МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \le 0$;

Подмодульные нули: 0; 2; 3.

1) Если $x \le 0$, то:

$\frac{x^2-6x+10-2(3-x)}{2x^2-4x+(-x)\cdot(2-x)} = \frac{x^2-4x+4}{3x^2-6x} = \frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} = \frac{x-2}{3x} \le 0$.

$x \le 0 \Rightarrow x-2<0$; $3x \le 0$. $\Rightarrow x=0$. (отриц. : отриц. = полож.) Но $3x$-знаменатель $\Rightarrow x \ne 0$.

Нет решений. ~~кроме~~

2) Если $0 < x \le 2$, то:

$\frac{x^2-6x+10-2(3-x)}{2x^2-4x+(x)\cdot(2-x)} = \frac{(x-2)^2}{x^2-2x} = \frac{(x-2)^2}{x(x-2)} = \frac{x-2}{x} \le 0$; ~~Решаем методом интервалов:~~

$x \ne 2$

$x>0 \Rightarrow$ знаменатель ≥ 0; $x \le 2 \Rightarrow x-2 \le 0$. Тогда решениями являются $x \in (0;2)$.

3) Если $2 \le x \le 3$, то:

$\frac{x^2-6x+10-2(3-x)}{2x^2-4x+(x)\cdot(x-2)} = \frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} = \frac{x-2}{3x} \le 0$ ~~кроме $x\ne2$~~ $x \ne 2$, т.к. мы поделили на знаменатель - нет решений, т.к. $x \ge 2 \Rightarrow x-2 \ge 0$; $x \ge 2 \Rightarrow x>0$.

4) Если $3 \le x$, то:

$\frac{x^2-6x+10-2(x-3)}{2x^2-4x+(x)\cdot(x-2)} = \frac{x^2-8x+16}{3x(x-2)} = \frac{(x-4)^2}{3x(x-2)} \le 0$ - нет решений, кроме $x=4$, т.к.

$(x-4)^2 \ge 0$ и $3x(x-2) \ge 0$ $(x \ge 3)$.

Значит, решениями данного неравенства являются $x \in (0;2) \cup \{4\}$.

Ответ: $x \in (0;2) \cup \{4\}$.

☐ черновик ☐ чистовик

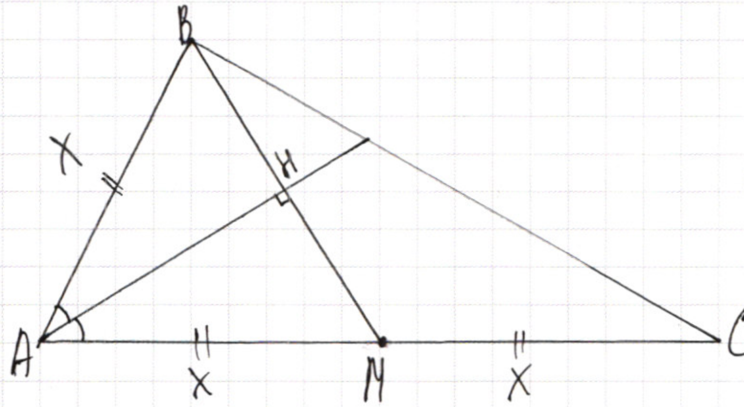
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.



BM-медиана; AH-биссектриса; BM ⊥ AH. В △ABM AH-высота и биссектриса ⇒ △ABM равнобедренный ⇒ AB=AM=MC.

Пусть AB=BM=MC=X. Тогда, $P_{\triangle ABC}=600 \Rightarrow BC=600-3X$. По неравенству треугольника $AB+AC>BC$; $AB+BC>AC$; $BC+AC>AB$;

$$X+2X>600-3X;\quad X+600-3X>2X;\quad 600-3X>X;$$ значит,

$X>100$; $X<150$; $X<150$.

Отсюда следует, что $101 \leq X \leq 149$. Так как X; 2X и 600-3X - целые числа, то ответом является количество целых чисел от 101 до 149 - всего их 49.

