МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45°$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\dfrac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\le 0$

разберём 4 случая:
раскроем $|x|$; $|x-1|$; $|x-3|$:

4: $- - -$; 3: $+ - -$; 2: $+ + -$; 1: $+ + +$

$0 \quad 1 \quad 3$

1) $\dfrac{x^2-2x+5-4(x-1)}{4x^2-12x+x(x-3)}\le 0$, $x \geq 3$.

$\dfrac{x^2-6x+9}{5x^2-15x}\le 0 \qquad \dfrac{(x-3)^2}{5x(x-3)}\le 0.$

числитель ≥ 0 и равен нулю при $x=3$, но $x\neq 3$ из ОДЗ, знаменатель должен быть <0.

$5x(x-3)<0$.

$+ \quad 0 \quad - \quad 3 \quad +$

$x\in(0;3)$, при $x>3$, $x\in\varnothing$.

2) $\dfrac{x^2-2x+5-4(x-1)}{4x^2-12x+x(3-x)}\le 0$. $1\leq x<3$

$\dfrac{x^2-6x+9}{3x^2-9x}\le 0.$ $\dfrac{(x-3)^2}{3x(x-3)}\le 0$

$3x(x-3)<0$; $x\in(0;3)$, при $1\leq x<3$, $x\in[1;3)$.

3) $\dfrac{x^2-2x+5-4(1-x)}{4x^2-12x+x(3-x)}\le 0$. $0<x\le 1$

$\dfrac{x^2+2x+1}{3x^2-9x}\le 0.$ $\dfrac{(x+1)^2}{3x(x-3)}\le 0$, числитель ≥ 0, однако равен нулю при $x=-1$, включаем в ответ.

$3x(x-3)\le 0$ $\quad + \quad 0 \quad - \quad 3 \quad +$, при $0<x<1$, $x\in(0;1)$.

ОДЗ:

$4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|\neq 0$

разберём 3 случая:
раскроем $|x|$ и $|x-3|$:

3: $- -$; 2: $+ -$; 1: $+ +$

$0 \quad 3$

1) $4x^2-12x+x(x-3)\neq 0$

$5x^2-15x\neq 0 \qquad x\in[3;+\infty)$

$5x(x-3)\neq 0$

$x\neq 0$ ~~и~~ и $x\neq 3$.

2) $4x^2-12x+x(3-x)\neq 0$

$3x^2-9x\neq 0 \qquad x\in(0;3)$

$3x(x-3)\neq 0$.

$x\neq 0$ и $x\neq 3$

3) $4x^2-12x+x(x-3)\neq 0$.

$5x(x-3)\neq 0 \qquad x\in(-\infty;0]$

$x\neq 0$ и $x\neq 3$.

$\boxed{x\neq 0;\ x\neq 3}$

4) $\dfrac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x-x(3-x)} \le 0$, $x<0$.

$\dfrac{x^2+2x+1}{5x^2-15x} \le 0$. $\dfrac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \le 0$, числитель ≥ 0, но при $x=-1$, равен нулю, знаменатель должен быть <0.

$5x(x-3)<0$

$\overset{+}{}\;0\;\overset{-}{}\;3\;\overset{+}{}$, $x \in (0;3)$

при $x<0$; $x \in \varnothing$.

Ответ: ~~$x \in (0;1] \cup [1$~~
$x \in (0;3)$.

№3. $\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$

ОДЗ:
$xy \ge 0$.
$x \ge 0$ и $y \ge 0$
или $x<0$ и $y<0$.

Пусть $a=\sqrt{x}$, $b=\sqrt{y}$

$\begin{cases} b^2-2a^2=ab \quad (1) \\ 2b^2+a^4=9 \quad (2) \end{cases}$ $\begin{cases} b^2-2a^2-ab=0. \\ 2b^2+a^4=9. \end{cases}$

Заметим, что 1 уравнение можно разложить на множители,
$b^2-2a^2-ab=0=(b-2a)(b+a)$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=2a \\ 2b^2+a^4=9 \end{cases} \\ \begin{cases} b=-a \\ 2b^2+a^4=9 \end{cases} \end{array}\right.$ $\rightarrow 2(2a)^2+a^4=9$; $a^4+8a^2-9=0$; $x^2+8a-9=0$.

