



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках S и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.
5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{29}$, $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leq x \leq 19$, $3 \leq y \leq 19$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3|} \leq 0$$

$$x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| \leq 0$$

1) $x-1 < 0$

$$x^2 - 2x + 5 + 4(x-1) \leq 0$$

$$x^2 + 2x + 1 \leq 0$$

Вспомогательная функция $f(x) \uparrow$

$$x^2 + 2x + 1 = f(x)$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$D = 4 - 4 = 0$$

$$x = \frac{-2}{2} = -1$$



2) $x-1 > 0$

$$x^2 - 2x + 5 - 4(x-1) \leq 0$$

$$x^2 - 6x + 9 \leq 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = f(x)$$

$f \uparrow$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$D = 36 - 36 = 0$$

$$x = \frac{6}{2} = 3$$



(Классический метод по ДДЗ)

Ответ: -1

Решение: 1) при $x < 0$ и $x-3 < 0$

$$4x^2 - 12x + (-x) \cdot (-3-x) \neq 0$$

$$5x^2 - 15x \neq 0$$

$$5x(x-3) \neq 0$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

2) при $x < 0$ или $x-3 < 0$

$$4x^2 - 12x + (-x)(3-x) \neq 0$$

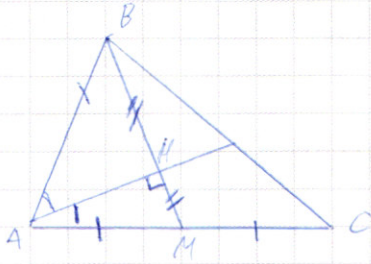
$$3x^2 - 9x \neq 0$$

$$3x(x-3) \neq 0$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

3) $x > 0$ и $x-3 > 0$ то же, что и $x < 0$ и $x-3 < 0$

N2



$ABC - \Delta$ - эк $P_{ABC} = 300$

BM - медиана $\Rightarrow AM = MC$

AH - выс-са $\Rightarrow \angle BAN = \angle MAH$

$AH \perp BM$

1) $AH \perp BM$ и AH - выс-са Δ -ка $ABM \Rightarrow AH$ высота и выс-са и медиана Δ -ка $ABM \Rightarrow AB = AM = MC$

Чтобы не противоречить условию знака из сторон треугольника должны быть равны половине другой стороны.

2) По свойству Δ -ка сумма двух ^{любых} сторон $>$ третьей \Rightarrow

максимальные две стороны Δ -ка - 51 и 102 м. $50 + 100 = 150$
 стороны $\in \mathbb{N}$

$P = 300$
 50, 100, 150 не может быть

максимальные две стороны Δ -ка - 71 и 148 м.
 стороны $\in \mathbb{N}$

71 и 148 м. $75 + 150 = 225$
 75, 150, 75 не может быть

Нужные нам Δ -ки - Δ -ка с меньшей стороной - с меньшей стороной от 51 до 71
 их 21

Ответ: 24 треугольника

N3

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} xy = (y - 2x)^2 \\ y = \frac{9 - x^2}{2} \end{cases}$$

Ддз: $y - 2x \geq 0$

$$xy = (y - 2x)^2$$

$$\Leftrightarrow xy = y^2 - 4xy + 4x^2$$

$$4x^2 - 5yx + y^2 = 0$$

$$D = 25y^2 - 16y^2 = 9y^2$$

$$x_{1,2} = \frac{5y \pm 3y}{8} = \frac{y}{4}, y$$

1) $x = \frac{y}{4}$

$$x = \frac{9 - x^2}{8} / \frac{1}{4}$$

$$6x = 9 - x^2$$

$$x^2 + 6x - 9 = 0$$

$$D = 64 + 36 = 100$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 10}{2} = 2, 1$$

2) $x = y$

$$x = \frac{9 - x^2}{2} / \frac{1}{2}$$

$$2x = 9 - x^2$$

$$x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$D = 4 + 36 = 40$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{2} =$$

$$= -1 \pm \sqrt{10}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $x, y \in$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -9 \\ y = -36 \\ x = 1 \\ y = 4 \\ x = -1 - \sqrt{10} \\ y = 9 - \sqrt{10} \\ x = -1 + \sqrt{10} \\ y = \sqrt{10} \end{array} \right.$$

