

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках S и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{29}$, $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leq x \leq 19$, $3 \leq y \leq 19$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

✓ 1.

Чистовик

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + 12|x - 1| - 31} \leq 0. \text{ Зная свойства модуля:}$$

$$\begin{cases} |a| = a, \text{ при } a \geq 0 \\ |a| = -a, \text{ при } a < 0 \end{cases} \text{ решим неравенства. ОДЗ: } x \neq 0, x \neq \pm 3.$$

а) при $x \geq 3$: $\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x + x^2 - 3x} = \frac{x^2 - 6x + 9}{5x^2 - 15x} = \frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} \leq 0.$

числитель всегда будет ≥ 0 ($a^2 \geq 0$) (ОДЗ: $x \neq 3$)

знаменатель тоже всегда будет > 0 , т.к. $5x$ при $x \geq 3$ > 0 и $x-3 > 0$. (По ОДЗ не ~~имеет~~ $x \neq 3$) \Rightarrow при $x \geq 3$ решений нет.

б) при $1 \leq x < 3$: $\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x - x^2 + 3x} = \frac{(x-3)^2}{3x^2 - 9x} = \frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} \leq 0.$

числитель всегда > 0 (ОДЗ: $x \neq 3$) ($a^2 \geq 0$).

знаменатель всегда будет < 0 , т.к. $3x$ при $x \geq 1$, $x < 3$ > 0 , а $x-3 < 0$ (ОДЗ: $x \neq 3$) \Rightarrow при $1 \leq x < 3$ решением будет являться любой $x \in [1; 3)$

в) при $0 \leq x < 1$: $\frac{x^2 - 2x + 5 + 4x - 4}{4x^2 - 12x - x^2 + 3x} = \frac{x^2 + 2x + 1}{3x^2 - 9x} = \frac{(x+1)^2}{3x(x-3)} \leq 0.$

числитель всегда > 0 ($a^2 \geq 0$); ~~ОДЗ~~

знаменатель всегда < 0 , т.к. $3x$ при $0 \leq x < 1$ $\neq 0$ (ОДЗ: $x \neq 0$); а $x-3 < 0 \Rightarrow$ при $0 \leq x < 1$ решением будет являться $x \in (0; 1)$.

1 (прямые)

Условие

$$2) \text{ при } x < 0: \frac{x^2 - 2x + 5 + 4x - 4}{4x^2 - 12x + x^2 - 32} = \frac{(x+1)^2}{5x^2 - 15x} = \frac{(x+1)^2}{5x(x-5)} \leq 0$$

числитель будет > 0 при $x \neq -1$ и $= 0$ при $x = -1$.

знаменатель всегда будет > 0 , т.к. $5x$ при $x < 0$

< 0 и $x - 5 < 0 \Rightarrow 5x(x - 5) > 0 \Rightarrow$ при $x < 0$ числитель

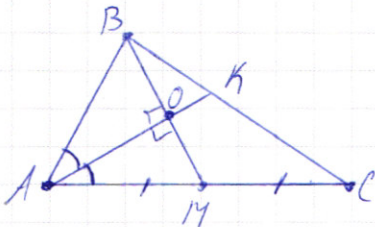
будет равен нулю только $x = -1$.

Ответ: $x \in [-1; -1] \cup (0; 3)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

✓ 2.

Чистовик



Дано: $\triangle ABC$ $P_{\triangle ABC} = 300$

$\angle BAK = \angle KAM$ $AM = MC$

$\angle BOA = 90^\circ$

Найти: кол-во таких \triangle с заданн. сторонами

Решение

1) рассм. $\triangle ABO$ и $\triangle AOM$. Они равны т.к. AO - общ., \angle и $\angle BOA = \angle$ $\angle BAK = \angle KAM$; $\angle BOA = \angle AOM \Rightarrow \angle ABO = \angle AOM \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = AM$ (т.к. $\triangle ABM$ - р/б)

2) $AM = \frac{1}{2} AC \Rightarrow AB = AM = \frac{1}{2} AC \Leftrightarrow AC = 2AB \Rightarrow$

\Rightarrow нам нужно найти кол-во \triangle , с $P = 300$, у которых одна сторона в два раза больше другой

3) Пусть $AB = x$, тогда $AC = 2x$, и пусть $BC = a$.