По теореме Виета:
$x_1=-9$
$x_2=1$.
$2y=9-x^2$
$y=\dfrac{9-x^2}{2}$
$y=4$.
1 пара: $(1;4)$.

$b=-a$
$\sqrt{x}=-\sqrt{y}$, что может быть при $x=y=0$, но подставив во второе уравнение, мы получим неверное выражение: $0=9$

Ответ: $(1;4)$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

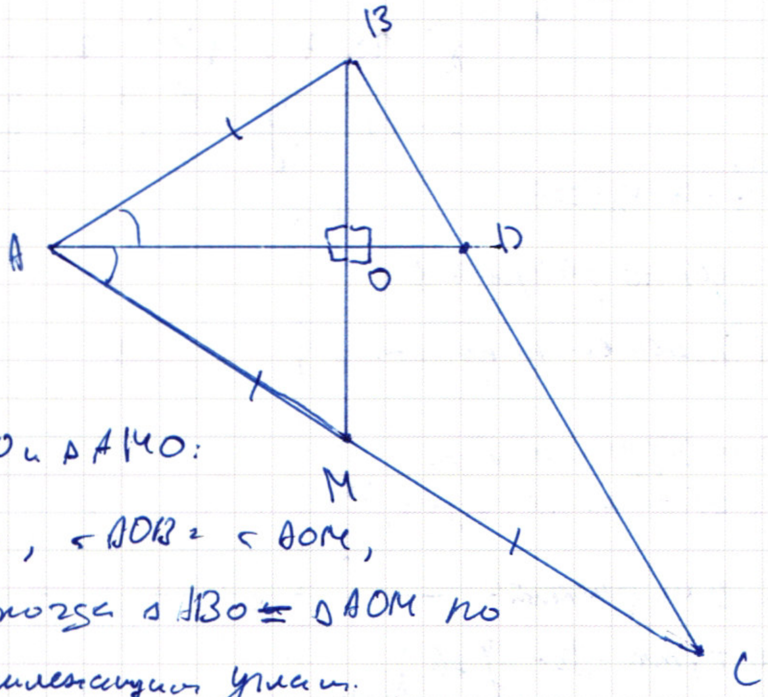
Дано:

$\angle BAO = \angle MAO$,

$AM = MC$,

$\angle AOB = 90°$.

$AB + BC + AC = 300$.



Реш-е:

рассмотрим $\triangle ABO$ и $\triangle AMO$:

AO - общая сторона, $\angle AOB = \angle AOM$,

$\angle BAO = \angle MAO$, тогда $\triangle ABO = \triangle AOM$ по

стороне и двум прилежащим углам.

$AB = AM$ как соответственные стороны.

Пусть $AB = a$, $BC = b$.

Тогда $AC = 2a$.

$a + 2a + b = 300$

$3a + b = 300$.

1) $a < b$, $b = 300 - 3a$

$a < 300 - 3a$

$4a < 300$

$a < 75$

2) $3a > b$

$3a > 300 - 3a$

$6a > 300$

$a > 50$.

Воспользуемся свойством

$AC < AB + BC$.

$2a < a + b$

$a < b$

и

$BC < \cancel{2a+a}\ AC + AB$

~~$BC < 2a + a = 3a$~~

$b < 3a$

$\Rightarrow 50 < a < 75$

такие a можно посчитать 24 раза.

Ответ: 24.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№6 $\begin{cases} |3x| + |2y| + |6-3x-2y| > 6 & (1) \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \le 0. & (2) \end{cases}$

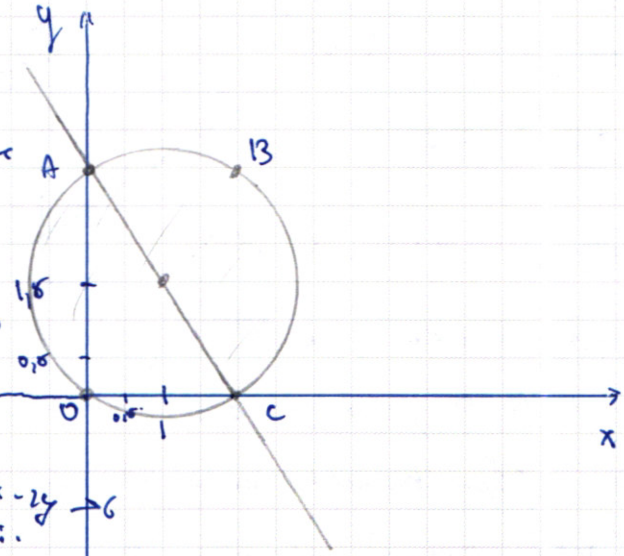
2 уравнение: $x^2 - 2x - 3y + y^2 \le 0$. прибавим к обеим ~~частям~~ частям $\frac{13}{4}$.

