МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE\perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2\leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 18$, $1\leqslant y\leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

$\frac{x^2-4x+4}{x(x-2)} \leq 0 \quad | \cdot x>0$, т.к. $x\in(0;2)$

$\frac{(x-2)^2}{x-2} \leq 0$

Сократим на $x-2\neq 0$ (по огр-ям x)

$x-2\leq 0$

$x\leq 2$

Значит, $\begin{cases} x\in(0;2) \\ x\leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(0;2)$

4. $x<0$:

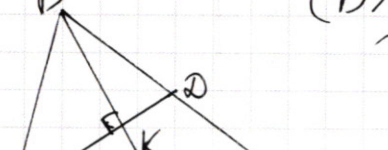
$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x(x-2)+x(x-2)} \leq 0$

$\frac{x^2-4x+4}{3x(x-2)} \leq 0 \quad | \cdot 3x(x-2)>0$, т.к. $x<0$

$(x-2)^2 \leq 0 \Rightarrow x=2$, но $x=2$ не удв. усл-ию $x<0$.

5. Итого: $\left[\begin{array}{l} x=4 \\ x\in(0;2) \end{array}\right.$ Отв: $x\in(0;2)\cup\{4\}$

Задача 2 | 1. Рассмотрим треуг-ик, у которого одна из бисс. перп. одной из мед-н



(BM - медиана, AD - бисс., $K=BM\cap AD$)

Заметим, что в ΔABM AK явл. бисс. и выс. $\Rightarrow \Delta ABM$ - р/б (по призн. р/б Δ)

Значит, $AB=AM=\frac{1}{2}AC$. То есть, если в треуг. одна из ~~мед~~ мед. $\perp$ одной из бисс, то одна из сторон этого Δ вдвое меньше другой. Докажем, что это критерий. Рассмотрим Δ, в котором одна из сторон вдвое меньше другой ($AB=\frac{1}{2}AC$):

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

Заметим, что при $x=0$ и $x=2$ знаменатель обращается в ноль. Значит, $\boxed{\begin{matrix} x\ne 0\\ x\ne 2\end{matrix}}$ (*)

Рассмотрим случаи:

1. $x\ge 3$:

$$\frac{x^2-6x+10-2x+6}{2x(x-2)+x(x-2)}\le 0$$

$$\frac{x^2-8x+16}{3x(x-2)}\le 0 \quad \Big|\cdot 3x(x-2)>0,\ \text{т.к. } x\ge 3$$

$$x^2-8x+16\le 0$$

$$(x-4)^2\le 0 \Rightarrow x=4.$$

2. $x\in(2;3)$:

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x(x-2)+x(x-2)}\le 0$$

$$\frac{x^2-4x+4}{3x(x-2)}\le 0 \quad \Big|\cdot 3x(x-2)>0,\ \text{т.к. } x\in(2;3)$$

$(x-2)^2\le 0 \Rightarrow x=2$, но $x=2$ не удв. огр-ям (*).

$x=2$ — не реш-ие

3. $x\in(0;2)$:

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x(x-2)-x(x-2)}\le 0$$

Итого:

$$\begin{cases} a>100 \\ a<150 \\ b>150 \\ b<300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} a\in(100;150) \\ b\in(150;300) \end{matrix} \Rightarrow$$ Т.к. по усл-ию стороны целые, то $a\in[101;149]$, $b\in[151;299]$ (4)

Заметим, что для $\forall a\in[101;149]$ $\exists$ такой треуг., что его пер. $=600$ и ~~одна из сторон вдвое меньше др~~ его стороны равны $a, 2a, b$.

Действительно, ведь:

$101\le a\le149$

$303\le 3a\le 447$

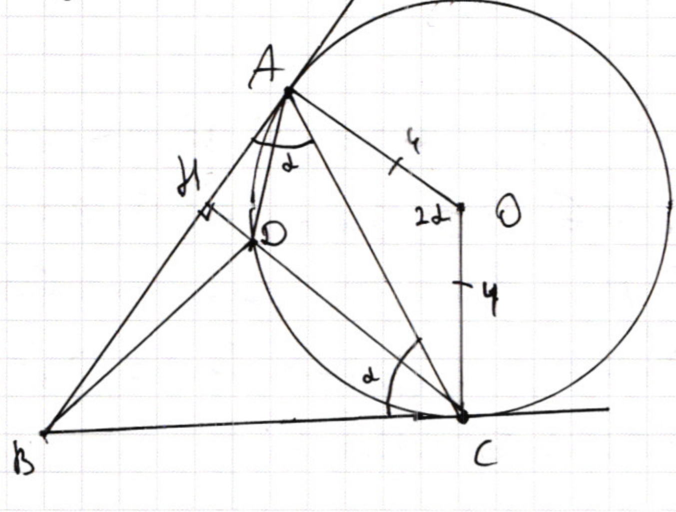
$-447\le -3a\le -303$

$153\le 600-3a\le 297$

Т.к. $600-3a=b$, то $153\le b\le 297$, что удв. огр-ию (4). Значит, такой Δ сущ. $\Rightarrow$ таких треуг. $149-101+1=49$ (кол-во возможных зн-ий a от 101 до 149)

Отв. 49

Задача 4)



1. Пусть $\angle AOC=2\alpha$. Тогда $\smile ADC=2\alpha$ (т.к. $\angle AOC$ – центр.)

$\Downarrow$

$\angle BAC=\angle ACB=\alpha$ (по т-ме об угле между касат. и хорд.)

$\Downarrow$

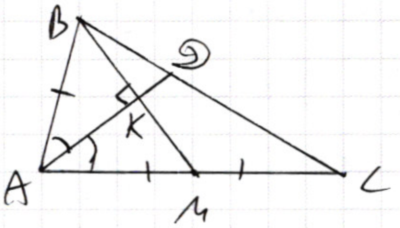
ΔABC – р/б (по пр. р/б Δ);

$\angle ABC=180-2\alpha$ (по т-ме о $\Sigma\angle$ в Δ)

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Докажем, что бисс. $AD \perp$ мед. BM:
Заметим, что $AM = AB = \frac{1}{2}AC$ (т.к. M – сер. стор. AC) $\Rightarrow \triangle ABM$ – р/б, а т.к. AK – бисс. $\triangle ABM$, то AK также явл. высотой $\triangle ABM$ (по св-ву р/б $\triangle$).

2. Таким образом, одна из бисс. $\triangle \perp$ одной из мед. $\triangle$ тогда и только тогда, когда одна из сторон треуг. вдвое меньше другой. Найдём кол-во таких $\triangle$ с периметром 600. Пусть стороны этого треуг. равны $2a$, a, b. Тогда:

$$\begin{cases} 2a+a+b=600 \\ 2a+a>b \\ 2a+b>a \\ a+b>2a \end{cases} \text{(нер-во } \triangle) \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+b=600 \\ 3a>b \\ b>-a \text{ (верно всегда} \\ b>a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a+b=600 & (1) \\ 3a>b & (2) \\ b>a & (3) \end{cases}$$

Рассмотрим выр-ие $3a+b$. Т.к. $3a>b$, то $3a+b>2b \Rightarrow 2b<600 \Rightarrow b<300$. Т.к. $a<b$, то $3a+b<3b+b=4b \Rightarrow 4b>600 \Rightarrow b=150$. Т.к. $b>a$, то $3a+b>4a \Rightarrow 4a<600 \Rightarrow a<150$. Т.к. ~~$b>2a$, то $3a+b$~~ $b<3a$, то $3a+b<3a+3a=6a \Rightarrow 6a>600 \Rightarrow a>100$.