$-36 + 18 \neq 0$ не подходит по ОДЗ

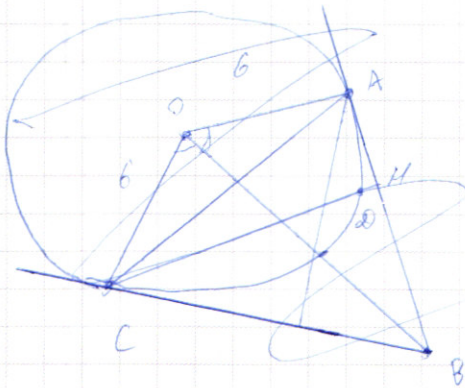
$4 - 2 \geq 0$

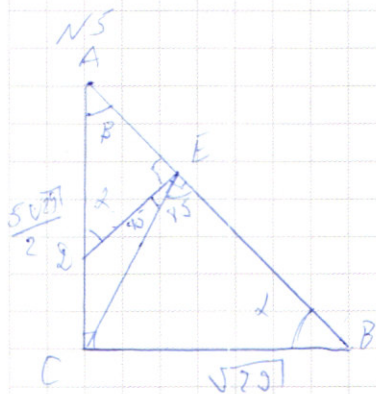
$9 - \sqrt{10} + 2 + 2\sqrt{10} = \sqrt{10} + 11 \geq 0$

$\sqrt{10} + 2 \neq 2 - \sqrt{10} \neq 0$ не подходит по ОДЗ

Ответ $x=1, y=4$ или $x=-1-\sqrt{10}, y=9-\sqrt{10}$

N 4





1) По известным сторонам

$$\frac{\sqrt{27}}{5\sqrt{27}} =$$

по теореме Пифагора:

$$\frac{25 \cdot 27 + 27 \cdot 27}{2} = \sqrt{\frac{27(25+27)}{2}} = \sqrt{\frac{27 \cdot 27}{2}}$$

$$\frac{AC}{\sin \alpha} = AB \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{27}}{2 \sin \alpha} = \sqrt{\frac{27 \cdot 27}{2}}; \sin \alpha = \frac{5\sqrt{27}}{2\sqrt{27}}$$

$$\frac{CE}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin 95}; CE = \frac{5\sqrt{27}}{2\sqrt{27}}$$

$$\frac{CE}{\sin(90-\alpha)} = \frac{BC}{\sin 95}; DC = \frac{\sqrt{27}}{2}$$

$$AC - DC = AD = \frac{5\sqrt{27}}{2} - \frac{\sqrt{27}}{2} = \frac{4\sqrt{27}}{2} = 2\sqrt{27}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{2\sqrt{27} \cdot 2}{5\sqrt{27}} = \frac{4}{5} = 0,8$$

Ответим: $\frac{AD}{AC} = 0,8$

2) $\frac{DE}{\sin \beta} = 2\sqrt{27}$

$$\sin \beta = \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$DE = \frac{29}{\sqrt{27}}$$

$$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DE \cdot \sin \alpha = \frac{2\sqrt{27} \cdot \frac{29}{\sqrt{27}} \cdot \frac{5\sqrt{27}}{2\sqrt{27}}}{2} =$$