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 3y + \frac{9}{4} \le \frac{13}{4}.$$

$$(x-1)^2 + (y - \tfrac{3}{2})^2 \le \frac{13}{4}.$$

1 уравнение:

$|3x| + |2y| + |6-3x-2y| > 6$



все модули можно раскрыть 8 способами. Отметём не нужные случаи.

Заметим, что окружность не пересекается с областью $x<0, y<0$, – 2 случая.

Заметим, что если раскрыть все модули с +, то $3x + 2y + 6 - 3x - 2y > 6$

$6 > 6$, что не верно, – 1 случай.

Остаётся рассмотреть 5 разных случаев.

I: $3x \ge 0,\ 2y \ge 0,\ 6 - 3x - 2y < 0$, нарисуем прямую $2y + 3x - 6 = 0$ на будущее. ($y = -\frac{3}{2}x + 3$.)

$3x + 2y - 6 + 3x + 2y > 6$

$4y + 6x > 12$

$y > -\frac{3}{2}x + 3$. Таких точек нет.

II: $3x \ge 0,\ 2y < 0,\ 6 - 3x - 2y \ge 0$.

$3x - 2y + 6 - 3x - 2y > 6$

$4y > 0$ Таких точек нет.

$y > 0$.

Ответ: 0.

III: $3x \ge 0,\ 2y < 0,\ 6 - 3x - 2y < 0$.

$3x - 2y - 6 + 3x + 2y > 6$.

$6x > 12$

$x > 2$. Таких точек нет.

IV: $3x < 0;\ 2y \ge 0,\ 6 - 3x - 2y \ge 0$

$-3x + 2y + 6 - 3x - 2y > 6$

$-6x > 0$

$x < 0$. Таких точек нет.

V: $3x < 0,\ 2y \ge 0,\ 6 - 3x - 2y < 0$.

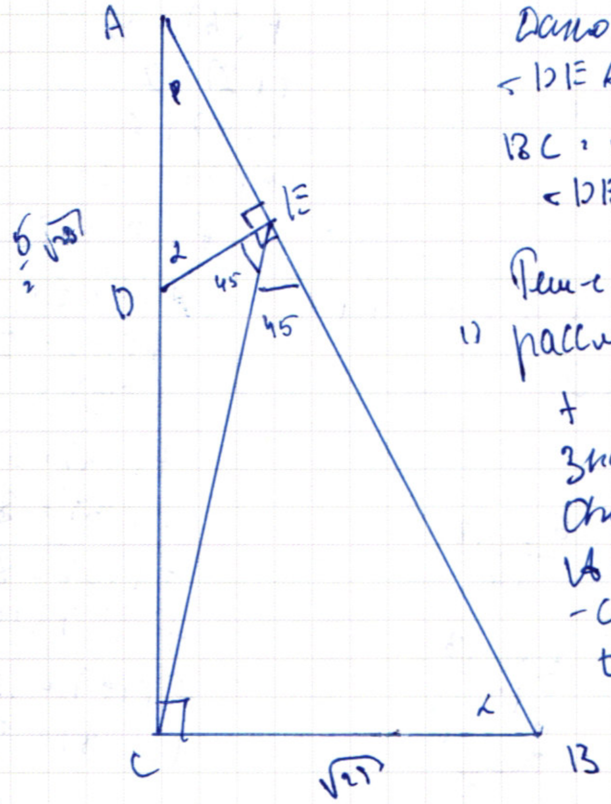
$-3x + 2y - 6 + 3x + 2y > 6$.

$4y > 12$

$y > 3$. Таких точек нет.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



Дано:
$\angle DEA = 90° = \angle ACB$.
$BC = \sqrt{29}$, $AC = \frac{5}{2}\sqrt{29}$,
$\angle DEC = 45°$.