$\frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{AB}{\sin \angle ACB}$

$\frac{8\sin\alpha}{\sin(180-2\alpha)} = \frac{AB}{\sin\alpha}$

$\frac{\cancel{8}^{4}\cancel{\sin\alpha}}{\cancel{2\sin\alpha}\cos\alpha} = \frac{AB}{\sin\alpha} \Rightarrow AB = \frac{4\sin\alpha}{\cos\alpha}$

9. $S_{\triangle A\Phi B} = \frac{1}{2} H\Phi \cdot AB$

$\cancel{6}^{3} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{8}^{4\,2} \cos^{\cancel{2}}\alpha \cdot \frac{4\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}$

$\cancel{8}\cos\alpha\sin\alpha = 3$

$4 \cdot 2\cos\alpha\sin\alpha = 3$

$\sin 2\alpha = \frac{3}{4}$

10. По опр-ию синуса в $\triangle BKC$:

$\sin \angle HBC = \frac{HC}{BC}$

$\sin(180^\circ - 2\alpha) = \frac{HC}{BC}$

$\sin 2\alpha = \frac{HC}{BC} \Rightarrow \frac{HC}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{BC}{HC} = \frac{4}{3}$

Но т.к. $BC = AB$ по п. $\cancel{1} \Rightarrow \frac{AB}{HC} = \frac{4}{3}$

Отв: $\frac{4}{3}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. По усл-ию $AO = OC = 4$ (радиусы ок-ти) $\Rightarrow$ $\triangle AOC$-р/б;
значит $\angle OAC = \angle OCA = \frac{180° - 2\alpha}{2} = 90° - \alpha$.
3. По т-ме синусов в $\triangle AOC$:

$$\frac{AO}{\sin\angle OCA} = \frac{AC}{\sin\angle AOC}$$

$$\frac{4}{\sin(90-\alpha)} = \frac{AC}{\sin 2\alpha}$$

$$\frac{4}{\cos\alpha} = \frac{AC}{2\sin\alpha\cancel{\cos\alpha}}$$

$$\underline{AC = 8\sin\alpha}$$

4. В $\triangle BHC$: $\angle HCB = 90° - \angle HBC = 90° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha - 90°$
$\angle HCA = \angle ACB - \angle HCB = \alpha - (2\alpha - 90°) = 90° - \alpha$.
5. Из п. 1 $\smile ADC = 2\alpha \Rightarrow \smile AC = 360 - 2\alpha$ (бо́льшая дуга),
значит, $\angle ADC = \frac{1}{2}\smile AC = 180° - \alpha$ (по т-ме о впис. $\angle$) $\Rightarrow$
$\angle HDA = \alpha$ как смежн. с $\angle ADC$
6. По т-ме синусов в $\triangle ADC$:

$$\frac{AC}{\sin\angle ADC} = \frac{AD}{\sin\angle ACD}$$

$$\frac{8\sin\alpha}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{AD}{\sin(90-\alpha)}$$

$$\frac{8\sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{AD}{\cos\alpha} \Rightarrow AD = 8\cos\alpha.$$

7. По опр-ию $\cos\angle HDA = \frac{HD}{AD} \Rightarrow \frac{HD}{\cos\alpha} = \frac{HD}{8\cos\alpha} \Rightarrow \cancel{HD=8}$
$\Rightarrow HD = 8\cos^2\alpha$
8. По т-ме синусов в $\triangle ABC$:

Рассмотрим $f(\frac{a}{p})$. С одной стороны, т.к. $a \vdots p$, то $\frac{a}{p} \in \mathbb{N}$. Значит, $f(\frac{a}{p}) = \Sigma$(прост. дел. $\frac{a}{p}$). Заметим, что Σ(прост. дел. $\frac{a}{p}$) $= x - p$, т.к. Σ(прост. дел. a) $= x$.
С другой стор., $f(\frac{a}{p}) = f(a \cdot \frac{1}{p}) = f(a) + f(\frac{1}{p}) =$
$= x + f(\frac{1}{p})$. Значит, $x + f(\frac{1}{p}) = x - p \Rightarrow f(\frac{1}{p}) = -p$.
ч.т.д.

5. Пусть $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$. Тогда $f(\frac{1}{a}) = f(\frac{1}{p_1} \cdot \frac{1}{p_2} \cdot \ldots$
$\cdot \frac{1}{p_n}) = f(\frac{1}{p_1}) + f(\frac{1}{p_2}) + \ldots + f(\frac{1}{p_n}) = -(p_1 + \ldots + p_n) < 0$.

~~6. Рассмотрим $f(p)$.~~
~~$f(p) = f(1 \cdot p) = f(1) + f(p) \Rightarrow f(1) = 0$.~~

7. Рассмотрим $1 \le x \le 18$ и $1 \le y \le 18$, такие, что $f(\frac{x}{y}) < 0$. Из п. 6 следует, что $x \neq y$. ~~Для определенности скажем, что $x < y$, тогда $x < y$.~~
Если $x = 1$, то $f(\frac{1}{y}) < 0$ по п. 5. $\Rightarrow$ таких пар 17, т.к. $y \neq x$. $(y \in [2; 18]$
~~Если $x = 2$, то~~
~~Если $y = 1$,~~ Если $x > 1$ и $y > 1$:

8. Пусть $x = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$, где p_i – простое;
$y = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_k$, где q_j – простое.
Если $n > k$:
$f(\frac{x}{y}) = f(\frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n}{q_1 \cdot \ldots \cdot q_k}) = f(\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k}{q_k} \cdot$
$\cdot p_{k+1} \cdot \ldots \cdot p_n) = f(\frac{p_1}{q_1}) + f(\frac{p_2}{q_2}) + \ldots + f(\frac{p_k}{q_k}) + f(p_{k+1}) + \ldots$
$\ldots + f(p_n) = (p_1 - q_1) + (p_2 - q_2) + \ldots + (p_k - q_k) + (p_{k+1} + \ldots$
$\ldots + p_n) = (p_1 + \ldots + p_k + p_{k+1} + \ldots + p_n) - (q_1 + q_2 + \ldots + q_k) =$
$= f(x) - f(y)$
Если $n = k$:

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7) 1. Рассмотрим два простых числа p и q. Тогда
$p \underset{\text{по усл.}}{=} f(p) = f(q \cdot \frac{p}{q}) = f(q) + f(\frac{p}{q}) = q + f(\frac{p}{q})$.

Значит, $f(\frac{p}{q}) = p - q$.

2. ~~Рассмотрим $f(a_1 a_2 a_3 \ldots a_k)$~~ Докажем, что
$f(a_1 \cdot a_2 \ldots \cdot a_n) = f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n)$ по индукции
База $n=2$: $f(a_1 a_2) = f(a_1) + f(a_2)$ по усл-ию.
Пусть утв-ие верно для $n=k$:
$f(a_1 \cdot \ldots \cdot a_k) = f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_k)$
Рассмотрим $n=k+1$, докажем, что $f(a_1 \ldots a_{k+1}) = f(a_1) + \ldots + f(a_{k+1})$
$f(a_1 \cdot \ldots \cdot a_k \cdot a_{k+1}) = f((a_1 \cdot \ldots \cdot a_k) \cdot a_{k+1}) = f(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k) +$
$+ f(a_{k+1}) = f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_k) + f(a_{k+1})$. Ч.Т.Д
Значит, утв-ие верно.

