МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство
$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе
$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 ООУ: $xy \geq 0$

$(1)\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}(2)$

Заметим, что при $y=0$ — нет реш. т.к $\begin{cases} x=0 \\ x=5 \end{cases}$

Значит мы можем смело делить на y

(1): $x-\sqrt{xy}-2y=0 \quad |:y\neq 0$

$\frac{x}{y}-\sqrt{\frac{x}{y}}-2=0$, т.к $xy\geq 0 \Rightarrow sgn(x)=sgn(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x}{y}\geq 0$ (т.к $y\neq 0$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\right)^2-\sqrt{\frac{x}{y}}-2=0$

Пусть $t=\sqrt{\frac{x}{y}}\geq 0$, тогда: $t^2-t-2=0$

$(t-2)(t+1)=0$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-1 \end{array}\right. \\ t\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{y}}=2 \Rightarrow \sqrt{x}=2\sqrt{y} \Rightarrow x=4y \quad (3)$

(3)→(2): $4y+y^2=5$

$y^2-y+5y-5=0$

$(y-1)(y+5)=0$

$\left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-5 \end{array}\right.$

тогда $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1 \\ x=4 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-5 \\ x=-20 \end{cases} \end{array}\right.$

Проверка 1) $xy=4\geq 0$ — верно

2) $xy=100\geq 0$ — верно

Ответ: $(4;1)$ $(-20;-5)$

№5

Дано:

$DE \perp AB$

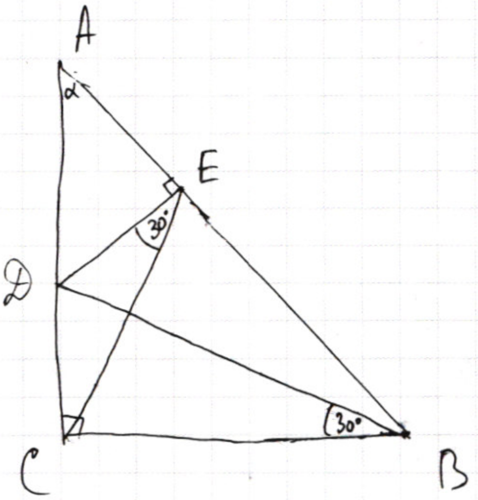
$AC = \sqrt{7}$

$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\angle CED = 30°$

$\frac{AD}{AC}$ – ?

S_{AED} – ?



т.к AC – катет; AB – гип $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ACB = 90°$

~~В△~~ Пусть $\angle CAB = \alpha$

в $\triangle ABC$: $tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

в $\square CDEB$: $\angle C + \angle E = 90° + 90° = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow \square CDEB$ – впис. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CBD = \angle CED = 30°$ – как впис и опир на 1 хорду

в $\triangle CBD$: $DC = BC \cdot tg\angle CBD = 2\sqrt{\frac{7}{3}} \cdot tg30° = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

$AD = AC - DC = \sqrt{7} - \frac{2}{3}\sqrt{7} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{3}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{3}$

~~$tg\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$~~ Заметим, что $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ – т.к острый угол в пр. $\triangle$ $\Rightarrow$ $tg\alpha, \sin\alpha; \cos\alpha > 0$

$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{tg^2\alpha + 1}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{4}{3}+1}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{3}{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$

$S_{AED} = AD \cdot AE \cdot \frac{\sin\alpha}{2} = AD^2 \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2} = \frac{\cancel{7}}{9} \cdot \frac{\cancel{2}\cdot\sqrt{3}}{\cancel{2\sqrt{7}}\cdot\cancel{\sqrt{7}}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$

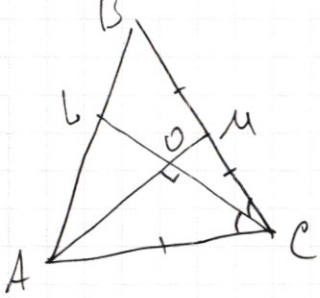
$S_{AED} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $P=600$ - по усл

Рассмотрим ситуацию $\perp$ медианы и высоты

~~1) остроугольный △~~ Рассуждаем для всех △, т.к нигде не пользуемся свойствами того или иного △ (т.е бисс и мед всегда ∩ внутри что)