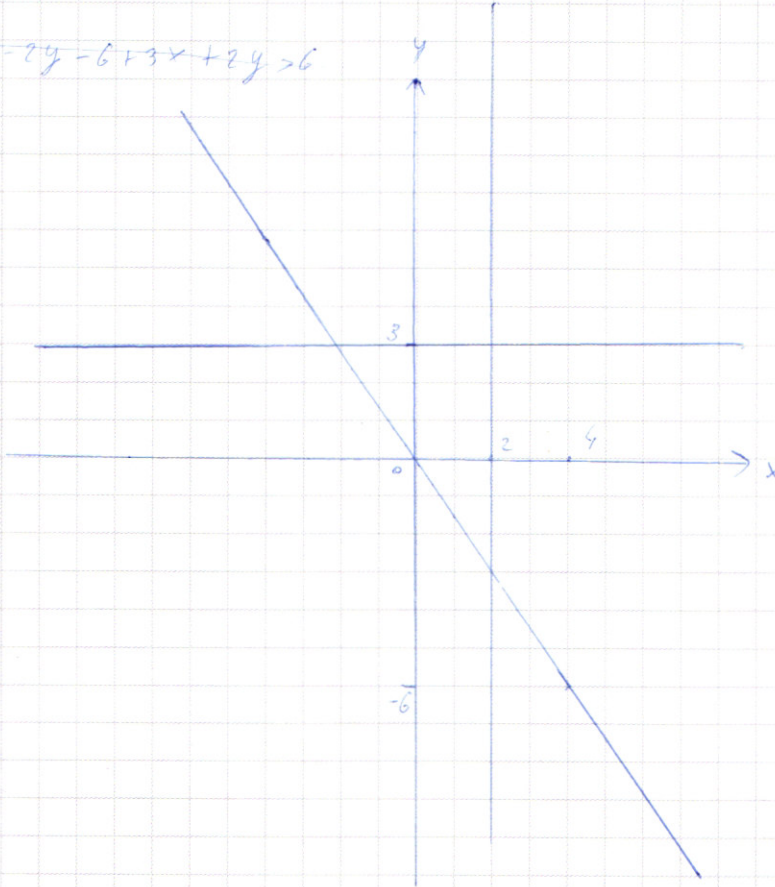
$$= \frac{195\sqrt{587}}{54}$$

Ответ: $S_{\triangle ADE} = \frac{195\sqrt{587}}{54}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$1) -3x - 2y - 6 + 3x + 2y > 6$$



$$1) \begin{cases} 3x > 0 \\ 2y < 0 \\ 6 - 3x - 2y < 0 \end{cases}$$

$$x > 2$$

$$2) \begin{cases} 3x < 0 \\ 2y > 0 \\ 6 - 3x - 2y < 0 \end{cases}$$

$$y > 3$$

$$3) \begin{cases} 3x < 0 \\ 2y < 0 \\ 6 - 3x - 2y > 0 \end{cases}$$

$$y < -\frac{6}{4}x$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \sin \alpha = \frac{10 \sqrt{29}}{\sqrt{529}}$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$2 \sin \alpha = \frac{5 \cdot \sqrt{29} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{29}} \quad \sin \alpha = \frac{5}{2}$$

$$\frac{CE}{5}$$

$$\frac{CE \cdot \sqrt{29}}{5 \sqrt{29}} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{29}}$$

$$2 \sqrt{29} CE = \frac{5 \sqrt{29}}{2 \sqrt{29}}$$

$$CE = \frac{5 \sqrt{29}}{2 \sqrt{29}}$$

$$\frac{5 \sqrt{29} \cdot 2 \sqrt{29}}{2 \sqrt{29} \cdot 5 \sqrt{29}} = \frac{2CE}{\sqrt{29}}$$

$$2CE = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$4(y^2 + 3y + 1)$$

$$D = 9 + 4 = 13$$

$$y_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{-2}$$

$$y^2 - 3y + x^2 - 2x$$

$$D = 9 - 4x^2 + 8x$$

$$4x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$D = 64 + 144 = 208$$

$$-6x - 4y > 0$$

$$4y < -6x$$

$$\frac{28}{29} \Big| \cdot 2$$

$$y < \frac{-6}{4} x \sqrt{29} \cdot \frac{29 \cdot 5 \sqrt{29}}{59} = \frac{\sqrt{58} \cdot 29 \cdot 5}{59}$$

$$3x - 2y - 6 + 3x + 2y > 6$$

$$3 \cdot 6x > 12$$

$$x > 2$$

$$-3x + 2y - 6 + 3x + 2y > 6$$

$$4y > 12$$

$$y > 3$$

$$\frac{3}{29} \cdot \frac{29 \cdot 5}{29 \cdot 5}$$

$$-3x - 2y + 6 - 3x - 2y > 6$$

$$-3x > 4y$$

$$-3x - 4y > 0$$

$$-4y \leq 3x$$

$$y > -\frac{6}{4} x$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{139 - y^2}}{2} \quad y^2 - 3y - 1$$