~~3. Рассмотрим $f(\frac{1}{p})$:~~
~~$f(\frac{1}{p}) = f($~~

3. Заметим, что $f(a)$ равно сумме всех прост. дел. числа a, если $a \in \mathbb{N}$. Действительно, ведь если $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$, ~~то $f(a) =$~~ где p_i — прост. дел. числа a, то $f(a) = f(p_1) + \ldots + f(p_n) = p_1 + \ldots + p_n$.

4. Докажем, что $f(\frac{1}{p}) = -p$ для простого p. Рассмотрим число $a \vdots p$. Пусть сумма его прост. дел. равна x. Тогда, из п. 3 $f(a) = x$.

~~Будем по.~~ Т.к. $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$, то $f(\frac{x}{y}) < 0 \Leftrightarrow$
$f(x) - f(y) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$. Значит, нужно подобрать такие x и y, что $f(x) < f(y)$!

$x=2$: $\varnothing$

$x=3$: $y=2$ 1 пара

$x=4$: ~~y=2,3~~ $y \in \{2;3\}$ 2 пары

$x=5$: $y \in \{2;3;4\}$ 3 пары

$x=6$: $y \in \{2;3;4\}$ 3 пары

$x=7$: $y \in \{2;3;4;5;6;8;9\}$ 7п.

$x=8$: $y \in \{2;3;4;5;6\}$ 5п.

$x=9$: $y \in \{2;3;4;5;6\}$ 5п.

$x=10$: $y \in \{2;3;4;5;6;8;9\}$ 7п.

$x=11$: $y \in \{2;3;4;5;6;7;8;9;10;12;14;15;16\}$ 13п.

$x=12$: $y \in \{2;3;4;5;6;8;9\}$ 7п.

$x=13$: $y \in \{2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;14;15;16;18\}$ 15п.

$x=14$: $y \in \{2;3;4;5;6;7;8;9;10;12;15;16\}$ 12п.

$x=15$: $y \in \{2;3;4;5;6;7;8;9;10;12\}$ 10п.

$x=16$: $y \in \{2;3;4;5;6;7;8;9;10;12\}$ 10п.

$x=17$: $y \in \{$все кроме $17\}$ 16п.

$x=18$: $y \in \{2;3;4;5;6;7;8;9;10;12;14;15;16\}$ 13п.

Итого пар:

$17+1+2+3+3+7+5+5+7+13+7+15+12+10+10+16+13=146$

Отв: 146

Задача 3) $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \ (1) \\ \cancel{x+y^2=5} \ x=5-y^2 \end{cases}$

Ур-ие (1):

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(\frac{p_1\cdot\ldots\cdot p_n}{q_1\cdot\ldots\cdot q_n}\right)=f\left(\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}\cdot\ldots\cdot\frac{p_n}{q_n}\right)=f\left(\frac{p_1}{q_1}\right)+\ldots+$
$+f\left(\frac{p_n}{q_n}\right)=(p_1-q_1)+(p_2-q_2)+\ldots+(p_n-q_n)=(p_1+\ldots+p_n)-$
$-(q_1+\ldots+q_n)=f(x)-f(y)$

Если $n<k$:

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(\frac{p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n}{q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_n\cdot q_{n+1}\cdot\ldots\cdot q_k}\right)=f\left(\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}\cdot\ldots\cdot\frac{p_n}{q_n}\cdot\right.$
$\left.\cdot\frac{1}{q_{n+1}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{q_k}\right)=f\left(\frac{p_1}{q_1}\right)+f\left(\frac{p_2}{q_2}\right)+\ldots+f\left(\frac{p_n}{q_n}\right)+$
$+f\left(\frac{1}{q_{n+1}}\right)+\ldots+f\left(\frac{1}{q_k}\right)=(p_1-q_1)+(p_2-q_2)+\ldots+(p_n-q_n)-$
$-q_{n+1}-\ldots-q_k=(p_1+\ldots+p_n)-(q_1+\ldots+q_k)=$
$=f(x)-f(y)$

Итого, $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$ (для $x>1$ и $y>1$)

Если $y=1$, то $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)>0$ для $x\in\mathbb{N}$.

8. Рассмотрим числа от 2 до 18 и для кажд. запишем зн-ие f для этого числа, как сумма его прост. дел.

$2: f(2)=2$	$8=2\cdot2\cdot2: f(8)=6$	$14=2\cdot7: f(14)=9$
$3: f(3)=3$	$9=3^2: f(9)=6$	$15=3\cdot5: f(15)=8$
$4=2\cdot2: f(4)=4$	$10=2\cdot5: f(10)=7$	$16=2^4: f(16)=8$
$5: f(5)=5$	$11: f(11)=11$	$17: f(17)=17$
$6=2\cdot3: f(6)=5$	$12=2^2\cdot3: f(12)=7$	$18=2\cdot3^2: f(18)=11$
$7: f(7)=7$	$13: f(13)=13$	

Проверка.

$y=1 \Rightarrow x=5-1^2=4!$

$4-2=\sqrt{4\cdot 1}$ — верно $\Rightarrow (4;1)$ — реш-ие

~~4+1=5 — вер~~

$y=-5 \Rightarrow x=5-25=-20!$

$-20+2\cdot 5=\sqrt{(-20)\cdot(-5)}$

$-10=\sqrt{100}$ — неверно $\Rightarrow (-20;-5)$ — не реш-ие

$y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \Rightarrow x=5-y^2=5-\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)^2=5-\left(\frac{22+2\sqrt{21}}{4}\right)=$

$=\frac{20-22-2\sqrt{21}}{4}=\frac{-2-2\sqrt{21}}{4}=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}.$

$x-2y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}-2\cdot\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}+1+\sqrt{21}=\frac{1+\sqrt{21}}{2}$

$\sqrt{xy}=\sqrt{\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)\cdot\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)}=\sqrt{\frac{(-1-\sqrt{21})^2}{4}}=\sqrt{\frac{(1+\sqrt{21})^2}{4}}=\frac{1+\sqrt{21}}{2}.$

$x-2y=\sqrt{xy} \Rightarrow \left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$ — решение

$y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$: $x=5-y^2=5-\frac{(-1+\sqrt{21})^2}{4}=\frac{20-22+2\sqrt{21}}{4}=$

$=\frac{-2+2\sqrt{21}}{4}=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$

$x-2y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}-2\cdot\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}+1-\sqrt{21}=$

$=\frac{-1+\sqrt{21}+2-2\sqrt{21}}{2}=\frac{1-\sqrt{21}}{2}$

$\sqrt{xy}=\sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)}=\left|\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right|=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$, т.к.

$\sqrt{21}>1$

$x-2y\neq\sqrt{xy} \Rightarrow \left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}, \frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)$ — не реш-ие

Отв: $(4;1)$; $\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5-y^2-2y=\sqrt{(5-y^2)y}$

$5-y^2-2y=\sqrt{5y-y^3}$

$5y-y^3\geq 0$

$y(5-y^2)\geq 0$

$\cancel{-\ \boxed{+}\ -\ \boxed{+}}$ ($-\sqrt{5}$, 0, $\sqrt{5}$, y) $\quad$ $\boxed{+}\ -\ \boxed{+}\ -$ ($-\sqrt{5}$, 0, $\sqrt{5}$) y $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y\leq-\sqrt{5} \\ y\in[0;\sqrt{5}] \end{array}\right.$

~~Т.к. $\sqrt{5y-y^3}\geq 0$, то $5-y^2-2y\geq 0$. Значит, можно возвести обе части в квадрат.~~

$25+y^4+4y^2-10y^2-20y+4y^3=5y-y^3$

$y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0\ (1)$

Подставим $y=1$:

$1+5-6-25+25=0$

$0=0\Rightarrow y=1$ — корень.

