



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x - 3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x - 2|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy}, \\ x + y^2 = 5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром  $O$  касается прямых  $AB$  и  $BC$  в точках  $A$  и  $C$  соответственно. Высота  $CH$  треугольника  $ABC$  пересекает эту окружность в точках  $C$  и  $D$ . Найдите отношение  $AB : CH$ , если площадь треугольника  $ABD$  равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на катете  $AC$  и гипотенузе  $AB$  отмечены точки  $D$  и  $E$  соответственно, такие что  $DE \perp AB$ . Найдите отношение  $AD : AC$  и площадь треугольника  $AED$ , если известно, что  $AC = \sqrt{7}$ ,  $BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$ , а  $\angle CED = 30^\circ$ .

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами  $(x; y)$ , удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4, \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = p$  для любого простого числа  $p$ . Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $1 \leq x \leq 18$ ,  $1 \leq y \leq 18$  и  $f(x/y) < 0$ .



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1. \frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x-2|} \leq 0$$

Рассмотрим числитель. При  $x \geq 3$ :

$$x^2 - 6x + 10 - 2x + 6 = x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2 \geq 0 \text{ всегда}$$

При  $x \leq 3$ :

$$x^2 - 6x + 10 - 6 + 2x = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \geq 0 \text{ всегда}$$

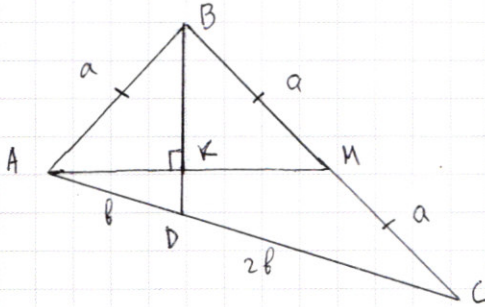
Значит, нужно, чтобы знаменатель был  $< 0$ .

$$x \geq 2 \quad 2x^2 - 4x + x^2 - 2x = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) \quad \text{Подходит } (0; 2)$$

$$2 \geq x \geq 0 \quad 2x^2 - 4x + 2x - x^2 = x^2 - 2x = x(x-2) \quad \text{Подходит } (0; 2)$$

$$0 \geq x \quad 2x^2 - 4x - 2x + x^2 = 3x^2 - 6x = 3(x-2)x \quad \text{Подходит } (0; 2) \quad \text{Ответ: } (0; 2)$$

2.



$\triangle ABM$  равнобедренный, т.е.  $AB = BM$ , т.к. в этом треугольнике высота совпала с биссектрисой.

$BM = MC$ , т.к.  $AM$  — медиана. Значит, если  $AB = a$ , то  $BC = 2a$

По св-ву биссектрисы  $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC}$ , т.е.  $AD = b$ , а  $DC = 2b$

$$3a + 3b = 600 \quad a + b = 200$$

По перву треугольнику  $3a > 3b$ , т.е.  $a > b$  и  $a + 3b > 2a$ , т.е.  $3b > a$

Заметим, что  $a$  целое по условию, а значит и  $b$  целое, т.к.  $a + b = 200$   $b = 200 - a \in \mathbb{Z}$

Тогда мы легко можем узнать все пары чисел  $a$  и  $b$ , подходящие по условию:

$$\left. \begin{array}{l} a = 101 \quad b = 99 \\ a = 102 \quad b = 98 \\ \vdots \\ a = 149 \quad b = 51 \end{array} \right\}$$

Витальные пары чисел не подходят к какому-то условию. (Т.е. например,  $a = 100$  и  $b = 100$  не подг, т.к. должно быть  $a > b$ )

Значит, ответ: 49 ~~треугольников~~

( $a = 150$  и  $b = 50$  не подг, т.к.  $3b$  должно быть  $> a$ )

$$3. \begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases} \quad x - 2y = \sqrt{xy}, \text{ т.е. } \begin{cases} x - 2y \geq 0 \\ x^2 - 4xy - 4y^2 = xy \end{cases}$$

$$\rightarrow x^2 - 5xy + 4y^2 = 0 \quad D = 25x^2 - 4 \cdot 4x^2 = 9x^2 \quad \frac{5x \pm 3x}{8} = \frac{x}{4}$$