$$1 \pm \sqrt{139 - y^2}$$

$$x = 5y$$

$$x = 25y$$

$$1 - \frac{25 \cdot 2}{9 \cdot 29} - \frac{25}{59} = \sqrt{29} \frac{\sqrt{29}}{2 \sqrt{29}}$$

$$DE = \frac{2 \sqrt{29} \cdot \sqrt{29}}{2 \sqrt{29}} = \frac{29}{\sqrt{29}}$$

$$\frac{DE \cdot \sqrt{29}}{\sqrt{29}} = \sqrt{29} \frac{4}{29} \frac{5}{59}$$

$$\sqrt{29} DE = 29$$

$$DE = \frac{29}{\sqrt{29}} \quad 3x + 2y$$

$$x^2 - 2x + 3y + y^2 \leq 0$$

$$D = 4 - 12y - 4y^2$$

$$D = 4 - 12y - 4y^2$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12y - 4y^2}}{2}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{1 - 3y - y^2}$$

$$(x - 1 + \sqrt{1 - 3y - y^2})(x - 1 - \sqrt{1 - 3y - y^2})$$

$$(x + y)^2 - 2x - xy - xy - 3y$$

$$(x + y)^2 - 2y - x(2 + y) - 3(3 + x)$$

$$y^2 - 3y - 2x$$

$$D = 9 + 6x$$

$$x = \frac{-y^2 + 3y + 2x}{2}$$

$$x = \frac{(9 - y^2) + (2 - x)x}{2}$$

$$0 = 4y^2 - x^2 - 2x$$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

$$y = \frac{9 - x^2}{2}$$

$$4x^2 - 5xy + y^2 = 9x^2 + 8y - 36$$

$$y^2 = \dots$$

$$\begin{cases} xy = (y - 2x)^2 & y - 2x \geq 0 \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

$$xy = y^2 - 4x(y - x)$$

$$4x^2 - 5xy + y^2 = 0$$

$$4x^2 - \frac{5x(9-x^2)}{2} + \frac{(9-x^2)^2}{2}$$

$$4x^2 - \frac{45x - 5x^3}{2} + \frac{(9-x)^2}{2}$$

$$4x^2 - 22.5x + 13.5x^2 = 0$$

$$S = 25y^2 - 16y^2 = 9y^2$$

$$x_{1,2} = \frac{5y \pm 3y}{2} = \frac{y}{4}, y$$

$$\frac{9-81}{2} = -36$$

$$y = \frac{9 - (1 + \sqrt{10})^2}{2}$$

$$y = \frac{9 - 1 - 2\sqrt{10} + 10}{2}$$

$$y = 9 - \sqrt{10}$$

$$x = \frac{9 - x^2}{2} : \frac{y}{4}$$

$$x = \frac{(9-x)(3+x)}{8}$$

$$x = \frac{9 - x^2}{2}$$

$$2x = 9 - x^2$$

$$8x = (9-x)(3+x)$$

$$8x = 9 + 9x - 3x^2 = y^2$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$S = 64 + 36 = 100$$

$$x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$S = 4 + 36 = 40$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -1 \pm \sqrt{10}$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm 10}{2} = (-9, 1)$$

$$y = \frac{9 - (1 + \sqrt{10})^2}{2}$$

$$y = \frac{9 - 10 + 2\sqrt{10} + 1}{2}$$

$$\begin{cases} -9 \\ -36 \\ 51 \\ 74 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 - \sqrt{10} \\ 9 - \sqrt{10} \end{cases}$$

$$9 - \sqrt{10} + 2 \cdot 2\sqrt{10} = 11 + \sqrt{10}$$

$$\begin{cases} -1 + \sqrt{10} \\ \sqrt{10} \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{10} - 2(\sqrt{10} - 1)}{\sqrt{10} - 2(\sqrt{10} + 2)}$$