~~Поделим на $y-1$ уголком~~

Заметим, что $y^4+5y^3-6y^2-25y+25=(y-1)(y^3+6y^2-25)$.

Значит, $(y^4+5y^3-6y^2-25y+25)=0 \Leftrightarrow (y-1)(y^3+6y^2-25)=0$.

Заметим, что $y=-5$ явл. корнем y^3+6y^2-25 $(-125+150-25=0)$. Также заметим, что $y^3+6y^2-25=(y+5)(y^2+y-5)$. Значит, ур-ие (1) аналогично ур-ию $(y-1)(y+5)(y^2+y-5)=0$.

$\left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-5 \\ y^2+y-5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-5 \\ y=\cancel{-\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}};\ -\frac{1\pm\sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$

7. В $\triangle EAD$:

$\cos(90^\circ-\alpha)=\frac{AE}{AD}$

$\sin\alpha=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{AD}$

$AD=\frac{\sqrt{3}}{3\sin\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{\left(\frac{3\cdot\sqrt{21}}{7}\right)}=\frac{7\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\cancel{7}\sqrt{7}}{3\cdot\cancel{7}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

$\boxed{8.\ \frac{AD}{AC}=\frac{\frac{\sqrt{7}}{3}}{\sqrt{7}}=\frac{1}{3}}$

9. В $\triangle AED$:

$\sin(90^\circ-\alpha)=\frac{ED}{AD}$

$\cos\alpha=\frac{ED}{\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)}\Rightarrow ED=\frac{\frac{2\sqrt{7}}{7}\cdot\sqrt{7}}{3}=\frac{2}{3}$

$S_{\triangle AED}=\frac{1}{2}\cdot ED\cdot AE=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}$

Отв: $\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}$; $S_{\triangle AED}=\frac{\sqrt{3}}{9}$

6) $\begin{cases}|2x|+|y|+|4-2x-y|>4 \quad (1)\\ x^2-2y-4y+y^2\le 0 \quad (2)\end{cases}$

1. Преобр. (2):

$(x^2-2y+1)-1+(y^2-4y+4)-4\le 0$

$(x-1)^2+(y-2)^2\le 5$. Заметим, что точки $(0;4)$ и $(2;0)$ прин. окр-ти

Это нер-во задаёт круг с центром $(1;2)$ и $R=\sqrt{5}$

2. ~~$x>0$~~ Рассмотрим нер-во 1:

$x>0$; $y>0$: $2x+y+|4-2x-y|>4$

$|4-2x-y|>4-2x-y \Leftrightarrow 4-2x-y<0$

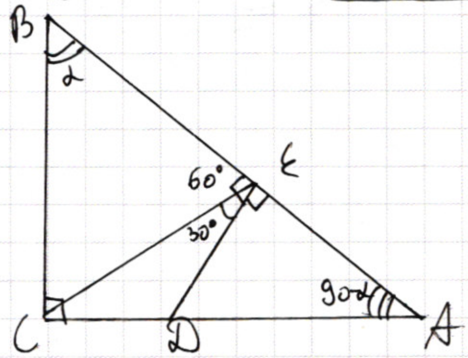
$y>4-2x$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5) $\boxed{AC=\sqrt{7},\ BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}}$



1. По т-ме Пифагора:

$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{7+4\cdot\frac{7}{3}}=$

$=\sqrt{7\cdot\frac{7}{3}}=\frac{7}{\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$

2. Пусть $\angle CBE=\alpha$, тогда $\angle BAC=90-\alpha$

$\sin\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{7}}{\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)}=\frac{\sqrt{21}}{7}$

$\cos\alpha=\frac{BC}{AB}=\frac{2\sqrt{\frac{7}{3}}}{\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)}=\frac{2\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\sqrt{3}}{7}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$

3. $\angle BEC=90°-\angle CED=60°$ (т.к. $\angle BED=90°$)

4. По т-ме о $\sum\angle$ в $\triangle BEC$ $\angle BCE=120-\alpha$

$\sin(120°-\alpha)=+\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{21}}{7}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}=$

$=\frac{\sqrt{21}}{14}+\frac{2\sqrt{21}}{14}=\frac{3\sqrt{21}}{14}$

5. по т-ме синусов в $\triangle BEC$:

$\frac{BC}{\sin\angle BEC}=\frac{BE}{\sin\angle BCE}$

$\frac{2\sqrt{\frac{7}{3}}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{BE}{\left(\frac{3\sqrt{21}}{14}\right)}\Rightarrow BE=\frac{2\sqrt{7}\cdot\cancel{14}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\sqrt{21}}{\sqrt{3}\cdot\cancel{\sqrt{3}}\cdot\cancel{14}_7}=\frac{2\cdot7\cdot\sqrt{3}}{7}=$

$=2\sqrt{3}$

6. $AE=AB-BE=\frac{7\sqrt{3}}{3}-2\sqrt{3}=\frac{7\sqrt{3}-6\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2-2x+1+y^2-4y+4-5\leq 0$