△ABC; AM - мед; CL - бисс; $AM \perp CL$

$AM \cap CL = O$

в △ACM: CO - бисс и высота =>

=> △ACM - р/б : AC = CM

Пусть CA = a => CM = MB = CA = a;

Пусть AB = 3x

По теореме о бисс: $\frac{BL}{LA} = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{1} \Rightarrow BL = 2x$, $AL = x$

т.е. $P = 3(a+x) = 600$

$a+x=200$

По неравенству △:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+a>2a \\ 3x+2a>a \\ 2a+a>3x \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} 3x>a \\ a>x \end{array}$$ и ещё $a+x=200$

$200 = a+x < 4x \Rightarrow x>50$

$200 = a+x > 2x \Rightarrow x<100$

для всех $a = 200-x$ и будут выполняться и △ будут различные => всего вариантов △ = кол-во в-в.(x) = 99-51+1=49

Ответ: 49

№1

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \le 0$$

ОДЗ: $2x^2-4x+|x|\cdot|x-2| \neq 0$

Пусть $f(x)$ – числ, $g(x)$ – знам., тогда экв: $\frac{f(x)}{g(x)} \le 0 \Leftrightarrow$ при $g(x)\neq 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \quad (1) \\ f(x)\,g(x)<0 \quad (2) \end{array}\right.$

$^{2)}\; f(x)\neq 0$

$f(x)=(x-3)^2-2|x-3|+1=(|x-3|-1)^2 \geq 0$

(1) $f(x)=0 \Leftrightarrow |x-3|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=2 \end{array}\right.$

Проверка:

$g(4)=\underbrace{2\cdot 4^2}_{32}-\underbrace{4\cdot 4}_{16}+\underbrace{|4|\cdot|4-2|}_{8}=16+8\neq 0 \Rightarrow$ подх

$g(2)=\underbrace{2\cdot 2^2-4\cdot 2}_{0}+\underbrace{|2|\cdot|2-2|}_{0}=0 \Rightarrow$ неподх

2) $f(x)\,g(x)<0 \quad |:f(x)>0 \quad \left(\text{т.е} \begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq 4 \end{cases}\right)$

$g(x)<0$

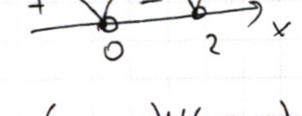
$2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|<0$

а: $-\;-$ (до 0); б: $+\;-$ (от 0 до 2); в: $+\;+$ (после 2)

а) $2x(x-2)+x(x-2)<0$

$3x(x-2)<0 \;|:3$

$x(x-2)<0$



б) $2x(x-2)-x(x-2)<0$

$x(x-2)<0$

Аналогично (а)

в) $2x(x-2)+x(x-2)<0$

$3x(x-2)<0$

$x(x-2)<0$

Аналогично (а)

$x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

Проверка для (2) $x\neq 4 \Rightarrow x\in(-\infty;0)\cup(2;4)\cup(4;+\infty)$

и $g(x)\neq 0$ т.к $g(x)<0$

Объединив ① и ② получаем

Ответ: $x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

По усл. $f(ab) = f(a) + f(b)$

p-прост => $f(p) = p$

$1 \le x \le 18$; $1 \le y \le 18$; $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ $x, y \in \mathbb{N}$

Найти: A - ? A - кол-во пар $(x; y)$ удовл усл

Заметим, что $f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(1) = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$, тогда:

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$

$f(x) < f(y) \Rightarrow A$ экв кол-ву способов выбрать $f(x) < f(y)$

~~Напишем~~ Найдем все возможные $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$; $n \in [1; 18]$