по неравенству \triangle : а) $x + a > 2x \Rightarrow a > x$ и $2x + a > a \Rightarrow$

$\Rightarrow a < 3x$ и $a + 3x = 300$; рассм. оба случая:

а) $a > x$. Пусть $a = x$, тогда $x + 3x = 300$ $x = 75 \Rightarrow$

\Rightarrow для \triangle нужна $a > 75$ и $x < 75$. (иначе $2x > 150$)

(иначе $2x > 150$ и $x + a < 150 \Rightarrow x + a < 2x$)

б) $a < 3x$. Пусть $a = 3x$, тогда $3x + 3x = 300$ $x = 50 \Rightarrow$

$\Rightarrow a < 150$ и $x > 50$ (иначе $x + 2x < 150$ и $a > 150 \Rightarrow x + 2x < a$)

4) Значит x может принимать значения от 51 до 74. Таких \triangle всего 24.

✓ 2 (продолжение)

Чистовик

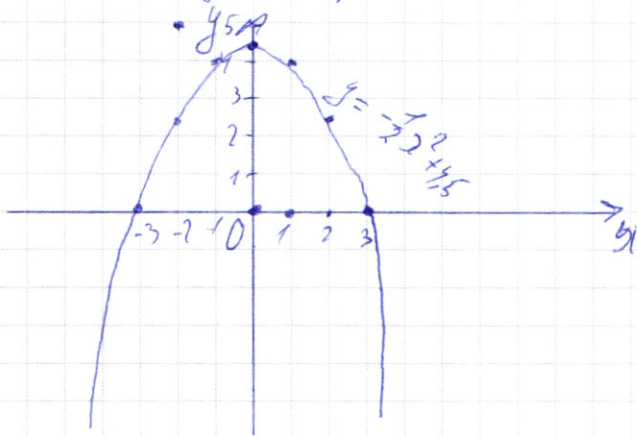
Объем: 24

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{3} \begin{cases} y - 2x = -\sqrt{xy} & (1) \\ 2y + x^2 = 9 & (2) \end{cases}$$

Чистовик

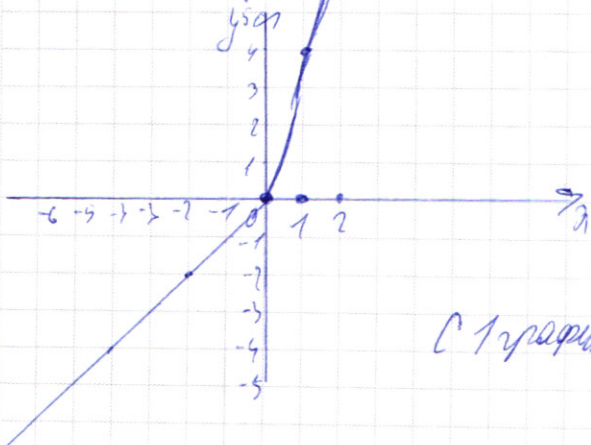
1) Нарисуем график (2): $2y + x^2 = 9$ $2y = 9 - x^2$ $y = -\frac{x^2 + 9}{2}$



$y = -\frac{1}{2}x^2 + 4,5$	$xb = 0$
x	y
1	4
2	2,5
3	0

значит $y \leq 4,5$.