Квадратное ур-ие относительно  $y$

$$\text{I. } y = x \quad y - 2y = \sqrt{y^2} \quad y - 2y \geq 0 \quad -y \geq 0 \quad y \leq 0$$

$$y + y^2 = 5 \quad y^2 + y - 5 = 0 \quad D = 1 + 4 \cdot 5 = 21$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} \rightarrow \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} > 0 \text{ не подг}$$

$$\frac{-1 - \sqrt{21}}{2} < 0 \text{ подг}$$

$$\text{II. } 4y = x \quad 2y = \sqrt{4y^2} \quad 2y \geq 0 \quad y \geq 0$$

$$4y + y^2 = 5 \quad y^2 + 4y - 5 = 0 \quad D = 16 + 20 = 36$$

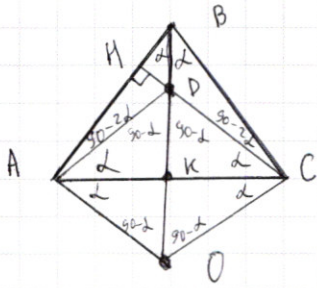
$$\frac{-4 \pm 6}{2} = 1 \text{ подг}$$

$$\frac{-4 - 6}{2} = -5 \text{ не подг, т.к. } < 0$$



Ответ:  $\left\{ \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}; 1 \right\}$  (это лишнее)

4.



$AB = BC$ , т.к. это касательные из  $(\cdot) B$  к окружности.

$AO = OD = OC$ , т.к. это радиусы одной окружности

Картинка симметрична относительно  $OD$ , значит  $BDO$  - огибающая.

Тогда, если  $\angle CAO = \alpha$ , то  $\angle BAD = 90 - 2\alpha$ ,  $\angle ABD = \alpha$ ,  $\angle ADO = 90 - \alpha = \angle AOD$ .

То есть  $\triangle AOD$  и  $\triangle ODC$  равносторонние.

$\alpha = 30^\circ$

$CD = 4$ ,  $AD = 4$ . В  $\triangle AHD$   $\angleHAD = 30^\circ$ , то есть  $HD = 2$ .  $HC = 6$

В  $\triangle AKO$   $AO = 4$ ,  $KO = 2$ , т.к.  $\angle KAO = 30^\circ$ . Значит  $AK = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$

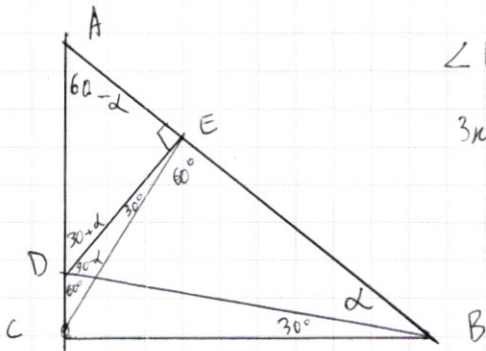
$AC = 2AK = 2\sqrt{12}$

$AB = AC = 2\sqrt{12}$

$\frac{AB}{CH} = \frac{2\sqrt{12}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ответ:  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

5.



$\angle DEB = 90^\circ$ ,  $\angle DCB = 90^\circ$ , значит  $\square CDEB$  - вписанный

Значит  $\angle DBC = \angle DEC = 30^\circ$ ,  $\angle CDB = \angle CEB = 60^\circ$

Если  $CD = k$ , то  $DB = 2k$

$k^2 + BC^2 = 4k^2$

$BC^2 = 3k^2$

$4 \cdot \frac{7}{3} = 3k^2$

$k^2 = \frac{28}{9}$   $k = \frac{\sqrt{28}}{3}$

$AD = AC - CD = \sqrt{7} - \frac{\sqrt{28}}{3} = \sqrt{7} - \frac{2\sqrt{7}}{3} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{3}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{3}$

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{7 + \frac{28}{3}} = \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

$\frac{AB}{AD} = \frac{7\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{21\sqrt{3}}{3\sqrt{7}}$

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$  по трем углам. Значит  $S_{\triangle ADE} = \frac{S_{\triangle ABC}}{t^2}$   $t$  - коэффициент подобия

$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{\frac{7}{3}}}{2} = \frac{7}{\sqrt{3}}$

$t = \frac{21\sqrt{3}}{3\sqrt{7}}$

$S_{\triangle ADE} = \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot \frac{9 \cdot 7}{21^2 \cdot 3} = \frac{9 \cdot 7 \cdot 7}{21 \cdot 21 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

Ответ:  $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$ ;  $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$7. f(ab) = f(a) + f(b) \quad f(p) = p$$