$(x-1)^2+(y-2)^2\leq 5$

$x>0$

$y>0$

$2x+y+|4-2x-y|>4$

$x^2-2x-4y+y^2\leq 0$

$|4-2x-y|>4-2x-y$

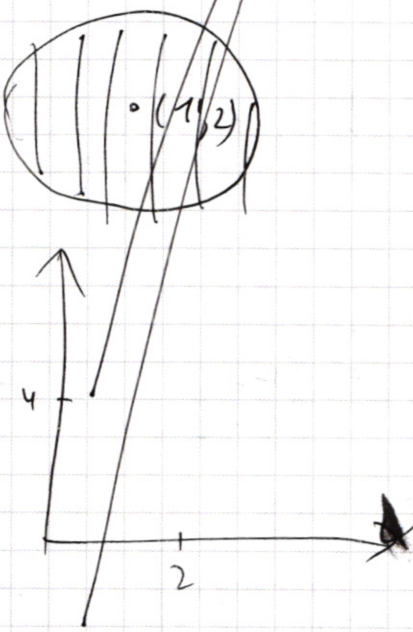
$4-2x-y<0$

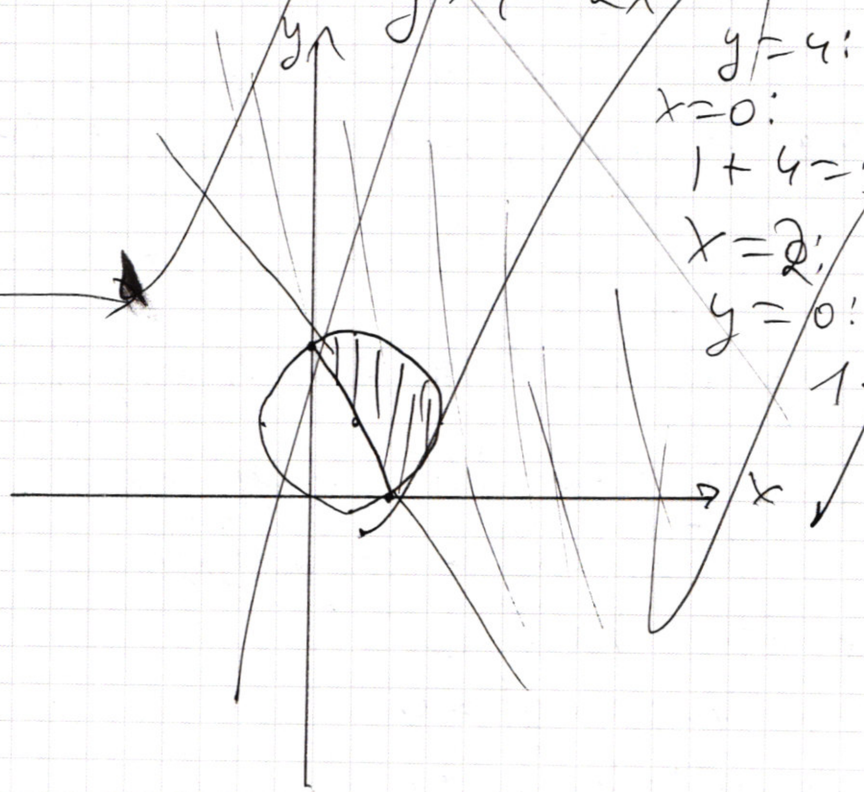
$2x+y>4$

$y>4-2x$

$x<0$

y





$y=4:$

$x=0:$

$1+4=5$

$x=2:$

$y=0:$

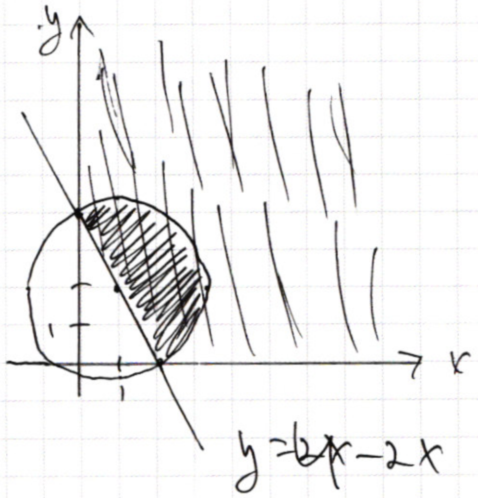
$1+4$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$y>4-2x$ при $x>0$ и $y>0$ задает часть пл-ти, заштрих, не включая гр-цу

На пересечении круга и части пл-ти — полукруг радиуса $\sqrt{5}$. (закраш. чёрным)

3. $\begin{cases} x<0 \\ y>0 \end{cases}$: $-2x+y+|4-2x-y|>4$

$|4-2x-y|>4+2x-y$ (3)

Т.к. $4-2x-y>4+2x-y$ ($x<0$),

то $|4-2x-y| \geq 4-2x-y>4+2x-y$

$\Downarrow$

$|4-2x-y|>4+2x-y$.

Значит, нер-во (3) вып. для $\forall x,y$: $\begin{matrix} x<0 \\ y>0 \end{matrix}$

4. $\begin{cases} x<0 \\ y<0 \end{cases}$: $-2x-y+|4-2x-y|>4$

$|4-2x-y|>4+2x+y$ (4)

$\cancel{4+2x+y}$ $4-2x-y>4+2x+y$, т.к. $\begin{cases} x<0 \\ y<0 \end{cases}$

$\Downarrow$

$|4-2x-y| \geq 4-2x-y>4+2x+y$

$\Downarrow$

нер-во (4) вып. для $\forall x,y$: $\begin{cases} x<0 \\ y<0 \end{cases}$

5. $\begin{matrix} x>0 \\ y<0 \end{matrix}$: $\cancel{+2x+y+|4-2x-y|>4}$

$\cancel{|4+2x-y|>4+2x-y}$

$\cancel{4+2x-y>4+2x-y}$

$2x-y+|4-2x-y|>4$

$|4-2x-y|>4-2x+y$ (5)

$4-2x-y>4-2x+y$, т.к. $y<0 \Rightarrow |4-2x-y| \geq 4-2x-y>4-2x+y$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

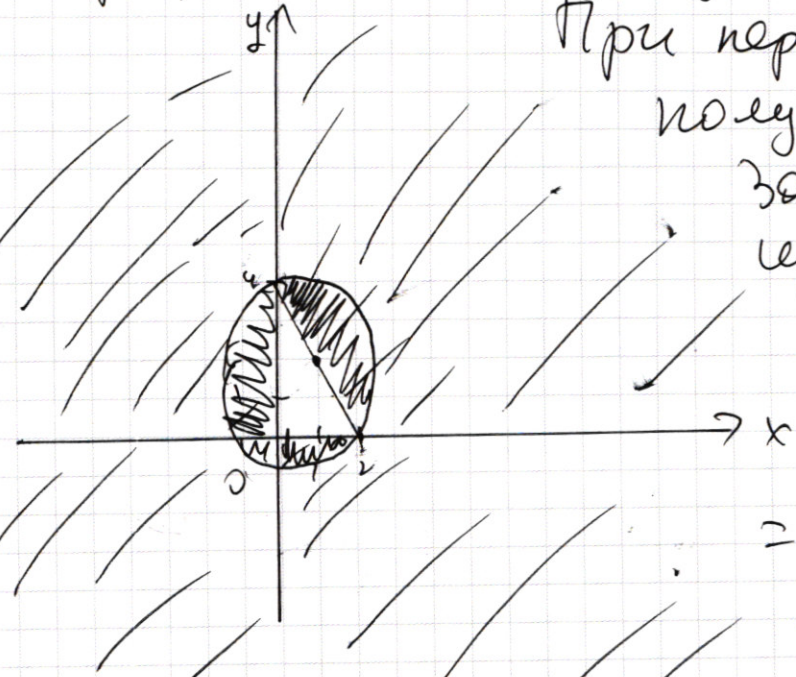
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Значит, нер-во (5) вып. для $\forall$ $\begin{matrix} x>0 \\ y<0 \end{matrix}$

Итого, нер-во $|2x|+|y|+|4-2x-y|>4$ вып. для $\forall x, y$:
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0 \\ y<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ y>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x>0 \\ y<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ y>4-2x \end{cases} \end{array}\right.$$

На графике:



подходят заштрих. обл-ти. При пер-ии с кругом получ. закраш. обл. Заметим, что площадь этой обл-ти равна
$$\underbrace{(\pi\cdot\sqrt{5})^2}_{\text{пл. круга}}-\underbrace{\frac{1}{2}\cdot2\cdot4}_{\text{пл. прям}\,\Delta}=$$
$$=5\pi^2-4$$

Отв: $5\pi^2-4$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y^4+5y^3-6y^2-25y+25 \,\lfloor\, y-1$

$-\; y^4-y^3 \qquad y^3+6y^2-25$

$6y^3-6y^2-25y+25$

$-\; 6y^3-6y^2$

$-25y+25$

$-\; -25y+25$

0

$-11- = (y-1)(y^3+6y^2-25) =$

$= (y-1)(y+5)(y^2+y-5)$

$D = 1+20 = 21$

$y = \frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

$y=-5$:

$x+10=\sqrt{-5x}$ $\qquad -20+10$

$x = 5-25=-20$ $\qquad 5-y^2-2y = 5-25+10<0$

$5-y^2-2y \geq 0$

$y^2+2y-5 \leq 0$

$\frac{D}{4} = 1+5 = \sqrt{6}$

$y \in [1-\sqrt{6}, 1+\sqrt{6}]$

$1-\sqrt{6} \approx -2$ $\qquad (-2;4)$

$1+\sqrt{6} \approx 4$

$\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \overset{<}{\vee} 1-\sqrt{6}$

$-1-\sqrt{21} \overset{<}{\vee} 2-2\sqrt{6}$

$2\sqrt{6}-2 \overset{<}{\vee} \sqrt{21}+1$

$24-8\sqrt{6}+4 \overset{<}{\vee} 22+2\sqrt{21}$

$6-8\sqrt{6} \overset{<}{\vee} 2\sqrt{21}$

$\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \overset{<}{\vee} 1+\sqrt{6}$

$-1+\sqrt{21} \overset{<}{\vee} 2+2\sqrt{6}$

$22-2\sqrt{21} \overset{<}{\vee} 28+4\sqrt{6}$

$2\sqrt{21}$

$\cancel{125}$

$y = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$

$y^2 = \frac{22-2\sqrt{21}}{4}$

$x = 5-y^2 = \frac{-2+2\sqrt{21}}{4} = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$

$-125+150-25=0$

$y^3+6y^2-25 \,\lfloor\, y+5$

$-\; y^3+5y^2 \qquad y^2+y-5$

y^2-25

$-\; y^2+5y$

$-5y-25$

$-\; -5y-25$

0

$\frac{-1+\sqrt{21}}{2} - (-2+\sqrt{21}) = \frac{-1+2\sqrt{21}}{2}$

$y = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$

$x = 5 - y^2 = \frac{20-(22-2\sqrt{21})}{4} = \frac{2\sqrt{21}-2}{4} = \frac{\sqrt{21}-1}{2} = y$

$x = y$! $y + y^2 = 5$

$y^2 + y - 5 = 0$

$-y = y$

5)

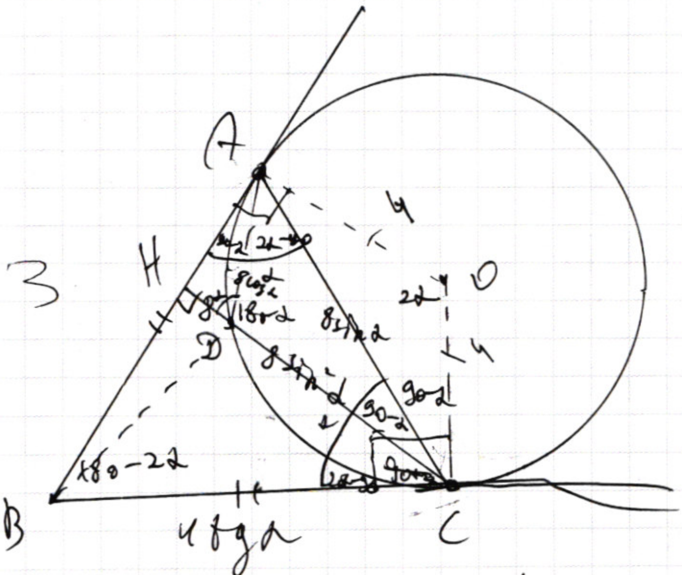
$\frac{\cancel{AD}}{\cancel{\sin 90-\alpha}} = \frac{AD}{\cos\alpha} = \frac{8\sin\alpha}{\sin\alpha}$

$AD = 8\cos\alpha$

$HD \cdot 4\,tg\alpha = 12$

$HD = \frac{3}{tg\alpha}$

$\boxed{HD \cdot AB = 12}$



$\frac{AB}{CH} = \frac{BC}{CH} = \frac{1}{\sin\angle ABC}$

$\cancel{AC^2 =}$

$\frac{AC}{\sin 2\alpha} = \frac{4}{\cos\alpha}$

$\frac{AC}{2\sin\alpha} = 4$

$AC = 8\sin\alpha$

$\sin\alpha = \frac{CH}{8\sin\alpha}$

$CH = 8\sin^2\alpha$

$\frac{1}{2} CH \cdot AB$

$\frac{1}{2} AB^2 \cdot \sin 2\alpha$

$\frac{\cancel{4\,tg\alpha}}{\cancel{18\sin}\ 8\sin^2\alpha} =$

$= \frac{4}{8\cos\alpha\sin\alpha} =$

$= \frac{1}{\sin 2\alpha}$

$AB \cdot \sin 2\alpha = CH$

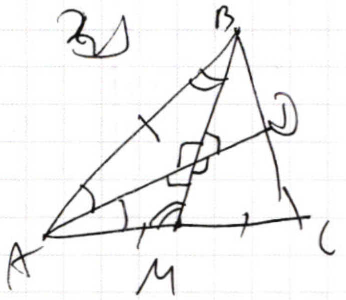
$\cancel{2}\ AB \cdot \sin\alpha\cos\alpha = \overset{4}{\cancel{8}}\sin^2\alpha$

$AB = \frac{4\sin\alpha}{\cos\alpha} = 4\,tg\alpha$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

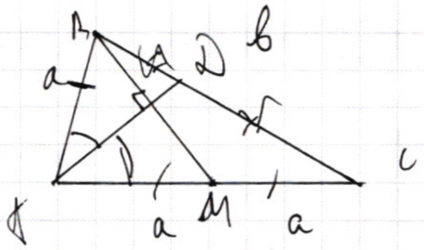
2)



$$\begin{array}{r} 600 \\ -447 \\ \hline 153 \end{array}$$

$3a+b=600$

$3a>b$



$b+a>2a$

$\begin{cases} b>a \\ b<3a \end{cases}$

$5y-y^3\geq 0$

$5-y^2\geq 0$

$y\leq\sqrt{5}$

$y\,4$

$600=3a+b>2b$

$b<300$

$5-y^2\leq 0$

$600=3a+b<6a$

$y^2\geq 5$

$a>100$

$y\leq-\sqrt{5}$

$\cancel{b+a<4a}$

$$\begin{array}{r} 600 \\ -303 \\ \hline 297 \end{array}$$

$600=3a+b>4a$

$a<150$

$600=3a+b<4b$

$b>150$

$\begin{cases} a>100 \\ a<150 \\ b>150 \\ b<300 \end{cases}$

$300<3a<450$

$b=600-3a$

$-450<-3a<-300$

$150<600-3a<300$

$101-149$

$149-100=49$

$y=1$

$x=4$

3) $x-2y=\sqrt{xy}$

$x+y^2=5$

$y^2+2y=5-\sqrt{xy}$

$\sqrt{xy}=5-y^2-2y$

$xy=25+y^4+4y^2-$

$-10y^2-20y+4y^3$

$x^2-4xy+4y^2=xy$

$x^2+4y^2=5xy$

$4x+4y^2=20$

$x^2-4x=5(xy-4)$

$x=5-y^2$

$0\leq 5-y^2-2y=\sqrt{5y-y^3}$

$25+y^4+4y^2-10y^2-20y+4y^3=5y-y^3$

$y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0$

$y=1$ — корень

$$\begin{array}{l|l} y^4+5y^3-6y^2-25y+25 & y-1 \\ \underline{y^4-y^3} & y^3+6y^2 \\ \quad 6y^3-6y^2-25y+25 & \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \le 0$$

$x^2-6x+10=0$

$\frac{D}{4}=9-10<0$

$x^2-6x+10>0\ \forall x$

$$\frac{x^2-6x+10-2(x-3)}{2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|} \le 0$$