2) нарисуем график (1): $y = \sqrt{xy} + 2x$ (при этом $xy > 0$)



x	y	xy
1	0	0
2	4	8

как видно при $x > 0$ это

вогн. парабола, которая имеет

с графиком только 1 общую т. (1; 4)

x	y	xy
-1	-2	-2
-2	-3	-6

при $x < 0$ это прямая, при

которой $y = x$, а значит

чтобы найти общую точку 1 и 2 графиков мы можем

31 продолжение

Именован

привести y к x : во втором равенстве.

$$2x + y^2 = 9$$

$$x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$D = 4 + 36 = 40$$

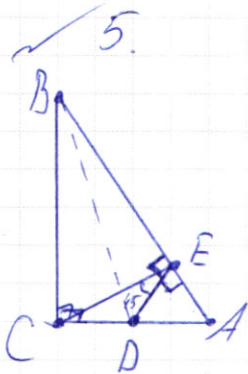
$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{40}}{2} \quad (\text{но по смыслу } x \text{ должен быть } < 0)$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{40}}{2} = \frac{-2(-1 - \sqrt{10})}{2}$$

Ответ: 1) $x = 1; y = 4$

2) $x = -1 - \sqrt{10}; y = -1 - \sqrt{10}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Дано: $AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$ $BC = \sqrt{29}$ $\angle CED = 45^\circ$

Найти: $\frac{AD}{AC}$ и S_{AED} .

Решение

1) Построим $\square CBED$. Вокруг него можно описать окружность, так как $\angle C = \angle E = 90^\circ$.

2) $\angle BEC = 90^\circ - \angle CED = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

по т. Синусов $\frac{BC}{\sin \angle BEC} = 2R = d = BD \Rightarrow$
 $\Rightarrow BD = \frac{BC}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{29}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{29} \cdot 2}{\sqrt{2}} = \sqrt{58}$

3) $CD^2 = BD^2 - BC^2$ $CD^2 = 58 - 29 \Rightarrow CD = \sqrt{29}$

4) так как $AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $CD = \sqrt{29}$, то $AD = \frac{5\sqrt{29}}{2} - \sqrt{29} =$

$= 2,5\sqrt{29} - \sqrt{29} = 1,5\sqrt{29} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{1,5\sqrt{29}}{2,5\sqrt{29}} = \frac{3}{5} = 0,6$

5) $\frac{S_{AED}}{S_{ADC}} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{S_{AED}}{S_{ADC}} = \frac{3}{5}$
 $\frac{S_{AED}}{S_{CBA}} = \left(\frac{AD}{AC}\right)^2$

$\frac{S_{CBA}}{S_{AED}} = \left(\frac{AC}{AD}\right)^2$ $S_{CBA} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{29} \cdot \sqrt{29} = \frac{29}{2}$

$BA^2 = 29 + \frac{25 \cdot 29}{4}$ $AD = \frac{3\sqrt{29}}{2}$

$\frac{5 \cdot 29}{4} = \frac{25 \cdot 29}{4} \Rightarrow S_{AED} = \frac{9 \cdot 29}{4} = 65,25$

Ответ: $\frac{AD}{AC} = 0,6$; $S_{AED} = 65,25$.

✓ 5.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Черновик

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases} \quad f = \sqrt{xy} + 2x \quad y^2 - 4xy + 4x^2 = xy$$

$$2y + x^2 = 9 \quad 2y + x^2 = 9$$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0 = 5xy \quad \begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases} \quad (x-3)(x+3) = 2y$$

$$2y = 2 \cdot (\sqrt{xy} + 2x) = (x-3)(x+3)$$

$$4 \cdot xy^2 + 8xy + 8x^2 = \quad 2x = y - \sqrt{xy}$$

$$y^2 + 4x^2 = 5xy \quad x^2 = 9 - 2y$$

$$x^2 - 9 = 2y \quad \begin{cases} x - y \geq 0 \\ y \geq 2x \end{cases}$$

$$2y = 4x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 3^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} 2y - 4x = \cancel{x} + y \sqrt{x+2y} - 4x \\ 3y - 3x = \end{matrix}$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = 3 \cdot (y - x) \quad 3 = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{y - x}$$

$$2y + x^2 = 3 \cdot 3 \quad 3 = \frac{2y - x^2}{3}$$

$$3 = \frac{3 \cdot (x + y + 2\sqrt{xy})}{(x - 2x)(2y - x^2)}$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy$$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$$