Реш-е:
1) рассмотрим $DCBE$: $\angle DCB +$
$+ \angle DEB = 90 + 90 = 180$, а
значит вокруг фигуры можно
описать окружность,
А значит описанная окружно-
-сть вокруг $\triangle DEC$ и $\triangle EBC$
одна и та же, а значит
и радиусы один и тот
же, пусть будет r.

Теорема синусов для $\triangle DEC$:
$\frac{DC}{2\sin 45} = r$ и для $\triangle CEB$:
$\frac{BC}{2\sin 45} = r$, тогда $BC = DC =$
$= \sqrt{29}$.

$AD = AC - DC = \frac{5}{2}\sqrt{29} - \sqrt{29} = \frac{3}{2}\sqrt{29}$.

$\cancel{\frac{AD}{DC}} = \frac{AD}{AC} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{29}}{\frac{5}{2}\sqrt{29}} = \frac{3}{5}$.

2) Пусть $\alpha + \beta = 90°$.
$\angle B = \alpha$, тогда $\angle A = \beta$, но
т.к. $\angle DEA = 90°$, то $\angle ADE =$
$= 90 - \beta = \alpha$.

$\triangle ADE$ и $\triangle ABC$ подобны по двум углам:
$\angle CBA = \angle ADE$, $\angle A$ - общий.

$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = k$.

найдём AB: по т.П. $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} =$
$= \sqrt{\frac{25}{4} \cdot 29 + 29} = \frac{\sqrt{29} \cdot \sqrt{29}}{2} = \frac{29}{2}$.

$DE = \frac{AD \cdot BC}{AB} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{29} \cdot \sqrt{29}}{\frac{29}{2}} = 3$. , $AE = \frac{DE \cdot AC}{BC} = \frac{3 \cdot \frac{5}{2}\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = \frac{15}{2}$.

$S_{ADE} = \frac{DE \cdot AE}{2} = \frac{3 \cdot \frac{15}{2}}{2} = \frac{45}{4}$

№7.

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = p$.

$f(1) = f(1) + f(1) = \cancel{f(1)}$

$\underset{f(1)+f(1)}{\parallel} \quad \underset{f(1)+f(1)}{\parallel}$

$f(1) = k \cdot f(1)$, тогда $f(1) = 0$.

$f(1) = f(2) + f(\frac{1}{2})$

$f(\frac{1}{2}) = -f(2)$, тогда $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$.

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y) < 0$.

$f(x) < f(y)$

$f(1) = 0$

$f(2) = 2$

$f(3) = 3$

$f(4) = 4$

$f(5) = 5$

$f(6) = 5$

$f(7) = 7$

$f(8) = 6$

$f(9) = 6$

$f(10) = 7$

$f(11) = 11$

$f(12) = 7$

$f(13) = 13$

$f(14) = 9$

$f(15) = 8$

$f(16) = 8$

$f(17) = 17$

$f(19) = 19$

$f(18) = 8$.

$x = 1,\ y = \underbrace{2 \ldots 18}_{17}$

$x = 2,\ y = \underbrace{3 \ldots 18}_{16}$

$x = 3,\ y = \underbrace{4 \ldots 18}_{15}$

$x = 4,\ y = \underbrace{5 \ldots 18}_{14}$

$x = 5,\ y = \underbrace{7 \ldots 18}_{12}$

$x = 6,\ y = \underbrace{7 \ldots 18}_{12}$

$x = 7,\ y = \underbrace{11, 13, 14, 15, 16, 17, 15, 18}_{8}$

$x = 8,\ y = \underbrace{7, 10 \ldots 18}_{10}$

$17 + 14 + 16 + 12 + 15 + 12 + 8 +$

$+ \cancel{10} + \cancel{8} + \cancel{8} + \cancel{8} + \underset{2}{\cancel{13}} + \cancel{14} + \cancel{16} +$

$+ \cancel{15} + 1 + \cancel{5} =$ —Ответ.

