МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство
$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

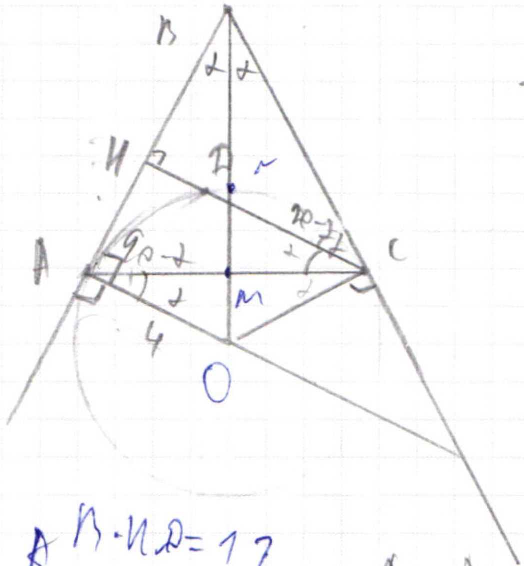
3. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе
$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.



$\frac{AB}{CH}$

$AB \cdot HD = 12$

$HD \cdot CH = 16$

$\frac{AB}{CH} = \frac{3}{4}$

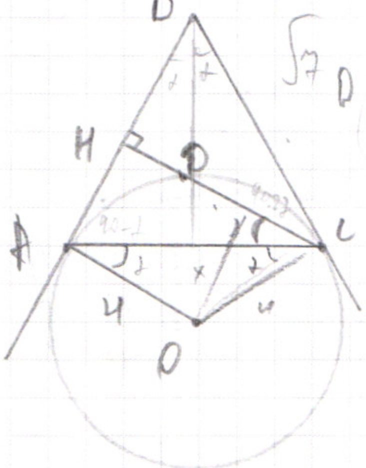
$\frac{AB}{AO} = \frac{AO}{}$

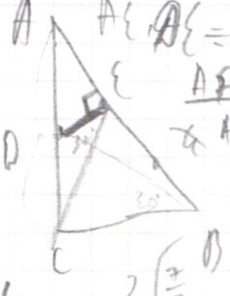
$\frac{BM}{AB} = \frac{AB}{BO}$

$BM \cdot BO = AB^2 = \frac{BM}{BO}$

$\cancel{AC} = BM$

$AB \cdot HD = 12$





$AE\{AE = ?$

$\frac{AB}{AC}$

$2\sqrt{\frac{7}{7}}$

$BM \cdot BO = BN(BO+4)$

$BM \cdot BO = BN \cdot BO + 4BN$

4

$BO-4$

2

$3,14 \times 2,5$

1570

$+628$

7,850

-4

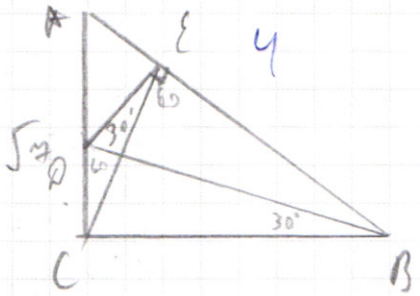
$AC = 2\sin\alpha \cdot AB$

$AH = 2\sin^2\alpha\, AB$

$7 + 4 \cdot \frac{7}{3}$

4,85

$\frac{28+49}{3} = \frac{77}{3} = \sqrt{16}$



$\frac{AH}{HC} = \frac{4}{AB}$

$\cancel{AB = \frac{4HC}{AH}}$

$HC \cdot 4 = AH \cdot AB$

$\frac{HC}{AB} = \frac{AH}{4}$

$\frac{HC}{AB} = \frac{\cancel{2\sqrt{3}HC}}{} \quad \frac{\sqrt{\frac{12HC}{AB}}}{4}$

$x = \frac{2\sqrt{3x}}{}$

$2x = \sqrt{3x}^2 \qquad 4x^2 = 3x$

$AH = 8 \cdot \sin\alpha\cos\alpha$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{AB}$