$$2y + x = y$$

$$x^2 = 9 \cdot 2y$$

$$y^2 - 5xy + 5x^2 = y - 2y$$

Умножим

$$\begin{array}{r} 920 \cdot 4 \\ -1 \cdot 105 \\ \hline 020 \end{array}$$

$$y - 2x = \sqrt{xy}$$

$$105 \cdot \frac{105}{7}$$

$$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$2x = y - \sqrt{xy}$$

$$\begin{array}{r} 6720 \cdot 4 \\ -4 \cdot 105 \cdot 4 \\ \hline 24 \cdot 105 \cdot 4 \\ -24 \cdot 105 \cdot 4 \\ \hline 32 \cdot 105 \cdot 4 \\ 32 \cdot 105 \cdot 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$4x^2 = y^2 - 2\sqrt{xy} + xy - 36 - 8y$$

$$2y - x^2 = 9$$

$$4x^2 = 36 - 8y$$

$$5xy - y^2 = 36 - 8y$$

$$y^2 - 8y + 36 = 5xy$$

$$D_y = (8 + 20(-10 \pm \sqrt{105}))^2 - 144$$

Умножим

$$y^2 + y(8+5x) + 36 = 0$$

$$D = x^2 + 80x - 80$$

$$y^2 - 8y - 5xy + 36 = 0$$

$$y^2 - y(8+5x) + 36 = 0$$

$$(8+5x)^2 - 4 \cdot 36 = 0$$

$$64 + 80x + x^2 - 144 = 0$$

$$x^2 + 80x - 80 = 0$$

$$D = 6400 + 320 = 0$$

$$D = 6720$$

$$x = \frac{-80 \pm \sqrt{6720}}{2} = -40 \pm \sqrt{1680} =$$

$$= -40 \pm 2\sqrt{105} = -40 \pm 2\sqrt{105} = 4(-10 \pm \sqrt{105})$$

$$\frac{y^2 - 8y + 36}{y} = 5x$$

$$8+5x=2$$

$$y^2 - 8y + 36 = 5xy$$

$$y^2 - x y + 36 = 0$$

$$D = x^2 - 36 \geq 0 \quad x^2 \geq 36$$

$$\text{если } x^2 \geq 36$$

$$8+5x=6 \quad 8+5x=18 \quad -6 \leq 8+5x \leq 18$$

$$5x = -2 \quad x = -0.4 \quad y = 5x \leq -2$$

$$y = \frac{-2}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{5-4=1}{16 \cdot 24+2} \leq 0$$

Черновик

$$1) \frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x-1| \cdot |x-3|} \leq 0$$

$$x \neq 0$$

$$x \neq 3$$

если $x \geq 3$:

$$\text{или } x = -1$$

$$1 + 2 + 5 - 8 = 0$$

$$4 + 12 \cdot 24 = 20 \neq 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x + x^2 - 3x} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{5x^2 - 15x} \leq 0 \quad \frac{(x-3)^2}{5(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)^2}{5(x-3)} \leq 0$$

$$n. 1. = x = \pm 3$$

$$n. 3. = x = 0; x = 3$$



при $x \geq 3$ решений нет.

$$x \in (0; 3]$$

если $1 \leq x < 3$:

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x + |x - (-x + 3)|} = \frac{(x-3)^2}{3x^2 - 9x} = \frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} \leq 0$$

$$x \in [1; 3)$$



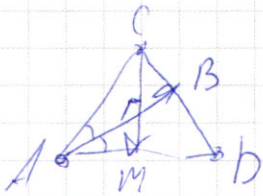
если $0 \leq x < 1$: $\frac{x^2 - 2x + 5 + 4x - 4}{4x^2 - 12x + x^2 - 3x} = \frac{x^2 + 2x + 1}{3x^2 - 9x} \leq 0$

$$\frac{(x+1)^2}{3x(x-3)} \leq 0 \quad \text{при } x \in (0; 1) \quad \text{Итого } x \in (0; 3)$$

если $x < 0$: $\frac{x^2 - 2x + 5 + 4x - 4}{4x^2 - 12x + x^2 - 3x} = \frac{x^2 + 2x + 1}{5x^2 - 15x} = \frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \leq 0$

при $x \leq 0$ решений нет.