$x = 9,\ y = \ldots 10$

$x = 10,\ y = \ldots 8$

$x = 11,\ y = \underbrace{13, 17, 19}_{3}$

$x = 12,\ y = \ldots 8$

$x = 13,\ y = \underbrace{17, 19}_{2}$

$x = 14,\ y = \ldots 4$

$x = 15,\ y = \ldots 5$

$x = 16,\ y = \ldots 5$

$x = 17,\ y = \underbrace{19}_{1}$

$x = 18,\ y = 5$; $\cancel{x} = 19,\ y = \emptyset$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$f(1) = 0$

$f(2) = 2$

$f(3) = 3$

$f(4) = \cancel{8}\ 4$

$f(5) = 5$

$f(6) = \cancel{8}\ 5$

$f(7) = 7$

$f(8) = \cancel{6}$

$f(9) = 6$

$f(10) = 7$

$f(11) = 11$

$f(12) = 5 = 7.$

$f(16) = f(32) + f(\frac{1}{2})$

$f(32) = 2 \cdot f(16) = 16.$

$f(16) = 8\ ,\ f(32) = 16$

$f(\frac{1}{2}) = -8.$

$f(1) = f(2) + f(\frac{1}{2})$ $-2.$

$f(1) = f(3) + f(\frac{1}{3}) =$ -3

$f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = 0.$

$f(x) = -f(\frac{1}{y}).$

$f(\frac{1}{y}) = f(y) + f(\frac{1}{y^2}).$

$f(\frac{1}{y^2}) = f(y) + f(\frac{1}{y^3}).$

$f(\frac{1}{y^3}) = f(y) + f(\frac{1}{y^4}).$

$f(-100) = f(-20) + f(5).$

$f(-1) = f(-1) + f(1)$ 5

$f(-2) = f(-2) + f(1).$

$f(2) + f(-1).$

$f(1) = f(-1) \cdot 2.$

$+ f(-1).$

$f(-1) = \frac{f(1)}{2} = 0.$

$f(8) = f(2) + f(4) = 6.$

$\cancel{f(12)} =$ $f(12) = 7$

$f(12) = 7.$

$f(13) = 13$

$f(14) = f(7) + f(2) =$

$= 7 + 2 = 9$

$f(15) = 8$

$f(16) = 8 = \cancel{8}.$

$f(17) = 17$

$f(19) = 19$

$f(18) = 7 = 8.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(15\cdot 15) = 15+15$

$f(15^2) = 2\cdot 15$

$f(t^2) = 2t$

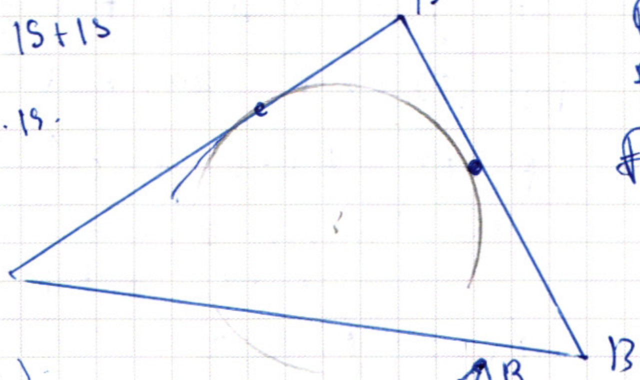
$f(x\cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