$AH^2 = HD \cdot HC$

$HD \cdot AB = 12$

$HD = \frac{12}{AB}$

$AH^2 = \frac{12HC}{AB}$

$AH = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{HC}}{\sqrt{AB}} \qquad \sqrt{\frac{12HC}{AB}}$

$4x^2 - 3x = 0$

$\cancel{x = 3 \pm \sqrt{9}}$

$4x = 3$

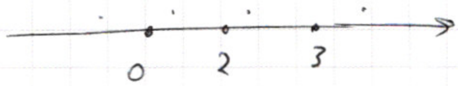
$x = \frac{3}{4}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$



$$\begin{cases} x-3\ge 0 \\ \dfrac{x^2-6x+10-2x+6}{2x^2-4x+x^2-2x}\le 0\end{cases}$$

$$\begin{cases} x\ge 3 \\ \dfrac{x^2-8x+16}{3x^2-6x}\le 0\end{cases}$$

$x\ge 3$

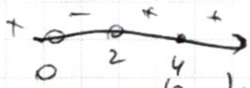
$$\frac{(x-4)^2}{x^2-2x}\le 0$$

$\cancel{2x(}$

$$\frac{(x-4)^2}{x(x-2)}\le 0$$

$x\ne 0$

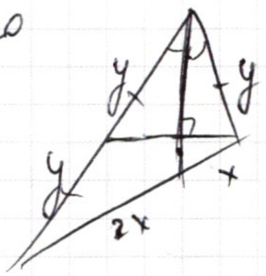
$x\ne 2$



$x\in(0;2)\cup\{4\}$

$\dfrac{AB}{CH}$ − ?

$P=600$



$3x>y$

$3x+y>2y$

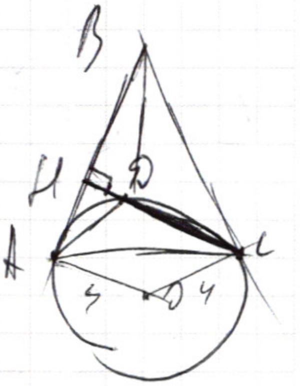
$2y+3x>y$

$3x$

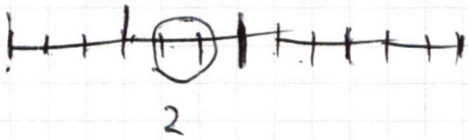
$3x+3y=600$

$$\begin{cases} x+y=200 \\ 3y>3x\end{cases}$$

$$\begin{cases} y>x \\ x+y=200 \\ 3x>y\end{cases}$$



200



$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5\end{cases}$$

$$\frac{AD\cdot AB}{}=6$$

$x^2-4xy+4y^2=xy^2$

$$\begin{cases} x^2-5xy+4y^2=0 \\ x+y^2=5\end{cases}$$

$x=5-y^2$

$\cancel{(5-y^2)}$

$$x=\frac{5y\pm\sqrt{25y^2-16y^2}}{2}=\frac{5y\pm|3y|}{2}$$

$x=4y$

$$x=\frac{5y\pm 3y}{2}$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4-2x-y| > 4 \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \le 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 \le 5$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 \le 5$$

$\cancel{y \geq 4-2x}$

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 4-2x-y \ge 0 \\ 2x + y + 4 - 2x - y > 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 4-2x \ge y \end{cases}$$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

Нули модулей: 0, 2, 3

Значит надо рассмотреть 4 случая

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3\ge 0\\ \dfrac{x^2-6x+10-2x+6}{2x^2-4x+x^2-2x}\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}2\le x<3\\ \dfrac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x^2-2x}\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}0\le x<2\\ \dfrac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+2x-x^2}\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ \dfrac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x^2-2x}\le 0\end{cases}\end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 3\\ \dfrac{x^2-8x+16}{3x^2-6x}\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}2\le x<3\\ \dfrac{x^2-4x+4}{3x^2-6x}\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}0\le x<2\\ \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-2x}\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ \dfrac{x^2-4x+4}{3x^2-6x}\le 0\end{cases}\end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 3\\ \dfrac{(x-4)^2}{x(x-2)}\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}2\le x<3\\ \dfrac{(x-2)^2}{x(x-2)}\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}0\le x<2\\ \dfrac{(x-2)^2}{x(x-2)}\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ \dfrac{(x-2)^2}{x(x-2)}\le 0\end{cases}\end{array}\right.$$