$f(1) = 0$ $f(2) = 2$ $f(3) = 3$ $f(4) = f(2) + f(2) = 4$

$f(5) = 5$ $f(6) = f(2) + f(3) = 5$ $f(7) = 7$ $f(8) = f(2) + f(4) = 6$

$f(9) = 2f(3) = 6$ $f(10) = f(2) + f(5) = 7$ $f(11) = 11$ $f(12) = 7$

$f(13) = 13$ $f(14) = 9$ $f(15) = 8$ $f(16) = f(2) + f(8) = 8$

$f(17) = 17$ $f(18) = f(2) + f(9) = 2 + 6 = 8$

т.е набор $f(n)$ выглядит так

$$d = \{0; 2; 3; 4; 5; 5; 6; 6; 7; 7; 7; 8; 8; 8; 9; 11; 13; 17\}$$

Осталось найти кол-во способов таких, что $d_i < d_j$ (кол-во $(i; j)$)

посчитаем для каждого d_i — d_j руками

$0 \to 17$ $7 \to 7$

$2 \to 16$ $8 \to 4$

$3 \to 15$ $11 \to 2$

$4 \to 14$ $13 \to 1$

$5 \to 12$ $17 \to 0$

$6 \to 10$

в сумме $A = \underbrace{0 + \overbrace{1 + 2}^{3} + \overbrace{4 + 7 + \overbrace{10 + \overbrace{12 + 14}^{26}}^{}}^{}}_{24} + \underbrace{15 + 16 + 17}_{48}$ (промежуточные: 10, 20, 50, 98)

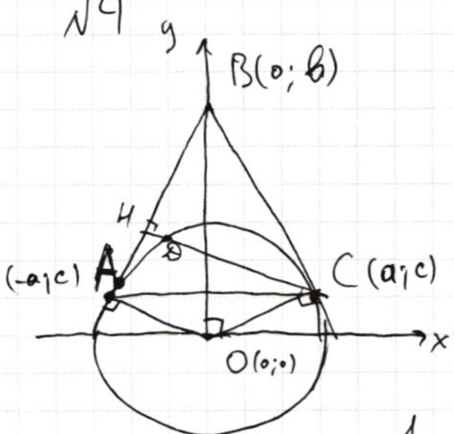
$A = 98$

Ответ: ~~...~~ 98

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№4



Дано: $\omega(O;R)$; BA, BC — кас из B

CH — высота в $\triangle ABC$ $\quad CH \cap \omega = D$

$S = S_{ABD} = 6 \quad R = 4$

$\frac{AB}{CH}$ — ?

Заметим, что A симм C отн BO, т.к AB и BC — кас

Построим тогда такие коорд оси xOy, что $O(0;0)$ $B(0;b)$ $Ox \perp Oy$

тогда пусть $C(a;c)$; $A(-a;c)$ из-за симм. отн Oy

$D(d_1;d_2)$

$H(h_1;h_2)$

Великое знание: $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2 = -1$

$\omega(O;R)$: $x^2+y^2=R^2$

$A, C \in \omega$: $a^2+c^2=R^2$

OC: $y = \frac{c}{a}x$

OA: $y = -\frac{c}{a}x$

BC: $y = k_1x+b$; $BC \perp OC \Rightarrow k_1 = -\frac{a}{c} \Rightarrow BC$: $y = b - \frac{a}{c}x$

AB: $y = k_2 + b$; $AB \perp OA \Rightarrow k_2 = \frac{a}{c} \Rightarrow AB$: $y = b + \frac{a}{c}x$

$C \in BC$: $c = b - \frac{a^2}{c} \Rightarrow b = \frac{a^2+c^2}{c} = \frac{R^2}{c} \Rightarrow bc = R^2$

$\cancel{CH \perp AB}$ CH: $y = k_3x + n$

$CH \perp AB \Rightarrow k_3 = -\frac{c}{a}$; $C \in CH$: $c = -\frac{c}{a}\cdot a + n \Rightarrow n = 2c$

CH: $y = -\frac{c}{a}x + 2c$

$\cancel{D \in \omega: d_1^2+d_2^2=R^2}$ $\quad H = AB \cap CH \Rightarrow \begin{cases} h_2 = b + \frac{a}{c}h_1 \\ h_2 = -\frac{c}{a}h_1 + 2c \end{cases}$

$\cancel{D \in CH: A_2}$ $\quad b + \frac{a}{c}h_1 = -\frac{c}{a}h_1 + 2c \quad | \cdot ac$