$x \ne 2$
$x \ne 0$

1. $x \geq 3$:

$$\frac{x^2-6x+10-2x+6}{\underbrace{3x(x-2)}_{>0}} \le 0$$

$x^2-8x+16 \le 0$

$(x-4)^2 \le 0 \Rightarrow x=4$

2. $x \in (2;3)$

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{\underbrace{3x(x-2)}_{>0}} \le 0$$

$x^2-4x+4 \le 0$

$(x-2)^2 \le 0$

$x=2$ ✗

3. $\frac{16-24+10-2}{3\cdot4\cdot2} = 0$

3. $x \in (0;2)$ ✓

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x(x-2)-x(x-2)} \le 0$$

$$\frac{x^2-4x+4}{x(x-2)} \le 0$$

$$\frac{x-2}{x} \le 0$$

$+$ 0 $-$ 2 $+$ x

$x \le 0$ ✗

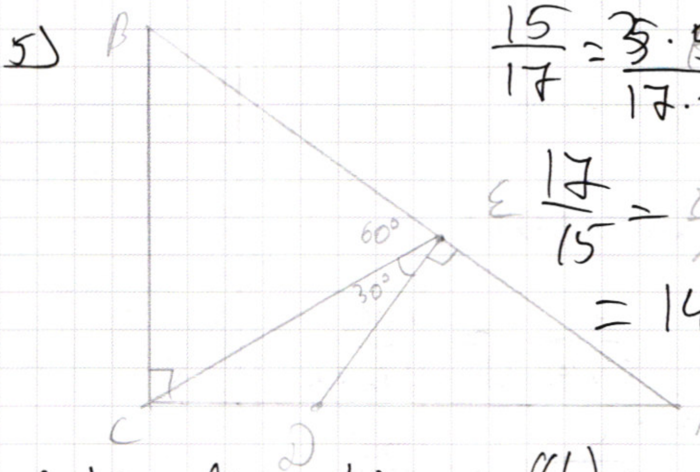
4. $x<0$:

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x(x-2)+x(x-2)} \le 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \le 0$$

$$\frac{x-2}{3x} \le 0$$

5)



$\frac{15}{17} = \frac{3 \cdot 5}{17 \cdot 1}$

$\frac{17}{15} = \frac{17 \cdot 1}{3 \cdot 5} =$

$= 14 - 5$

$2 + f(\frac{1}{4}) = 3 + f(\frac{1}{6}) =$

$= 5 + f(\frac{1}{10}) = 5 + f(\frac{1}{12})$ $4 + f(\frac{1}{8}) =$

$f(\frac{1}{2}) = f(2 \cdot \frac{1}{4}) = f(3 \cdot \frac{1}{6}) =$

$= ...$

$f(\frac{1}{a}) = f(\frac{1}{12})$

$f(\frac{1}{2}) = f(5 \cdot \frac{1}{10}) = 5 + f(\frac{1}{10}) =$

$= f(6 \cdot \frac{1}{12}) = 5 + f(\frac{1}{12}) =$

$= 5 + f(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}) =$

$= 5 + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{3}) =$

$= 7 + f(\frac{1}{14}) = 6 + f(\frac{1}{16}) = 6 + f(\frac{1}{18})$

$f(\frac{1}{2}) = f(1) + f(\frac{1}{2})$

$f(x) = f(x)$

$\cancel{f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{3})} \; \cancel{f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{3})}$

$f(\frac{1}{2}) = 0$

$f(\frac{1}{2}) = \cancel{1 + f(\frac{1}{2})}$

$2 + f(\frac{1}{4})$

$3 + f(\frac{1}{6})$

$4 + f(\frac{1}{8})$

$5 + f(\frac{1}{10})$

$5 + f(\frac{1}{12})$

$7 + f(\frac{1}{14})$

$6 + f(\frac{1}{16})$

$6 + f(\frac{1}{18})$

$7 + f(\frac{1}{20})$

$11 + f(\frac{1}{22})$

$7 + f(\frac{1}{24})$

$13 + f(\frac{1}{26})$

$9 + f(\frac{1}{28})$

$8 + f(\frac{1}{30})$

$8 + f(\frac{1}{32})$

$f(a) = x$

$f(a \cdot p) = x + p$

$f(a \cdot \frac{1}{p}) = x - p$

$x + f(\frac{1}{p}) = x - p$

$\cancel{7} + f(\frac{1}{20}) = \cancel{7} + f(\frac{1}{24})$

$f(\cancel{\frac{1}{2}}) + f(\cancel{\frac{1}{2}}) + f(\frac{1}{3}) = f(\frac{1}{2}) + f(\cancel{\frac{1}{2}}) + \cancel{f(\frac{1}{2})} + f(\frac{1}{3})$

$f(\frac{1}{3}) = \cancel{f(\frac{1}{2})}$

$f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{3}) = f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{3})$

$x + f(\frac{1}{2} \cdot a) = x + f(a)$

$f(a^2 \cdot \frac{1}{p})$

$x + f(\frac{1}{2} \cdot a) = \cancel{x} + 2 + f(a)$

$f(a^2 \cdot \frac{1}{p}) = f(a^2 \cdot p)$

$f(\frac{1}{2}) \cdot \cancel{f(a)} = 2 + \cancel{f(a)}$

$f(a^2 \cdot \frac{1}{p}) = 2x + f(\frac{1}{p})$

$f(\frac{1}{2}) = 2$

$f(a) = x$

$f(1 \cdot \frac{1}{p}) =$

$= f(1) + f(\frac{1}{p})$

$x + f(\frac{1}{p} \cdot a) = \overbrace{x + p + f(a)}^{f(a \cdot p)}$

$\cancel{x} + f(\frac{1}{p}) \cdot \cancel{f(a)} = \cancel{x} + p + \cancel{f(a)}$

$f(\frac{1}{p}) = p.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

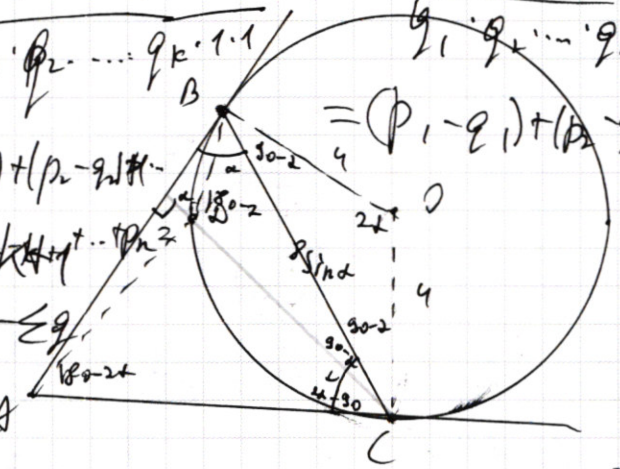
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{p_1 \cdot p_2 \cdots p_n}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_k \cdot 1 \cdot 1}$$

$(p_1-q_1)+(p_2-q_2)+\ldots+p_n \ldots$

$=\sum p-\sum q$



$$\frac{p_1 \cdot p_2 \cdots p_k}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_n} = (p_1-q_1)+(p_2-q_2)+\ldots - (q_{k+1} \ldots$$

$$\frac{4}{\sin(90-\alpha)} = \frac{BC}{\sin 2\alpha}$$

$$\frac{4}{\cancel{\cos\alpha}} = \frac{BC}{2\sin\alpha \cancel{\cos\alpha}}$$

$BC = 8\sin\alpha$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(2\cdot\frac{1}{4}\right) = 2 + f\left(\frac{1}{4}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) =$ $\quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + f\left(\frac{1}{4}\right)$