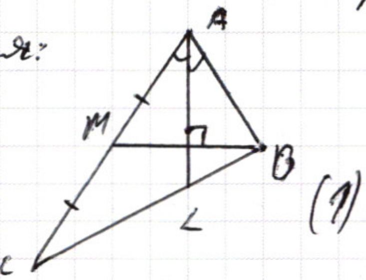
Совместим 3 последние случая: (квадрат числа всегда ≥ 0)

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 3\\ \dfrac{(x-4)^2}{x(x-2)}\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x<3\\ \dfrac{(x-2)^2}{x(x-2)}\le 0\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 3\\ \left[\begin{array}{l}x=4\\ \begin{cases}x\ne 2\\ x\ne 0\end{cases}\\ 0<x<2\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x<3\\ \cancel{x<2}\\ \left[\begin{array}{l}x\ne 2\\ x\ne 0\end{array}\right.\\ 0<x<2\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 3\\ x=4\end{cases}\\ \begin{cases}x<3\\ 0<x<2\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=4\\ 0<x<2\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(0;2)\cup\{4\}$

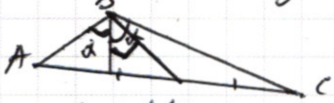
№2

Рассмотрим условие выполнения требования перпендикулярности из условия:



(1)

Биссектриса и медиана выпущенные из 1 вершины не могут ~~быть~~ быть перпендикулярны, иначе



$\alpha > 90°$, но ~~это~~ $\angle ABC = 2\alpha > 180°$!!!

Из рис (1)

т.к. $AL \perp MB$, то AL в $\triangle MAB$ высота и биссектриса, значит $\triangle MAB$ равнобедр. и $AM = AB$.

Из основного св-ва биссектрисы AL: $\frac{CL}{LB} = \frac{CA}{AB} = \frac{2}{1}$

Пусть $LB = x$. Тогда $CB = 3x$.

Пусть $AB = y$, Тогда $AC = 2y$

Т.к периметр треугольника $= 600$: $3x + 3y = 600 \rightarrow$

$\rightarrow x + y = 200$

Запишем 3 нер-ва треугольника через x и y:

$$\begin{cases} 2y + 3x > y \\ 3x + y > 2y \\ 3y > 3x \end{cases} \quad \begin{cases} y + 3x > 0 \\ 3x > y \\ y > x \end{cases} \quad \begin{cases} 3x > y \\ y > x \end{cases}$$

Значит: $\begin{cases} x + y = 200 \\ 3x > y \\ y > x \end{cases}$ Кол-во пар x и y легче всего найти геометрически. Разделим отрезок на 200 одинаковых, единичных отрезков. Тогда с одного конца отложим отрезок длиной y, а оставшаяся часть изначального это отрезок x. (пусть y справа) Т.к $y > x$, то раздел x и y лежит в левой половине изнач. отрезка. Но $3x > y$. Значит раздел x и y лежит не в левой четверти изнач. отрезка. Легко найти кол-во возможных положений раздела. Их 49. $\left(\frac{200}{4} - 1\right)$

Ответ: 49

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2 (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases} \to \begin{cases} (x-2y)^2=xy \\ x+y^2=5 \end{cases} \to \begin{cases} x^2-4xy+4y^2=xy \\ x+y^2=5 \end{cases} \to \begin{cases} x^2-5xy+4y^2=0 \ (1) \\ x+y^2=5 \ (2) \end{cases}$$

Из (1):

$$x=\frac{5y\pm\sqrt{25y^2-16y^2}}{2}$$

$$x=\frac{5y\pm|3y|}{2}$$

$$x=\frac{5y\pm3y}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} x=4y \\ x=y \end{array}\right.$$

Подставим $x=4y$ в (2):

$$y^2+4y=5$$

$$y^2+4y-5=0$$

$$y=\frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{-4\pm6}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-5 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1 \\ x=4 \end{cases} (1') \\ \begin{cases} y=-5 \\ x=-20 \end{cases} (2') \end{array}\right.$$