$aR^2 + a^2h_1 + c^2h_1 = 2ac^2$

$R^2(a+h_1) = 2ac^2 \Rightarrow h_1 = \frac{2ac^2}{R^2} - a = \frac{2ac}{b} - a = \frac{2ac^2}{R^2} - a$

$\cancel{h_2 = 2c - \frac{2c^2}{b} + c = 3c}$ $\quad h_2 = -\frac{c}{a}\left(\frac{2ac^2}{R^2} - a\right) + 2c = -\frac{2c^2}{b} + 3c = \frac{-2c^3}{R^2} + 3c$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$D \in \omega: \begin{cases} d_1^2 + d_2^2 = R^2 \\ d_2 = -\frac{cd_1}{a} + 2c \end{cases}$

$D \in \xi CH:$

$d_1^2 + \frac{c^2}{a^2}d_1^2 + 4c^2 - \frac{4c^2}{a}d_1 = R^2$

$\frac{R^2}{a^2}d_1^2 - \frac{4c^2}{a}d_1 + 4c^2 - R^2 = 0$

$R^2d_1^2 - 4c^2ad_1 + 4c^2a^2 - R^2a^2 = 0$

$(d_1-a)(R^2d_1 + R^2a) - 4c^2a(d_1-a) = 0 \quad | : (d_1-a) \neq 0$, т.к если $d_1 = a$, то т. D = т. C что неверно

$R^2d_1 + R^2a - 4c^2a = 0$

$d_1 = \frac{4c^2a}{R^2} - a$

$d_2 = -\frac{c}{a}\left(a\left(\frac{4c^2}{R^2} - 1\right)\right) + 2c = -\frac{4c^3}{R^2} + 3c$

$S^2 = \frac{DH^2 \cdot AB^2}{4} \Rightarrow DH^2 \cdot AB^2 = 4S^2 = ((d_2-h_2)^2 + (d_1-h_1)^2)(a^2 + (b-c)^2)$

$DH^2 = \left(-\frac{4c^3}{R^2} + 3c + \frac{2c^3}{R^2} - 3c\right)^2 + \left(\frac{4c^2a}{R^2} - a - \frac{2ac^2}{R^2} + a\right)^2$

$DH^2 = \left(\frac{2c^3}{R^2}\right)^2 + \left(\frac{2ac^2}{R^2}\right)^2 = \frac{4c^4}{R^4}(c^2 + a^2) = \frac{4c^4}{R^2}$

$DH = \frac{2c^2}{R}$

$AB^2 = a^2 + (b-c)^2 = a^2 + \left(\frac{R^2}{c} - c\right)^2 = a^2 + \frac{R^4}{c^2} - 2R^2 + c^2$

$AB^2 = \frac{R^4}{c^2} - R^2 = \frac{R^2}{c^2}(R^2 - c^2) = \frac{R^2a^2}{c^2} \Rightarrow AB = \frac{Ra}{c}$

$2S = DH \cdot AB = \frac{2c^2}{R} \cdot \frac{Ra}{c} = 2ac \Rightarrow ac = S$

~~т.е.~~ $\cancel{\begin{cases} ac = 16 \\ a^2 + c^2 = 16 \end{cases}}$

□ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

т.е $\begin{cases} ac = S \\ a^2 + c^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{S}{a} \\ a^2 + \frac{S^2}{a^2} = R^2 \quad (2) \mid \cdot a^2 \end{cases}$

(2)': $a^4 - a^2R^2 + S^2 = 0$

$a^2 = \frac{R^2 \pm \sqrt{R^4 - 4S^2}}{2} = \frac{4^2 \pm \sqrt{4^4 - 4\cdot 6}}{2} = 8 \pm \sqrt{64-6} = 8 \pm \sqrt{48} = 4(2 \pm \sqrt{3})$

$a = 2\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$

$c = \frac{3}{\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}\,(2 \mp \sqrt{3})}{(2 \pm \sqrt{3})(2 \mp \sqrt{3})} = 3\sqrt{2 \mp \sqrt{3}}$

$CH^2 = (a - h_1)^2 + (c - h_2)^2 = \left(a - \frac{2ac^2}{R^2} + a\right)^2 + \left(c + \frac{+2c^3}{R^2} - 3c\right)^2$