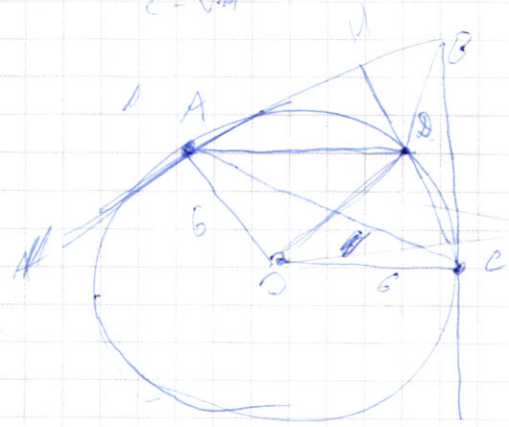
$$2 - \sqrt{10}$$

$$\frac{-2(-1 \pm \sqrt{10})}{2}$$

$$= -1 \pm \sqrt{10}$$

$$\frac{AB \cdot SH}{2} = 15$$

$$AB \cdot SH = 30$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 9|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3|} \leq 0$$

$$x^2 - 2x + 5 - 9|x-1|$$

$$x^2 - 6x + 14$$

$$D = 36 - 56 = -20$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{-20}}{2} = 3 \pm i\sqrt{5}$$



$$x = 3 \pm i\sqrt{5}$$

$$x^2 - 2x + 5 + 9|x-1|$$

$$2x^2 + 2x + 1$$

$$D = 4 - 4 = 0$$

$$x = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x = -1$$

$$4x^2 - 12x + |x|(3-x)$$

$$5x^2 - 12x + 3x - x^2$$

$$4x^2 - 12x + |x|(x-3)$$

$$5x^2 - 12x + x^2 - 3x$$

$$5x^2 - 15x$$

$$5x(x-3)$$

$$x \neq 0$$

$$x \neq 3$$

$$4x^2 - 12x - x - x + 3 = 0$$

$$4x^2 - 13x + 3 = 0$$

$$D = 169 - 48 = 121$$

$$4x^2 - 12x + (-x) \cdot (-x+3)$$

$$5x^2 - 12x + x^2 - 3x$$

$$5x^2 - 15x = 0$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x \neq 3$$

$$x \neq 0$$

$$4x^2 - 12x + (-x) \cdot (x-3)$$

$$4x^2 - 12x - x^2 + 3x$$

$$3x^2 - 9x = 0$$

$$3x(x-3) = 0$$

$$x \neq 3$$

$$x \neq 0$$

$$\begin{array}{r} 1731 \\ + 96 \\ \hline 1827 \\ \hline 239 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 175 \\ + 159 \\ \hline 334 \end{array}$$