Заметим, что если  $n \in \mathbb{N}$   $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} \dots p_s^{k_s}$ , то  $f(n) = p_1 \cdot k_1 + p_2 \cdot k_2 + \dots + p_s \cdot k_s$   
(Это очевидно из условия).

$$f\left(\frac{a}{b}\right), \text{ где } a, b \in \mathbb{N} \quad f\left(\frac{a}{b} \cdot b\right) = f\left(\frac{a}{b}\right) + f(b) = f(a)$$

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$$

По условию  $1 \leq x \leq 18$ ,  $1 \leq y \leq 18$   $f(x/y) < 0$ , т.е.  $f(x) - f(y) < 0$

Можем перебрать:

$x=1$   $y > 1$  подходит. Т.е.  $f(\frac{1}{2}), f(\frac{1}{3}) \dots f(\frac{1}{18})$  подходит

$x=2$   $y > 2$  подходит. Т.е.  $f(\frac{2}{3}), f(\frac{2}{4}) \dots f(\frac{2}{18})$  подходит

$x=3$   $y > 3$  подходит. Т.е.  $f(\frac{3}{4}), f(\frac{3}{5}) \dots f(\frac{3}{18})$  подходит

$x=4$   $y > 4$  подходит. Т.е.  $f(\frac{4}{5}), f(\frac{4}{6}) \dots f(\frac{4}{18})$  подходит

$x=5$   $y > 6$  подходит (при  $y=6$   $f(\frac{5}{6})=0$ ) Т.е.  $f(\frac{5}{7}) \dots f(\frac{5}{18})$  подходит

$x=6$   $y > 6$  подходит. Т.е.  $f(\frac{6}{7}) \dots f(\frac{6}{18})$  подходит

~~$x=7$   $y > 7$  подходит. Т.е.  $f(\frac{7}{8}), f(\frac{7}{9}) \dots f(\frac{7}{18})$  подходит.~~

~~$x=8$~~

~~$x=9$   $y > 10$  подг. (при  $y \geq 8$  и  $y \neq 9$  будет 1, при  $y=9$  будет 0) Т.е.  $f(\frac{9}{11}), f(\frac{9}{12}), f(\frac{9}{13}), f(\frac{9}{14}), f(\frac{9}{15}), f(\frac{9}{16}), f(\frac{9}{17}), f(\frac{9}{18})$  подг.~~

$x=7$   $y \in \{11\} \cup [13; 18]$  подходит

$x=8$   ~~$y > 8$~~  подходит  $y \in \{7\} \cup [10; 18]$

$x=9$   ~~$y > 9$~~  подходит  $y \in \{7\} \cup [10; 18]$

$x=10$   $y \in \{11\} \cup [13; 18]$  подг.

$x=11$   $y \in \{13\} \cup \{17\}$  подг.

$x=17$   ~~$y > 17$~~   $x=18$   $y \in [13; 14] \cup \{17\}$

$x=12$   $y \in [13; 18]$  подг.

$x=13$   $y = 17$  подг.

$x=14$   $y = 17$  подг. и  $y = 11$

$x=15$   $y = 17$  подг. и  $y = 11$

$x=16$   $y = 17$  подг. и  $y = 11$

Ответ: 138 пар

$$17 + 16 + 15 + 14 + 12 + 12 + 7 + 10 + 10 + 7 + 2 + 6 + 1 + 2 + 2 + 2 + 0 + 3 = 138$$



$$6. \begin{cases} |2x+ky| + |4-2x-y| > 4 \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 4y + y^2 = (x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 5 \quad \text{Круг, радиус которого } \leq \sqrt{5}$$

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$f(n) = \sum p$$

$$\frac{1}{k} = -f(k) \quad k \in \mathbb{N}$$

$$f\left(\frac{a}{k} \cdot k\right) = f\left(\frac{a}{k}\right) + f(k) = a \quad f\left(\frac{a}{k}\right) = a - \sum p_k = a - f(k) \quad k \in \mathbb{N}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 2 - f(3) = 2 - 3 = -1$$