$CH^2 = \frac{4a^2c^4}{R^4} + 4c^2\left(\frac{c^2 - R^2}{R^2}\right)^2 = \frac{4a^2c^4}{R^4} + \frac{4c^2a^4}{R^4} = \frac{4c^2a^2}{R^4}(a^2 + c^2) = \frac{4c^2a^2}{R^2}$

$CH = \frac{2ac}{R} = \frac{2S}{R}$

$\frac{AB}{CH} = \frac{Ra}{c} \cdot \frac{R}{2ac} = \frac{R^2}{2c^2} = \frac{\cancel{16}^{8}}{\cancel{2}\cdot 9(2 \mp \sqrt{3})} = \frac{8}{9}(2 \pm \sqrt{3})$

Ответ: $\frac{AB}{CH} = \frac{8}{9}(2 \pm \sqrt{3})$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$S - ?$

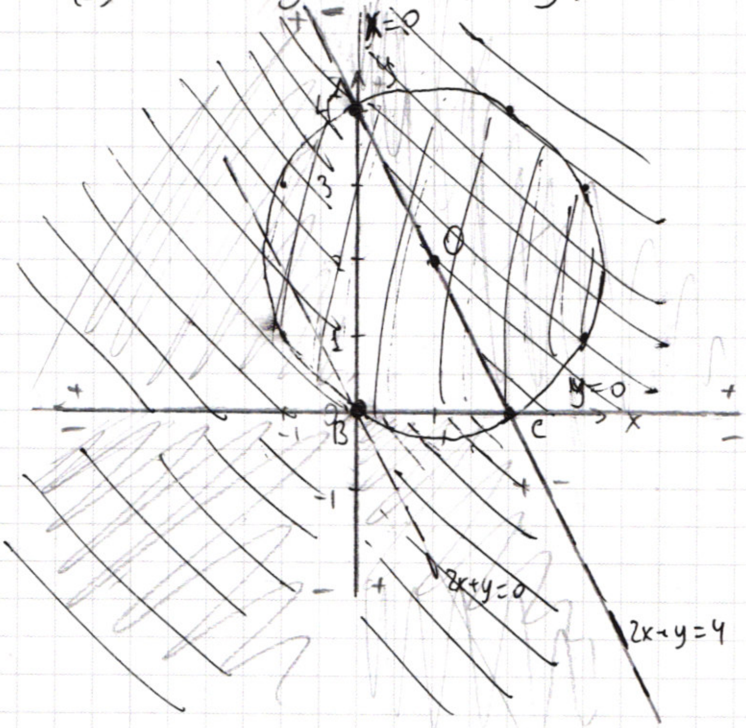
$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4-2x-y| > 4 \quad (1) \leftarrow \text{штриховка } \backslash\backslash\backslash \\ x^2 - 2x + y^2 - 4y \le 0 \quad (2) \end{cases}$$

(2): $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 \le 5$ ← штриховка ///

$(x-1)^2 + (y-2)^2 \le 5 \Rightarrow x, y \in$ кругу с $R = \sqrt{5}$ и $O(1;2)$

$\omega(O;R)$

(1) $2|x| + |y| + |4-2x-y| > 4$



$+++$: $2x+y+4-2x-y = 4 > 4$ нев

$++-$: $2x+y+2x+y-4 = 4x+2y-4$

$4x+2y-4 > 4$

$2x+y > 4$

$+-+$: $2x-y+4-2x-y = 4-2y > 4$

$y < 0$

$-++$: $-2x+y+4-2x-y = 4-4x > 4$

$x < 0$

$+--$: $2x-y+y+2x-4 > 4$

$x > 2$

$-+-$: $-2x+y+y+2x-4 > 4$

$y > 4$

$--+$: $-2x-y+4-2x-y > 4$

$2x+y < 0$

$---$: $-4 > 4$ — неверно

Общим для 2х графиков явл ω, за исключением $\triangle ABC \Rightarrow$

$S = S_{\omega} - S_{ABC} = \pi R^2 - AB \cdot BC \cdot \frac{1}{2} = 5\pi - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 5\pi - 4$

Ответ: $S = 5\pi - 4$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$ $a>x$

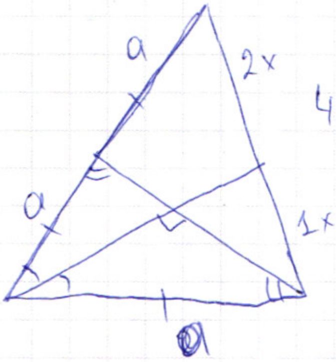
При $y=0$ - нет реш.