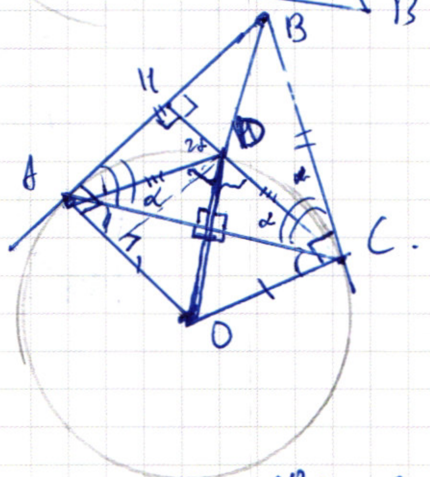
$f(1) = 3 + f(\frac{1}{y})$

$f(1) = f(1) + f(1)$

$f(1) = 2\cdot f(1)$

$f(1) = 0$





$f(1) = k f(1)$

$f(1) = 0$

$f(2) = f(1) + f(2)$

~~$f(1) = k f(1)$~~

~~$f(1) = 0$~~

$f(2) = 2$

$f(3) = 2$

$f(4) = 4$

$f(5) = 5$

$f(6) = 4$

$f(7) = 7$

$f(8) = 6$

$\frac{x}{y} < 1$

$x < y$

$\frac{AB}{CH} - ?$

$S_{\triangle ABD} = 15$

$OA = OC = 6$

$S_{OBD} = \frac{DH\cdot AB}{2} = 15$

$DH \cdot AB = 30$

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

~~$DH^2 + DC^2 = (\frac{1}{2}AB)^2$~~

~~$DH\cdot AB = 30$, $AB = \frac{30}{DH}$~~

~~$CD + DH = CH$~~

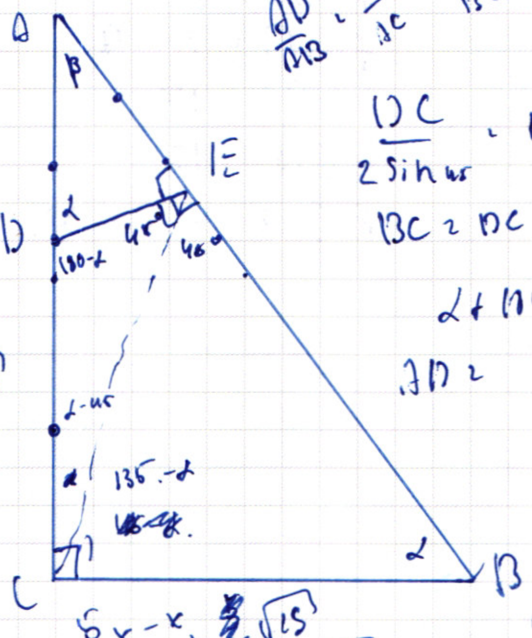
$\frac{DC}{2\sin 45} = R = \frac{BC}{2\sin 45}$

$BC = DC = \sqrt{25}$

$DH^2 + DC^2 = \frac{15^2}{DH^2}$

$DH^2 + (\frac{1}{2}AB)^2 = DC^2$

$\frac{DE\cdot AE}{2}$



$\alpha + 180 - \alpha + 45 = 180$

$\alpha + \beta = 90$

$+180 - \alpha + 45 = 180$

$\alpha - 45$

$AC = \frac{5}{2}\sqrt{25}$

$S_{AED} - ?$

$\frac{AD}{AC} = ?$

$AD = \frac{5}{2}x - x = \frac{3}{2}\sqrt{25}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{2} : \frac{5}{2} = \frac{3}{5}$

$BC = \sqrt{25}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

3.

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$ $\sqrt{x}=a$; $\sqrt{y}=b$ $a,b\geq 0.$

ОДЗ:
$xy\geq 0.$
1) $x\geq 0$ и $y\geq 0.$
2) $x<0$ и $y<0.$

$\begin{cases} b^2-2a^2=ab \\ 2b^2+a^4=9 \end{cases}$ $b^2-ab-2a^2=0.$

Уmn $=1$
НР $=-2.$

$(b-2a)(b+a)=0.$

1) $\begin{cases} b=2a. \\ 2b^2+a^4=9. \end{cases}$; $2(2a)^2+a^4=9.$

$4a^2+a^4=9.$

~~$a^4+4a^2=9$~~

$a^4+4a^2-9=0.$

2) $b=-a.$

$\sqrt{x}=-\sqrt{y}$

Это может быть при $x=y=0.$, тогда подставим в систему.

2 уравнение: $0+0=9.$

$a^2=t_1$; $t_1\geq 0$

переход к t: $t_1^2+4t-9=0.$ $36+16=52.$

$D=16+4\cdot 9=52.$

$t_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{52}}{2}=\frac{-4\pm 2\sqrt{13}}{2}=$

$=-2\pm\sqrt{13}$

$t_1=-2+\sqrt{13}$; 2 и $\sqrt{13}$

$t_2=-2-\sqrt{13}.$ 4 и 13

$\sqrt{13}>2.$

$t_2<0.$ $t_1\geq 0$

$a^2=-2+\sqrt{13}$

$a=\pm\sqrt{-2+\sqrt{13}}$

$b=\pm 2\sqrt{-2+\sqrt{13}}$

~~1 пара: (~~

$\sqrt{x}=\sqrt{-2+\sqrt{13}}$

$x=-2+\sqrt{13}$

$\sqrt{y}=2\sqrt{-2+\sqrt{13}}$

$y=4(-2+\sqrt{13})$

$y=-8+4\sqrt{13}$

1 пара: $(-2+\sqrt{13};\ -8+4\sqrt{13})$

7.