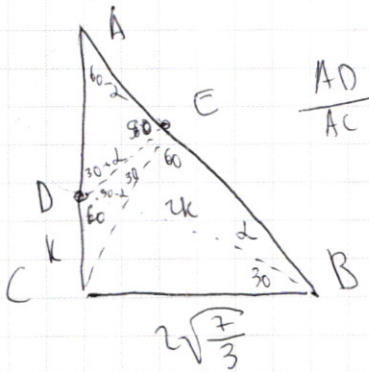
$$f\left(\frac{2}{4}\right) = 2 - f(4) = 2 - 4 = -2$$

$$f\left(\frac{2}{\dots}\right) \text{ негр} \quad f\left(\frac{1}{\dots}\right) \text{ негр}$$

$$f\left(\frac{k}{k+1}\right) = k - f(k+1)$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) \dots$$

5.



$$AC = \sqrt{2} \quad BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$k^2 = 4 \cdot \frac{7}{3} = \frac{28}{3}$$

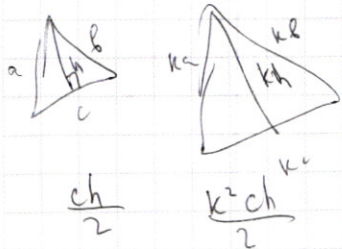
$$\frac{28}{3} = 3k^2 \quad \frac{28}{9} = k^2$$

$$k = \frac{\sqrt{28}}{3}$$

$$\sqrt{2} - \frac{\sqrt{28}}{3}$$

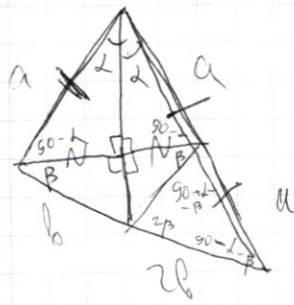
$$\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{28}}{3}$$

$$\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{28}}{3\sqrt{2}} = 1 - \frac{\sqrt{28}}{3\sqrt{2}}$$



$$\frac{ch}{2} \quad \frac{k^2 ch}{2}$$

$k^2$



$$3a + 3b = 600$$

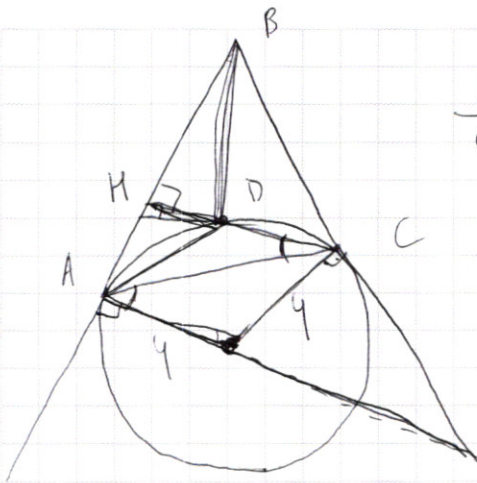
$$a + b = 200$$

$$a > b$$

$$3b > a$$

- 101.3 + 99.3
- 99.3 > 101
- 102 58
- 120 80
- 140 60 ✓
- 150 50 X
- 149 51 ✓





$$\frac{AB}{CH}$$

$$\frac{DH \cdot AB}{2} = 6 \quad DH \cdot AB = 12$$

$$(\cdot) H \quad HD \cdot HC = HA^2$$

$$HC = \frac{HA^2}{HD}$$

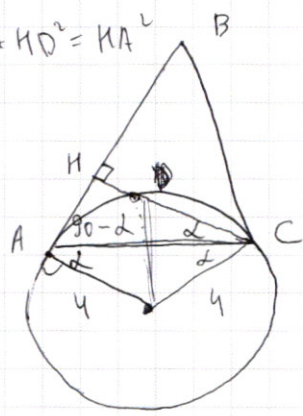
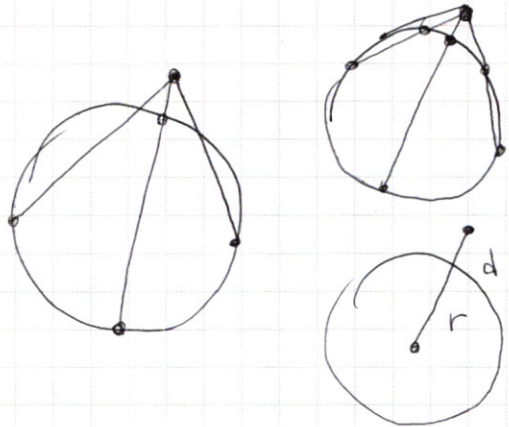
$$d^2 - r^2$$