$99-51+1=49$

$\frac{x}{y}-\sqrt{\frac{x}{y}}-2=0 \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot 2}}{2}=\frac{1+3}{2}=2$

$P=3a+3x=3(a+x) \Rightarrow$
$\Rightarrow a+x=200$

$x=4y$



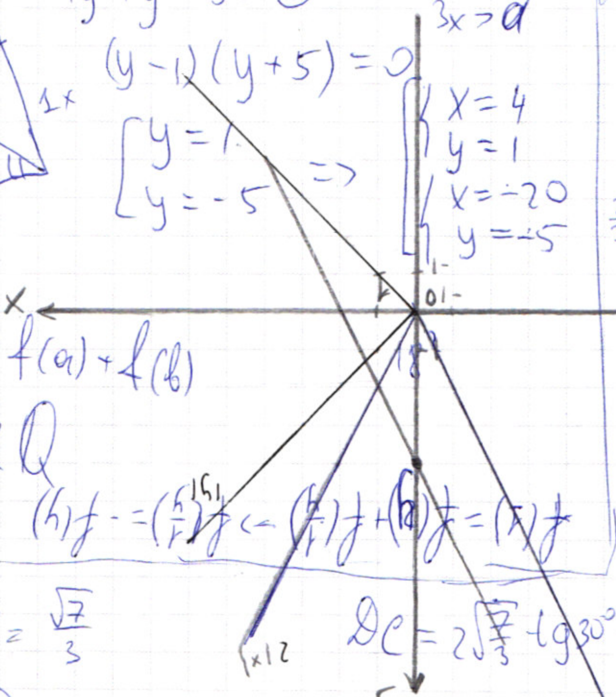
$4y+y^2-5=0$

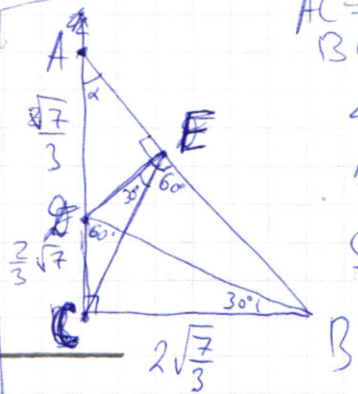
$3x+a>2a$

$3x>a$

$(y-1)(y+5)=0$

$\left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-20 \\ y=-5 \end{cases} \end{array}\right.$





$AC=\sqrt{7}$
$BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$
$\angle CED=30°$
$\frac{AD}{AC}-?$
$S_{\triangle AED}-?$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$D(f): Q$

$f(p)=p$

$tg\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$AB^2=\frac{21}{3}+\frac{28}{3}=\frac{49}{3} \Rightarrow AB=\frac{7}{\sqrt{3}}$

$AD=AC-DC=\frac{\sqrt{7}}{3}$

$DC=2\sqrt{\frac{7}{3}}\,tg30°=\frac{2}{3}\sqrt{7}$

$\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}$

$tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{tg^2\alpha+1}}=\sqrt{\frac{1}{\frac{4}{3}+1}}=\sqrt{\frac{3}{7}}$

$S=\frac{1}{2}a^2\cos\alpha\sin\alpha$

$\sin\alpha=tg\alpha\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{2}{\sqrt{7}}$

$AE=AD\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\sqrt{\frac{3}{7}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$S_{\triangle AED}=AD\cdot AE\frac{\sin\alpha}{2}=\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}$

$f(x+y) \ldots$

$x-2=y$

$2=x$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№1 $\frac{(x-3)^2-2|x-3|+1}{f(x)} \le 0$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} |x-3|-1=0 \\ f(x)\ne 0 \\ f(x)\left(|x-3|-1\right)^2<0 \iff f(x)<0 \end{cases}$$