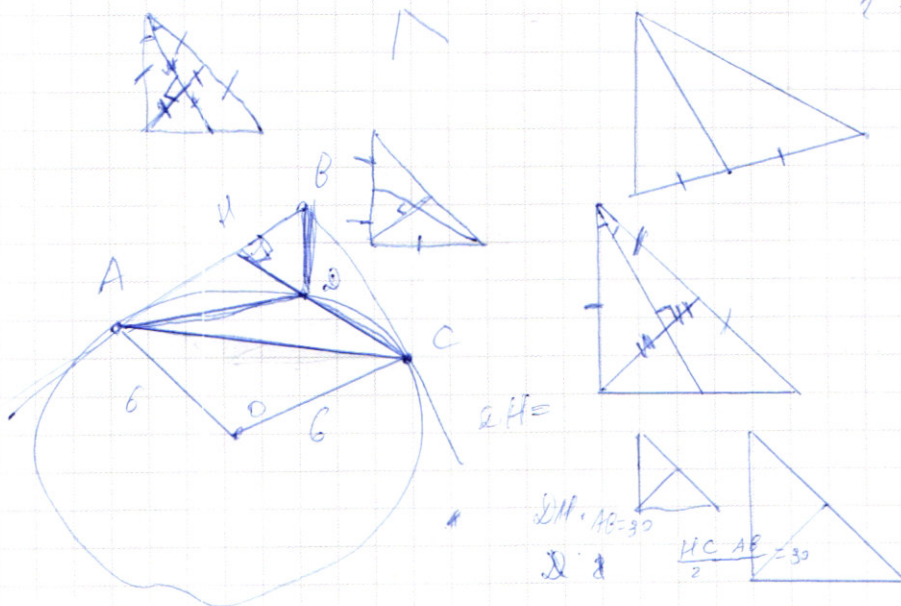
$$1 \cdot 199 = 199$$

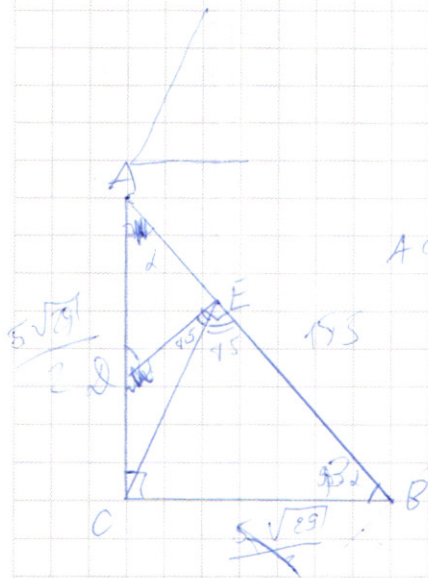
$$2 \cdot 199 = 398$$

$$2 \cdot 199 = 398$$

$$60 \cdot 80 + 160 = 5200$$

$$150 \cdot 25 = 3750$$





$$\frac{25(25+2)}{2} = \frac{25 \cdot 29}{2} + \frac{29 \cdot 2}{2} = \frac{29 \cdot 27}{2}$$

$$AC = \sqrt{29}$$

$$BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$$

$$\angle CED = 75$$

$$AB = \sqrt{29 + \frac{25 \cdot 29}{4}} = \sqrt{\frac{29 \cdot (4 + 25)}{4}} = \sqrt{\frac{29 \cdot 29}{4}} = \frac{29}{2}$$

$$5 \cdot 29 = 145$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{CE}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{CE}$$

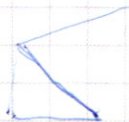
$$\sin B = \frac{\sqrt{29}}{145} \cdot \sqrt{29 \cdot 29}$$

$$\cos B = \frac{5\sqrt{29}}{5\sqrt{29 \cdot 29}}$$

$$\frac{5\sqrt{29}}{2} \cdot \sqrt{29 \cdot 30}$$

$$\frac{5 \cdot 29}{4} = \frac{145}{4}$$

$$\frac{145}{4} = 36.25$$



$$145 = \frac{5\sqrt{29}}{2 \cdot \sin \alpha}$$

$$2 \sin \alpha = \frac{\sqrt{29}}{29}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{29}}{2 \cdot 29}$$

$$\frac{\sqrt{29}}{\sin \beta} = 145$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{29}}{145}$$

$$\frac{29}{145} = \frac{1}{5}$$

$$AD = \frac{AC}{\sin \alpha}$$

$$AD = \frac{AC}{\sin \alpha}$$

$$\sin \beta = \frac{1}{5\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{29}}{2 \cdot 29}$$

$$\frac{29 \cdot CE}{\sqrt{29}} = \frac{29 \cdot 2}{\sqrt{29}}$$

$$CE = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{29}} \cdot \frac{\sqrt{29}}{2 \cdot 29} = \frac{29 \cdot 2}{\sqrt{29}}$$

$$\frac{29 \cdot \sqrt{29}}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{29}} = \frac{29 \cdot 2}{\sqrt{29}}$$