Подставим $x=y$ в (2):

$$y^2+y=5$$

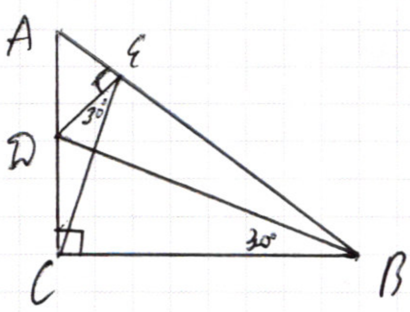
$$y^2+y-5=0$$

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{1+20}}{2} \to \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \\ x=-2+2\sqrt{21} \end{cases} (3') \\ \begin{cases} y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \\ x=-2-2\sqrt{21} \end{cases} (4') \end{array}\right.$$

Но (2') и (4') нех подходят (т.к мы возвели в квадрат корень, и отриц число. Нужно поставить условие $x-2y\geq0$. Ответ: $(4;1)$ и $(-2+2\sqrt{21}; \frac{-1+\sqrt{21}}{2})$

№5

Сделаем чертёж



Рассмотрим △ четыр $CDEB$.

$\angle DCB = \angle DEB = 90°$

Значит он вписан.

$\angle CED = \angle CBD = 30°$

$CD = CB \cdot tg\,30°$

$CD = \cancel{CB}\ \dfrac{2\sqrt{\frac{7}{3}}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{7}}{3}$

$AD = AC - CD = \sqrt{7} - \dfrac{2}{3}\sqrt{7} = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$

Тогда $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{\frac{\sqrt{7}}{3}}{\sqrt{7}} = \dfrac{1}{3}$

По теореме Пифагора $AC^2 + CB^2 = AB^2$

$AB = \sqrt{\dfrac{4\cdot 7}{3} + 7} = \sqrt{\dfrac{28+21}{3}} = \dfrac{7}{\sqrt{3}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

Р-м △DAE и △BAC

$\angle A$ — общий
$\angle AED = \angle ACB = 90°$ $\Rightarrow$ △$DAE \sim$ △BAC

$\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$

$AE = \dfrac{AD \cdot AC}{AB} = \dfrac{\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\sqrt{7}}{\frac{7\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{\frac{7}{3}}{\frac{7\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Из Теоремы Пифагора для △AED:

$DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{\dfrac{7}{9} - \dfrac{3}{9}} = \pm\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}$ (т.к $DE > 0$)

Тогда $S_{\triangle ADE} = \dfrac{DE \cdot AE}{2} = \dfrac{\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$

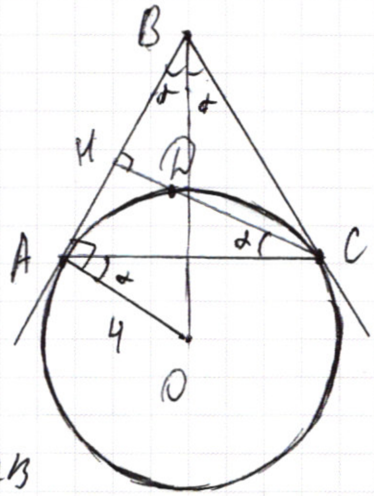
Ответ: $\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Сделаем чертёж:



* $CH \perp AB$ и $OA \perp AB$

Значит $AO \parallel HC$

$\angle OAC = \angle HCA$ (как накрест лежащие)

$AB = BC$ (как касат к 1 окр. из 1 точки)

$\angle BAC = \angle BCA = 90° - \alpha$.

Значит $\angle HCB = 90° - 2\alpha$

$\angle HBC = 180° - \angle BHC - \angle BCH = 180° - 90° - 90° + 2\alpha =$
$= 2\alpha$.