$$\text{Ответ } x \in (0; 3)$$

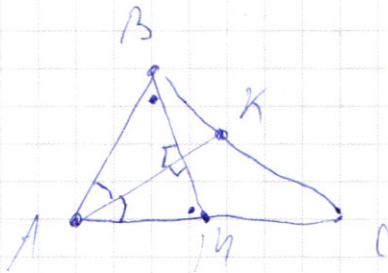


$$\vec{AB} \cdot \vec{CM} = 0$$

$$\vec{CM} = \vec{CA} + \vec{AM}$$

$$\vec{AB} = \vec{CA} + \vec{CB}$$

1 2 9 10 10
 31 52 59 60 70
 11
 2



$$AB = AM$$

$$AB = \frac{1}{2} AC$$

Задача: Найти кол-во Δ таких, что $AB = \frac{1}{2} AC$

$$AC = 2AB$$

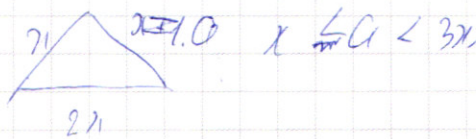
$$2 \text{ и } 1$$

$$4 \text{ и } 2$$

$$1 \text{ и } 3$$

$$200 \sim 100$$

$$150 \quad 75$$



$$x = 2x$$

$$300 = 81 \quad 4x = 300$$

$$4x = 299 \quad x = 75$$

$$x = 152 \quad 76$$

$$300 - 152 =$$

$$= 148 - 76 = 72$$

$$2x < 150$$

$$x < 75$$

$$x > 50$$

$$x \in [52; 74]$$

Ответ: 23

$$\begin{array}{r} 300 \\ - 2x \\ \hline 175 \\ 20 \end{array}$$

$$x = 50 \quad 2x = 100$$

$$a = 150$$

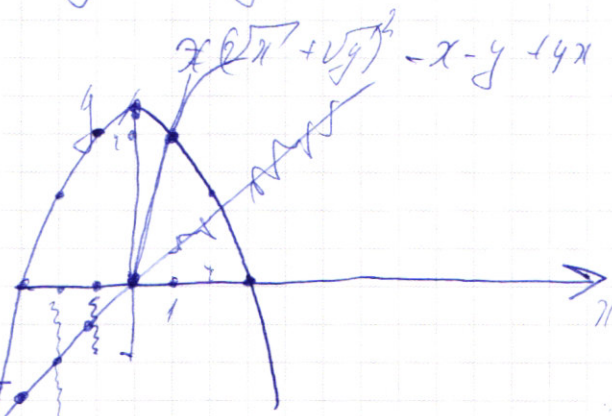
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y - 2x - \sqrt{xy}$
 $2y + x^2 = 9$
ОДЗ: $xy \geq 0$

Черновик
 $y - \sqrt{xy} + 2x$

$(3-x)(3+x) = 2y = 2\sqrt{xy} + 4x$

$9 - x^2$
 $9 - 6x + x^2$
 $2y = 9 - x^2$



$x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - x - y + 4x = \sqrt{x} + \sqrt{y} + 3x - y$
 $y = 2x + \sqrt{xy}$
 $y = 9 - x^2 - \frac{2^2 + y}{2}$

$y = 2x + \sqrt{x}$

$2y = 4x + \sqrt{2x(9-x^2)}$
 $2y = 4x + \sqrt{2x(3-x)(3+x)}$
 $9 - x^2 = 4x + \sqrt{2x(9-x^2)}$

$x = -2$
 $y + 2 = \sqrt{-1 \cdot y}$
 $y = -1$
 $y + 4 = \sqrt{2 \cdot y}$
 $y = -2$
 $x = -3$

$x^2 + 2x - 9 = 0$ $x < 0$

$y = \sqrt{xy} = 2x$
 $y - 4 = \sqrt{2y}$
 $7.5 - 2x = \sqrt{2x}$

$y = y + 6 = \sqrt{3 \cdot y}$
 $y = -3$

$D = 4 + 36 = 40$

$y = \sqrt{xy} + x$

$y = -4$

$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{40}}{2} > 0$

$y = -4$

$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{40}}{2} = \frac{-2 - 2\sqrt{10}}{2} = \frac{-2(1 + \sqrt{10})}{2}$