$$HD(4+HD) = HA^2$$

$$AB = \frac{12}{HD}$$

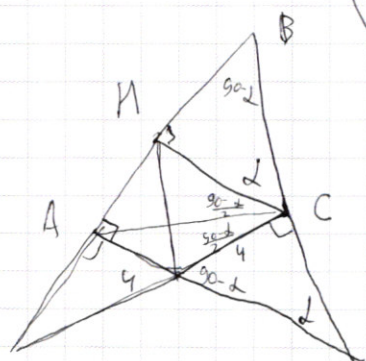
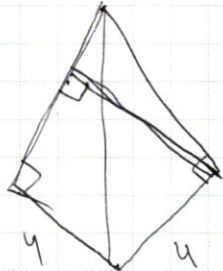
$$4HD + HD^2 = HA^2$$

$$\frac{AB}{CH} = \frac{12}{AH^2}$$



$$BK \cdot AH = 2BC^2$$

$17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17$



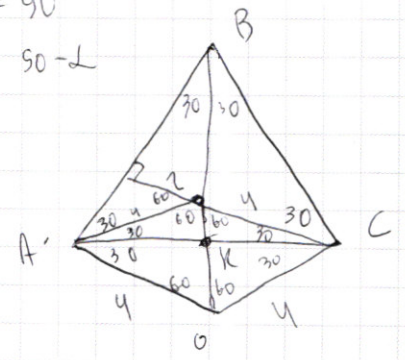
$$90 - 2\beta + d = 90$$

$$2\beta = d$$

$$2\beta + d = 90$$

$$2\beta = 90 - d$$

$$DH \cdot AB = 12$$

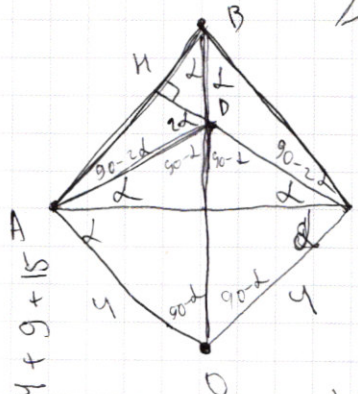


$$AO = OD = OC = 4$$

$$90 - L$$

$$CD = 4$$

$$AD = 4$$



$$30 - d = 2d$$

$$90 = 3d$$

$$d = 30$$

$$AB^2 + 16 = BO^2$$

$$HC^2 + AH^2 = AC^2$$

$$AH^2 + HD^2 = 16$$

$$HD = HC - 4$$

$$AH^2 + HC^2 - 8HC + 16 = 16$$

$$AH^2 + HC^2 - 8HC = 0$$

$$AH^2 = 16 - 4 = 12$$

$$AH = \sqrt{12}$$

$$AC = AB = BC = 2\sqrt{3}$$

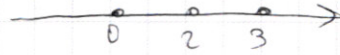
$$\frac{2\sqrt{12}}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$

$$20 + 30 + 30 + 10 + 24 + 9 + 15 = 138$$

$$129 + 9 = 138$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|}{2x^2 - 4x + |x||x-2|} \leq 0$$



$$\begin{cases} x^2 - 6x + 10 - 2|x-3| \geq 0 \\ 2x^2 - 4x + |x||x-2| < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 10 - 2|x-3| \leq 0 \\ 2x^2 - 4x + |x||x-2| > 0 \end{cases}$$

$$x \geq 3$$

$$x^2 - 6x + 10 - 2x + 6 \geq 0$$

$$x^2 - 8x + 16 \geq 0 \quad D = 64 - 4 \cdot 16 = 64 - 64 = 0 \quad x = 4 \quad (x-4)^2 \geq 0 \text{ верно всегда}$$

$$2x^2 - 4x + x^2 - 2x < 0$$

$$3x^2 - 6x < 0 \quad x(3x-6) \quad \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ 0 \quad 2 \end{array} \quad (0; 2)$$

$$3 > x \geq 2$$

$$x^2 - 6x + 10 - 6 + 2x \geq 0$$

$$x^2 - 4x + 4 \geq 0 \quad (x-2)^2 \text{ верно всегда } \geq 0$$

$$2x^2 - 4x + x^2 - 2x < 0 \quad (0; 2)$$

$$2 > x > 0$$

$$x^2 - 4x + 4 \geq 0 \text{ всегда верно}$$

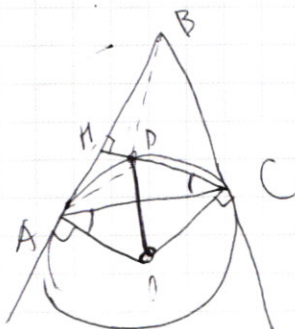
$$2x^2 - 4x + 2x - x^2$$

$$x^2 - 2x < 0 \quad x(x-2) \quad \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ 0 \quad 2 \end{array} \quad (0; 2)$$