BO - биссектриса $\angle ABC$ (из симметрии)

Значит $tg\,\alpha = \frac{AO}{AB}$ (Из $\triangle ABO$)

Из $\triangle AHC$ $tg\,\alpha = \frac{AH}{HC}$

Приравняем $tg\,\alpha$:

$\frac{AO}{AB} = \frac{AH}{HC}$ ⇒

$\frac{AB}{CH} = \frac{AO}{AH}$ (*)

Степень т. H отн. окр с центром в т O и радиусом $AO=4$.

равна $AH^2 = HD \cdot HC$ (1)

Но из $\triangle ABD$:

$$\frac{HD \cdot AB}{2} = 6 \text{ (по условию)}$$

$$HD \cdot AB = 12$$

$$HD = \frac{12}{AB}$$

Подставим HD в (1):

$$AH^2 = 12\frac{HC}{AB}$$

$$AH = \sqrt{12\frac{HC}{AB}} \text{ (все величины положительные)}$$

Подставим AH в (*)

$$\frac{AB}{CH} = \frac{AO}{\sqrt{\frac{12HC}{AB}}}$$

Пусть $\frac{AB}{CH} = x$, $AO = 4$, тогда:

$$x = \frac{4}{\sqrt{\frac{12}{x}}}$$

$$x = \frac{4\sqrt{x}}{2\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{2\sqrt{3x}}{3}$$

$$3x = 2\sqrt{3x}$$

$$9x^2 = 4 \cdot 3x$$

$$3x = 4$$

$$x = \frac{4}{3}$$

Ответ: $\frac{4}{3}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

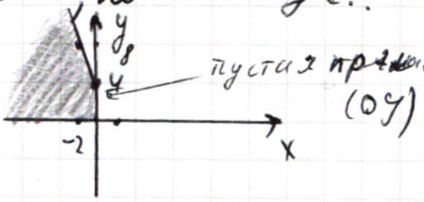
$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4 \quad (1) \\ x^2-2x-4y+y^2\le 0 \quad (2) \end{cases}$$

Решим (1): (системы в совокупности)

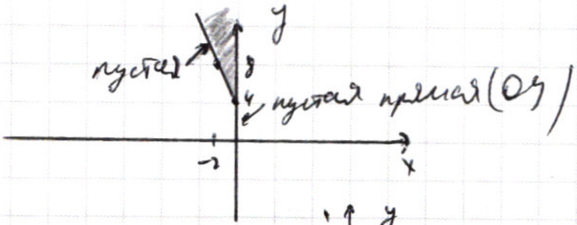
1) $\begin{cases} 2x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ 4-2x-y\ge 0 \\ 2x+y+4-2x-y>4 \to 4>4 \end{cases}$ Решений нет

2) $\begin{cases} 2x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ 4-2x-y<0 \\ 2x+y+y+2x-4>4 \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ 4-2x<y \\ 4x+2y>8 \end{cases} \to 2x+y>4 \to y>4-2x$ но $4-2x<y$!!!

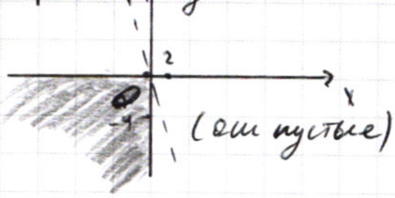
3) $\begin{cases} 2x\le 0 \\ y\ge 0 \\ 4-2x-y\ge 0 \to 4-2x\ge y \\ -2x+y+4-2x-y>4 \to -4x>0 \to x<0 \end{cases}$



4) $\begin{cases} 2x<0 \to x<0 \\ y\ge 0 \\ 4-2x-y<0 \to 4-2x<y \\ -2x+y+y+2x-4>4 \to 2y>8 \to y>4 \end{cases}$

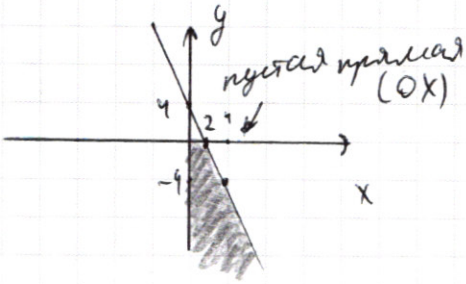


5) $\begin{cases} 2x<0 \to x<0 \\ y<0 \\ 4-2x-y\ge 0 \to 4-2x\ge y \\ -2x-y+4-2x-y>4 \to -4x-2y>0 \to -2x>y \end{cases}$