$$29 = \frac{29}{2}$$

$$29 = 14.5$$

$$\frac{145}{5} = 29$$

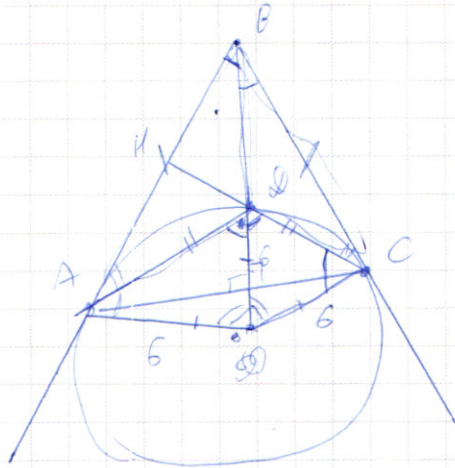
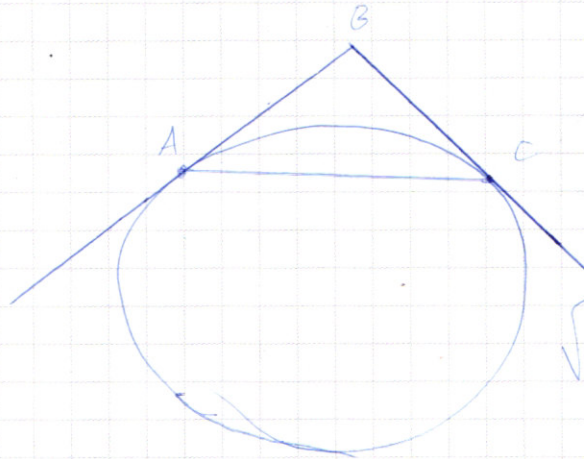
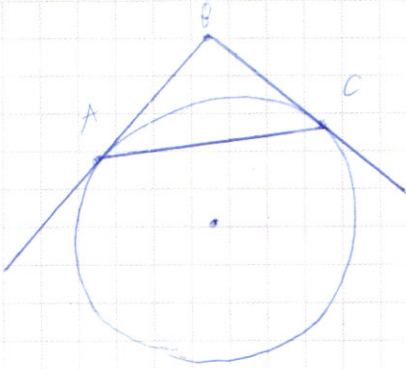
$$\frac{145}{5} = 29$$

$$AD = \frac{(5\sqrt{29} - 29) \cdot 2}{5\sqrt{29}}$$

$$\frac{61}{29} = \frac{29}{29} \cdot \frac{29}{29} = \frac{209}{29}$$

$$\frac{29}{29} = 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\sqrt{\frac{29 \cdot 27}{2}} = \frac{5\sqrt{27} \cdot 2}{2\sqrt{27}}$$

$$\frac{5\sqrt{27}}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{27}} = \frac{5\sqrt{27} \cdot \sqrt{27}}{\sqrt{25 \cdot 27}}$$

$$\frac{DH \cdot AB}{2} = 15$$

$$2S_{\triangle ABC} =$$

$$DH \cdot AB = 30$$

$$HC = 3DH \quad \sin \alpha = \frac{5\sqrt{27}}{2\sqrt{27}}$$

$$\frac{HC \cdot AB}{3} = 30$$

$$\frac{\sqrt{29} \cdot 2}{\sqrt{27}} = \frac{CE \cdot 2\sqrt{27}}{5\sqrt{27}}$$

$$\frac{30}{DH} = 3DH$$

$$90 = DH^2$$

$$DH = 15$$

$$AB \cdot HC = 90 \quad HC = 3DH = 45$$

$$AB = \frac{90}{45} = 2$$

$$36 + 36 = 72$$

$$\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

$$CE = \frac{\sqrt{72}}{5} = \frac{6\sqrt{2}}{5}$$

$$AB \cdot HC = 95$$

$$AB = \frac{10}{3\sqrt{27}} = \frac{10}{3\sqrt{27}}$$

$$\frac{10}{3\sqrt{27}} : \frac{9\sqrt{27}}{1} = \frac{5}{3 \cdot 27} = \frac{5}{27}$$

$$\frac{\sqrt{29} \cdot 2}{\sqrt{27}} = \sqrt{\frac{29 \cdot 27}{2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{29 \cdot 27}}{\sqrt{29}} = \sqrt{27}$$

$$\frac{5\sqrt{29} \cdot 8}{2\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{29 \cdot 27}}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{25 \cdot 27}}{5\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{22}}{5}$$