$y + 8 = \sqrt{4 \cdot y}$

$-1 - \sqrt{y}$

$-\frac{1}{2}x^2 + 4.5$ $x = 0$

$y = 7.5$ $y - 10 = \sqrt{5y}$

$y^2 - 4y + x = 2y$

$-2 + 4.5$

$y^2 - 20 + 100 = 5y$

$y^2 - 5xy + x = 0$

$y(y - 5x + \frac{x}{y})$

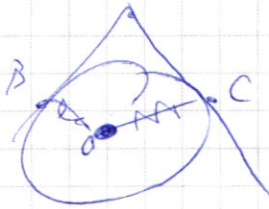
$y(y - 5x) + x = 0$

$y^2 - 5y + 80 = 0$

$$y - 8 = \sqrt{xy}$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

$$y - 4 = 2 \cdot 8$$



$$f(x) = \text{~~ax^2 + bx + c~~}$$

$$nx^2 + mx + k$$

$$f(y) = x - 2$$

$$f - 4 = 4 \quad \sqrt{f} = 4$$

$$n(a^2 + b^2) + mab + k = na^2 + ma + k + nb^2 + mb + k$$

$$|3x| + |2y| + |6 - 3x + 2y| \geq 6$$

$$x^2 - 2x + 3y + y^2 \leq 0$$

$$nx^2 + mx + k = p$$

$$nx^4 + mx^2 + k = 2p$$

$$nx^4 - 1 + mx^2 + k = 2p - 2 + 2mx^2 + 2k$$

$$n(a^2 + b^2) + mab = n(a^2 + b^2) + m(a + b) + k$$

$$n \neq 0$$

$$f(p) = p \quad nx^2 + mx + k = p$$

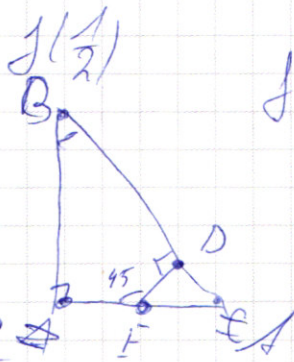
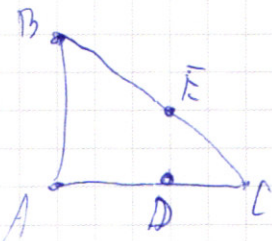
$$p(np + m) + k = p$$

$$f(p^2) = p + p$$

$$y = \frac{1}{x} \quad f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x^2) = f(x) + f(x) \quad f(x) = p$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ 9 \\ \hline 20 \end{array} \begin{array}{r} 1 \\ 4 \\ \hline 5, 25 \\ 20 \end{array}$$

$$x + y$$

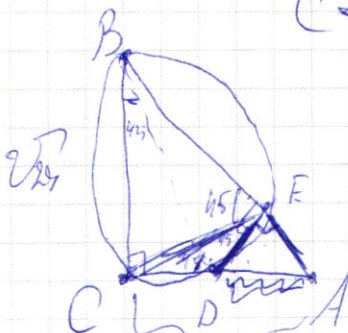


$$f\left(x - \frac{1}{y}\right) = f(x) > 0 + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$\frac{1}{y}$$

$$\frac{AD}{AC} - ? \quad S_{AEID} - ?$$

$$AC = \frac{3\sqrt{29}}{2} \quad BC = \sqrt{29}$$



$$\frac{AD}{AC} - ?$$

$$S_{AEID} \quad AB^2 = 29 + \frac{25 \cdot 29}{4}$$

$$AC = \frac{3\sqrt{29}}{2} \quad BC = \sqrt{29}$$

$$\frac{5 \cdot 29}{2} = \frac{145}{2}$$

$$S_{ABD} = \frac{5 \cdot 19}{2} = \frac{95}{2}$$

$$BD = \frac{\sqrt{29} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{29}$$

$$\frac{\sqrt{29}}{\sin 45^\circ} = \text{height } BD$$

$$CD^2 = 58 - 29 = 29$$