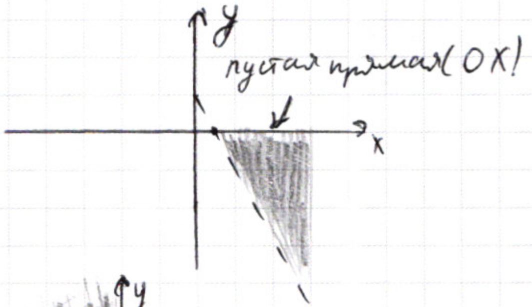


6) $\begin{cases} 2x<0 \\ y<0 \\ 4-2x-y<0 \\ -2x-y-4+2x+y>4 \to -4>4 \end{cases}$!!! Решений нет

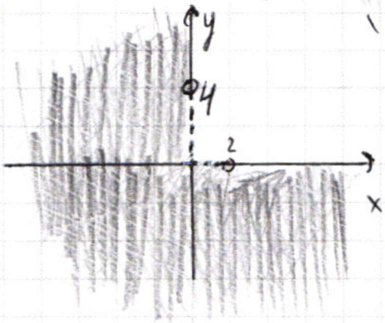
7) $\begin{cases} 2x\ge 0 \to x\ge 0 \\ y<0 \\ 4-2x-y\ge 0 \to 4-2x\ge y \\ 2x-y+4-2x-y>4 \to -2y>0 \to y<0 \end{cases}$



8) $\begin{cases} 2x \geq 0 \\ y < 0 \\ 4-2x-y<0 \rightarrow 4-2x \leq y \\ 2x-y+y+2x-4>4 \rightarrow 4x>8 \rightarrow x>2 \end{cases}$



Итого решения 1 уравнения:



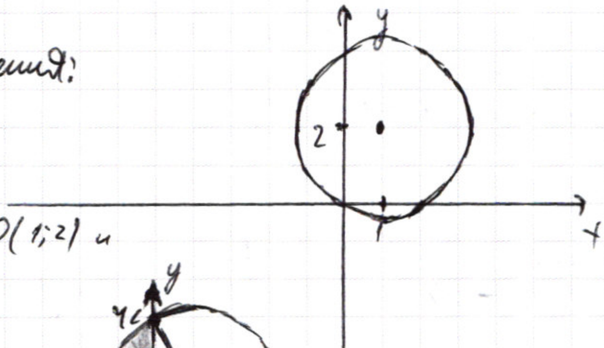
Решим (2) уравнение:

$x^2-2x-4y+y^2 \leq 0$

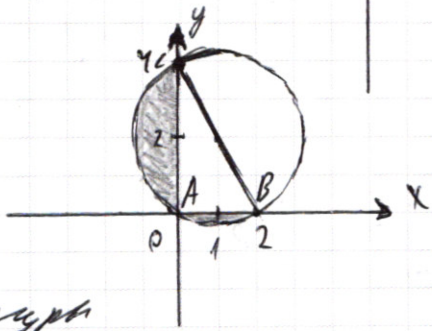
$x^2-2x+1+y^2-4y+4 \leq 5$ Решения:

$(x-1)^2+(y-2)^2 \leq 5$

(окружность с центром в т $O(1;2)$ и радиусом $\sqrt{5}$)



Тогда площадь фигуры:



Площадь закрашенной фигуры можно найти как разность площади всего попалам круга минус S_{ABC}. (т.к. окружн. пересекла Оси в т $C(0;4)$ и в т. $B(2;0)$ и CB - её диаметр)

$S_{окруж} = \pi R^2 = \pi \cdot 5$

$S_{ABC} = \frac{AC \cdot AB}{2} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$

$S = \frac{S_{окр}}{2} - S_{ABC} = \frac{\pi \cdot 5}{2} - 4 = 2,5\pi - 4 \approx 4,85$

Ответ: $2,5\pi - 4 \approx 4,85$.