 2.