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=p.$, p - простые.

$3\leq x,y\leq 14$, $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$, при каких x и y.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\le 0$$

4 3 2 1

--- +-- ++- +++

0 1 3

Γ $|x|, |x-1|, |x-3|$.

1) $\frac{x^2-6x+9}{5x^2-15x}\le 0.$

$\frac{(x-3)^2}{5x(x-3)}\le 0.$

$5x(x-3)<0$

+ − + $x\in(0;3)$.

0 3

2) $\frac{x^2-\cancel{8}x+5}{3x^2-9x}\le 0$

$\frac{(x-3)^2}{3x(x-3)}\le 0.$

+ − +

0 3

3) $\frac{x^2+2x+1}{3x^2-9x}\le 0.$

$\frac{(x+1)^2}{3x(x-3)}\le 0$; $3x(x-3)<0$

0 3

ОДЗ:

$4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|\ne 0.$

~~$\Rightarrow$ = 144 − 16|x|·|x−3|~~

3 2 1

-- +- ++

0 3 x

раскрываем $|x|$ и $|x-3|$:

1) $4x^2-12x+x(x-3)\ne 0$

$5x^2-15x\ne 0$

$5x(x-3)\ne 0$

$x\ne 0$; $x\ne 3.$

2) $4x^2-12x+x(3-x)\ne 0$

$3x^2-9x\ne 0$

$3x(x-3)\ne 0.$

$x\ne 0$; $x\ne 3.$

3) $4x^2-12x-x(3-x)\ne 0$

$5x^2-15x\ne 0$

$5x(x-3)\ne 0.$

$x\ne 0$; $x\ne 3.$

$\boxed{x\ne 0;\ x\ne 3}$

3: $4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

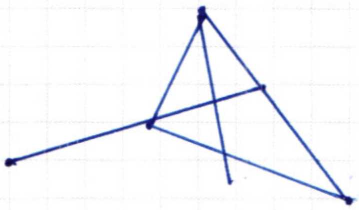
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

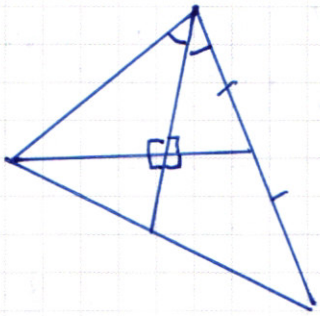
ШИФР

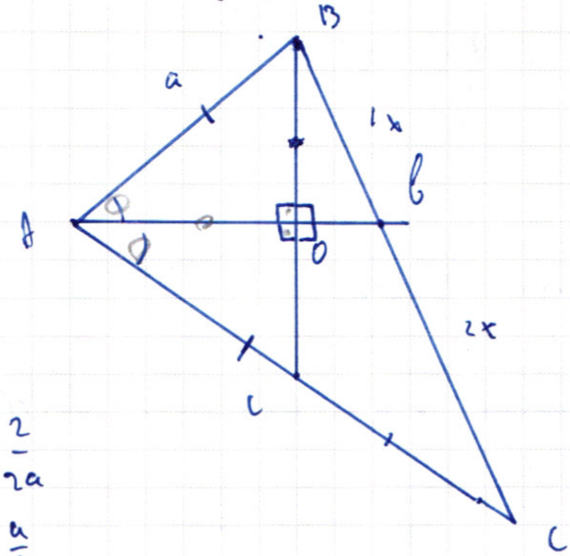
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2.







$a+b+c=300.$

$a, b, c \in \mathbb{Z}.$

$\Delta ABO = \Delta AOC$ по стороне и двум углам

$\frac{1}{a} = \frac{2}{2a}$

$\frac{1}{2} = \frac{a}{2a}.$

тогда

$a+2a+b=300$

$3a+b=300.$

$2a < a+b$

$a < b.$

$b < 3a$

51, 52, 53, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 70, 71, 72, 73, 74

$$\begin{cases} 3a+b=300. \\ a < b \\ b < 3a \\ a, b \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$a = \frac{300-b}{3} = 100 - \frac{b}{3}.$

b кратно 3.