$$0 > x$$

$$x^2 - 4x + 4 \geq 0 \text{ всегда верно}$$

$$2x^2 - 4x + (-x)(2-x) = 2x^2 - 4x - 2x + x^2 = 3x^2 - 6x < 0 \quad (0; 2)$$



$$\Delta ABD = 6$$

$$r_{\text{впис.}} = 4$$

$$f(ab) = f(a) \cdot f(b) \quad f(1 \cdot b) = f(1) + f(b)$$

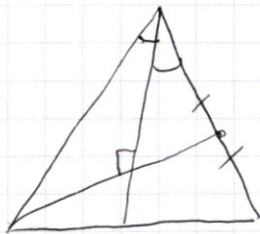
$$f(2 \cdot b) = f(2) + f(b) \quad f(1) = 0$$

$$f(10) = f(2 \cdot 5) = 7 \quad \frac{1}{3} = -3 \quad \frac{1}{k} = -f(k)$$

$$f(20) = f(2) + f(10) = 2 + 7 = 9 \quad f\left(\frac{2}{3} \cdot 3\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) + f(3) = 2$$

$$f\left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) = 0 = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = -2$$





$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 4xy + 4y^2 &= xy \\ x^2 - 5xy + 4y^2 &= 0 \\ D &= 25x^2 - 4 \cdot 4 \cdot x^2 = 9x^2 \end{aligned}$$

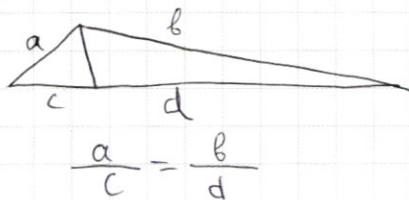
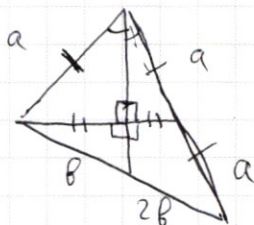
$$y^2 + 2y = 5 - \sqrt{xy}$$

$$\frac{5x \pm 3x}{8} = \frac{x}{4}$$

$$\begin{aligned} x - 2x &= \sqrt{x^2} \\ -x &= \sqrt{x^2} \\ x < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= x \\ y &= \frac{x}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + x^2 &= 5 & x + x + 1 &= 5 \\ x^2 + x - 5 &= 0 & D &= 1 + 20 = 21 \\ \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} & & & \end{aligned}$$



$$3a + 3b = 600 \quad a + b = 200$$

$$3a > 3b$$

$$a + 3b > 2a \quad 3b > a$$

$$3a > 3b > a$$

$$a > 3b > a$$

$$a > b$$

$$b < 100$$

$$3b > a$$

$$3b > 100 \quad b > 33$$

$$34$$

$$166$$

$$3b > a \quad b > \frac{a}{3}$$

$$3 \cdot 34$$

$$3 \cdot 166$$

$$34 \cdot 3 + 166 > 2 \cdot 166$$

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$x - 2y > 0$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy$$

$$x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$$

$$x + y^2 = 5 \quad y^2 = 5 - x$$

$$x^2 - 5xy + 4(5 - x) = 0$$

$$x^2 - 5xy + 20 - 4x = 0$$

$$x^2 - 4x + 20 = 5xy$$

$$\frac{x^2 - 4x + 20}{5x} = y$$

$$\frac{x}{5} - \frac{4}{5} + \frac{4}{x}$$

$$y^2 = 5 - x$$

$$\left( \frac{x-4}{5} + \frac{4}{x} \right)^2 \geq 5 - x \quad \frac{x^2 - 4x + 16}{25} + \frac{2(x-4)(4)}{5x} + \frac{16}{x^2} = 5 - x$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x| + |y| + |4 - 2x - y| = 4 \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$(x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 \leq 0$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 5$$

Круг, радиус которого  $\leq 5$   
(1; 2)

$$\# \quad 2 \quad 2$$

$$4 + 2 + 2 > 4$$

$$1 \quad 1$$

$$2 + 1 + 1$$



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)