$= f\left(\frac{1}{2}\cdot 1\right)$

$$\frac{8\sin\alpha}{\sin(180-\alpha)} = \frac{BD}{\sin(90-\alpha)}$$

$$\frac{8\sin\alpha}{\sin(180-2\alpha)} = \frac{AB}{\sin\alpha}$$

$$\cancel{\frac{8\sin\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{BD}{\cos\alpha} \qquad BD = 8\cos\alpha$$

$$\frac{\cancel{8}\,4\sin\alpha}{\cancel{2}\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{AB}{\cancel{\sin\alpha}}$$

$AB = 4\,tg\,\alpha$

$$\frac{HD}{BD} = \cos\alpha \qquad \frac{HD}{8\cos\alpha} = \cos\alpha$$

$HD = 8\cos^2\alpha$

$f\left(\frac{7}{3}\right) = f($

$4\,tg\,\alpha \cdot 8\cos^2\alpha = k^3$

$tg\,\alpha \cdot 8\cos^2\alpha = 3$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot 8\cos^2\alpha = 3$

$8\sin\alpha\cos\alpha = 3$

$4\sin 2\alpha = 3$

$\sin 2\alpha = \frac{3}{4}$

$f\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(\frac{5}{2\cdot 2}\right) =$

$= f\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = 3 + f\left(\frac{1}{2}\right)$

$1 = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$ 4

$2 = 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1$ 5

$3 = 3\cdot 1\cdot 1\cdot 1$ 6

$4 = 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1$ 6

$5 = 5\cdot 1\cdot 1\cdot 1$ 8

$6 = 2\cdot 3\cdot 1\cdot 1$ 7

$7 = 7\cdot 1\cdot 1\cdot 1$ 10

$8 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 1$ 7

$9 = 3\cdot 3\cdot 1$ 8

$10 = 2\cdot 5\cdot 1\cdot 1$ 9

1

2

2

$11 = 11\cdot 1\cdot 1\cdot 1$ 14

$12 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 1$ 7

$13 = 13\cdot 1\cdot 1\cdot 1$ 16

$14 = 2\cdot 7\cdot 1\cdot 1$ 11

$15 = 3\cdot 5\cdot 1\cdot 1$ 10

$16 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$ 8

$17 = 17\cdot 1\cdot 1\cdot 1$ 20

$18 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 1$ 9

$f\left(\frac{15}{7}\right) = \frac{3\cdot 5\cdot 1\cdot 1}{7\cdot 1\cdot 1\cdot 1}$

$= -4 + 4 - 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2 − 2 8 − 6 14 − 9

3 − 3 9 − 6 15 − 8

4 − 4 10 − 7 16 − 8

5 − 5 11 − 11 17 − 17

6 − 5 12 − 7 18 − 11

7 − 7 13 − 13

17, 1, 2, 3 · 2, 5 · 2, 7 · 3, 10 · 2, 12, 2 · 13, 15, 16

17, 1, 2, 6, 10, 21, 20, 12, 26, 15, 16

1, 2, 6, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 21, 26

146

$(y^3+6y^2-25)(y-1) = y^4 - y^3 + 6y^3 - 6y^2 - 25y + 25 = y^4 + 5y^3 - 6y^2 - 25y + 25$

$y^3+6y^2-25 \mid y+5$

$-\; y^3+5y^2 \qquad y^2+y-5$

y^2-25

$-\; y^2+5y$

$-5y-25$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta$

$\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(120-\alpha) = -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{21}$

25 − 125 +

6

150

$\sin(120-\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha$

$\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \vee \sqrt{5}$

$22-2\sqrt{21} \vee 20$

$2 \vee 2\sqrt{21}$

$\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \vee -\sqrt{5}$

$\frac{1+\sqrt{21}}{2} \vee \sqrt{5}$

$20 \vee 22+2\sqrt{21}$

$-2 \vee 2\sqrt{21}$

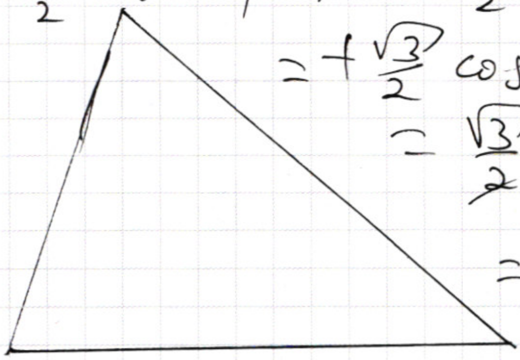
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$

$\sin(120-\alpha) = +\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \sin\alpha\cdot\frac{1}{2} =$

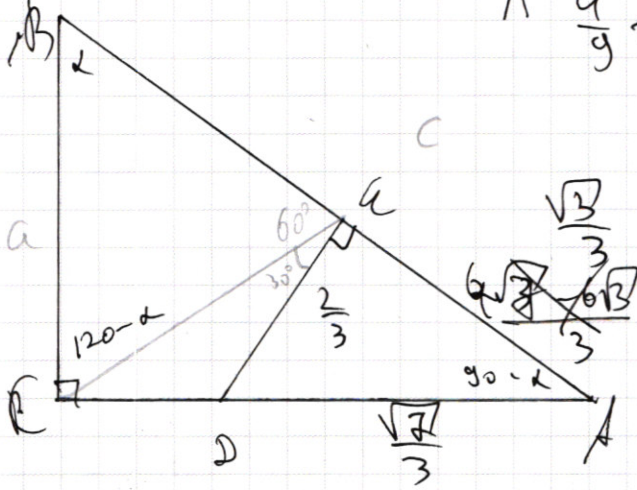
$\boxed{\begin{matrix}\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{7} \\ \cos\alpha = \frac{2\sqrt{7}}{7}\end{matrix}}$



$= +\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{21}}{7} =$

$= \frac{3\sqrt{21}}{14}$



$\frac{4}{9} + \frac{3}{9} = \frac{7}{9}$

$\cos\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{2\sqrt{7}}{2}$

$AC = \sqrt{7}$

$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\frac{28+21}{49} = 1$

$AB = \sqrt{49 + 4\cdot\frac{7}{3}} =$

$= \sqrt{7\cdot\frac{7}{3}} = 7\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}$

$\frac{BC}{AB} = \frac{2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{7\cdot\sqrt{\frac{7}{3}}} =$

$\sin\alpha = \frac{AC}{AB} =$

$= \frac{\sqrt{7}}{7\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

$= \frac{2}{\sqrt{7}}$

$\frac{4\sqrt{7}}{3}$

$\frac{7EC}{\sqrt{21}} = \frac{2a}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\cancel{a = 7\sqrt{3}/EC}$

$EC = \frac{2\sqrt{21}a}{7\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{7}a}{7} =$

$= \frac{2\sqrt{7}}{7}\cdot 2\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$\frac{14BE}{3\sqrt{21}} = \frac{4\sqrt{7}}{3}$

$\cancel{AD = 1}$

$BE = \cancel{42\sqrt{3}}\ \frac{14\sqrt{3}}{7} = 2\sqrt{3}$

$AE = AB - BE = \frac{4\sqrt{7}}{3} - 2\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{7}-6\sqrt{3}}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)