~~1) a=1.~~

~~$b=300-3a.$~~

$b = 300-3a.$

$a < 300-3a$

$4a < 300$

$a < 75$

$300-3a < 3a$

$6a > 300$

$a > 50.$

$50 < a < 75$

(24).

$b > a$

$b > 100 - \frac{b}{3}$

$\frac{4}{3}b > 100$

$b > \frac{300}{4} > 75.$

$b < 3a$

$b < 300-b$

$b < \frac{300}{2} < 150.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

6. $\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6 \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0 \end{cases}$

$\sqrt{13} \approx 3{,}6.$

2) $x^2 - 2x - 3y + y^2 = 0$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 1{,}5 \cdot 2y + 2{,}25 = 3{,}25.$

$(x-1)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{13}{4}$. $r = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

$6 - 3x - 2y \geq 0.$

$y \geq \frac{3x-6}{2} \geq \frac{3}{2}x - 3.$

$y \geq 0$

$x \geq 0.$

1) I: $3x + 2y + 6 - 3x - 2y > 6$

$6 > 6.$

неверно, а значит x и y не могут вып. условие объед.

II: $3x + 2y - 6 + 3x + 2y > 6$

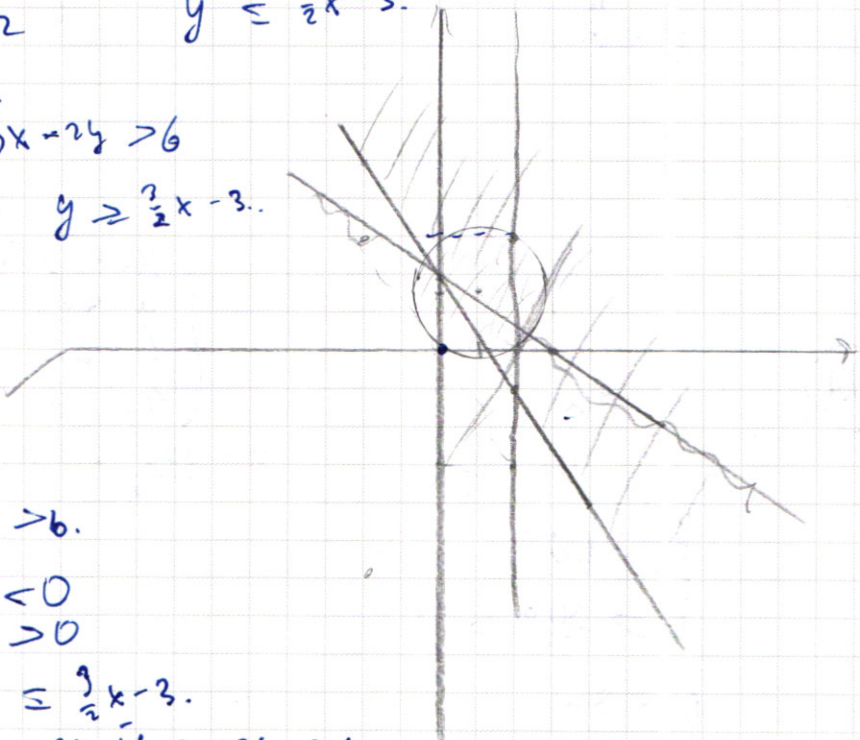
$6x + 4y > 12$ $\quad y \leq \frac{3}{2}x - 3.$

$y > -\frac{3}{2}x + 3.$

III: $-3x - 2y + 6 - 3x - 2y > 6$

$-6x - 4y > 0$ $\quad y \geq \frac{3}{2}x - 3.$

$y < -\frac{3}{2}x.$



$x > 0$

$y < 0$

$y \leq \frac{3}{2}x - 3.$

$3x - 2y - 6 + 3x + 2y > 6.$

$6x > 12$

$x > 2.$

$x < 0$

$y > 0$

$y \leq \frac{3}{2}x - 3.$

$-3x + 2y + 6 + 3x + 2y > 6.$

$4y > 12$

$y > 3.$

черновик ☑ чистовик ☐ (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)