$- -$ 0 $+ -$ 2 $+ +$ x

$3x(x-2)<0$ $x(x-2)<0$ $3x(x-2)<0$

$\frac{3}{4}$ $\bigcirc$ $\frac{1}{2}$

$2x^2-4x+|x|\cdot|x-2| =$ $\frac{5}{8}$

$f(x)=2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|$

$\frac{1}{tg^2\alpha}+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$

$\sin^2\alpha=\frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$ $\sin 2\alpha=\frac{tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|<0$

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$

~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ 6 ~~7~~

$16\frac{tg^2\alpha}{(1+tg^2\alpha)^2}=\frac{3tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$\frac{4\cdot 27}{4\cdot 4}=3+\frac{3\cdot 3^2}{16}$

$16tg^3\alpha=3+3tg^2\alpha$

$R^2(d-a)(d+a)$
$-4c^2a(d-a)$
$(d-a)(R^2d$

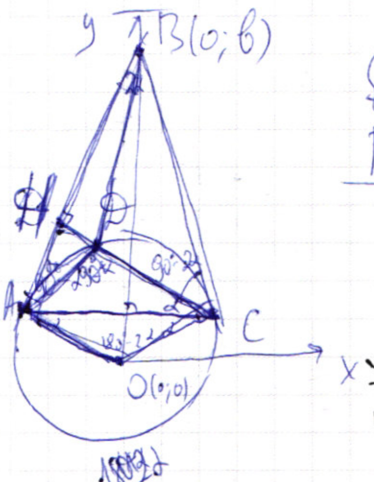
№4

$HA^2=HD\cdot HC$

$HA^2=\frac{12HC}{DB}$

$AC^2\sin^2\alpha=12\sin 2\alpha$

$4R^2\sin^4\alpha=12\sin 2\alpha$



$S_{ABD}=6$

$R=4$

$AB:CH-?$

$DH\cdot AB=12$

$\omega(0;R): x^2+y^2=R^2$

$B(0;b)$ $A(-a;c)$ $C(a;c)$

$48=6\cdot 8=3\cdot 16$

$\frac{AB}{CH}=\frac{BC}{CH}=\frac{1}{\cos(90°-2\alpha)}=\frac{1}{\sin 2\alpha}$

$\sin\alpha=\frac{R}{BO}=\frac{AC}{2AB}$

$AC=2R\sin 2\alpha$

$BC^2=R^2(\frac{1}{\sin\alpha}-1)=R^2ctg\alpha$

$D(d_1;d_2)$ $H(h_1;h_2)$

$AB: \frac{x-0}{-a-0}=\frac{y-b}{c-b} \Rightarrow y=b+\frac{b-c}{a}x$

$CH\perp AB \Rightarrow CH: y=kx+n;\ k=\frac{a}{c-b};\ C\in CH: c=\frac{a^2}{c-b}+n$

$n=\frac{c^2-cb-a^2}{c-b}$

$(a^2+c^2=R^2)$

$D: CH\cap\omega: \begin{cases} d_1^2+d_2^2=R^2 \\ d_2=\frac{a}{c-b}d_1+\frac{c^2-cb-a^2}{c-b} \end{cases}$

$d_1^2+\left(\frac{a}{c-b}\right)^2d_1^2+d_1\frac{2a(c^2-cb-a^2)}{(c-b)^2}+\left(\frac{c^2-cb-a^2}{c-b}\right)^2=R^2$

Подойдёт: $d_1=a$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}\cos\angle$

$BO=R\sin\alpha+BC\cos\alpha$

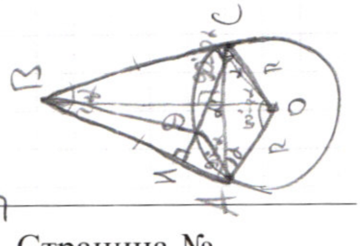
$BO=\frac{R}{\sin\alpha}$

$\frac{R}{\sin\alpha}=R\sin\alpha+\frac{R\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$

$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$

$(x-1)^2+(y-2)^2\le 5$

и нарисуй.



$4x^2+4y^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)