Ответ: 49.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}; & (1) \\ x+y^2=5; & (2) \end{cases}$

$(2) \Rightarrow x=5-y^2$. Подставим в (1): $5-y^2-2y=\sqrt{(5-y^2)\cdot y}$; $\Rightarrow y^2+2y-5 \le 0$;

Возведём в квадрат: $y \in \left[\frac{-2-\sqrt{24}}{2}; \frac{-2+\sqrt{24}}{2}\right]$.

$y^4+4y^2+25+4y^3-10y^2-20y=5y-y^3$;

$y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0$; $y=1$; $y=-5$ - корни данного уравнения. Разложим его на множители:

$(y-1)(y+5)(y^2+y-5)=0$; $y_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$.

Проверка: $y=1$: $x+1=5 \Rightarrow x=4$; $4-2=\sqrt{4\cdot 1}$ - верно;

$y=-5$: $x+25=5 \Rightarrow x=-20$; $-20+2\cdot 5=\sqrt{(-5)\cdot(-20)}$; $-10=10$ - неверно;

$y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$: $x+\frac{22-2\sqrt{21}}{4}=5$; $x+\frac{11-\sqrt{21}}{2}=5 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{21}-1}{2}$.

$\frac{\sqrt{21}-1}{2}+1-\sqrt{21}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{21}-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{21}-1}{2}\right)}$; $\frac{1-\sqrt{21}}{2}=\frac{\sqrt{21}-1}{2}$ - неверно;

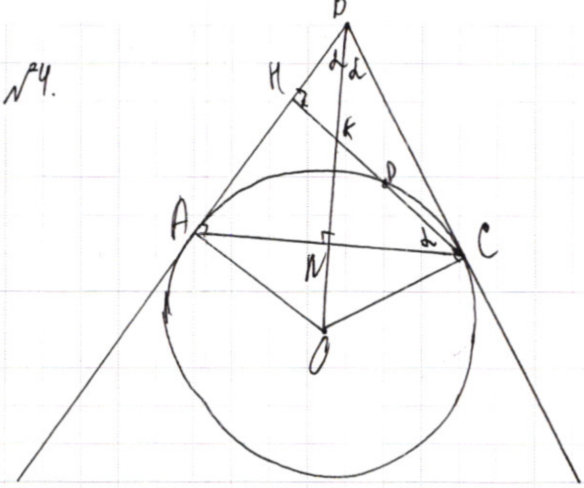
$y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$: $x+\frac{22+2\sqrt{21}}{4}=5$; $x+\frac{11+\sqrt{21}}{2}=5 \Rightarrow x=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$;

$\frac{-1-\sqrt{21}}{2}+1+\sqrt{21}=\sqrt{\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)}$; $\frac{1+\sqrt{21}}{2}=\frac{1+\sqrt{21}}{2}$ - верно.

Таким образом, решением данной системы являются пары $x_1=4$; $y_1=1$; $x_2=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$; $y_2=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$.

Ответ: $(4;1)$; $\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$.

№4.



Картинка симметрична относительно BO, т.к. BO-биссектриса $\angle ABC$. Пусть $\angle ABO = \angle OBC = \alpha$. Тогда, так как $OA = OC$ (как радиусы) и $AB = BC$ (как отрезки касательной), то $ABCO$-дельтоид и $BO \perp AC \Rightarrow BO$-высота $\triangle ABC$. Тогда $\angle ABO = \angle HCA$ ~~как вписанные (~~, так как

K-ортоцентр $\triangle ABC$; BN-высота

$\angle BKH$ и $\angle NKC$ вертикальные и $\angle BHC = \angle BNC = 90°$. По теореме синусов в $\triangle HCA$

$\frac{CH}{\sin 90-\alpha} = \frac{AC}{\sin 90°} \Rightarrow CH = AC \cdot \sin 90-\alpha$. В $\triangle ABN$ $\frac{AB}{\sin 90°} = \frac{AC}{2\sin\alpha} \Rightarrow AB = \frac{AC}{2\sin\alpha}$. $AB = BC$.

~~sin~~ $\frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{BC}{HC} = \frac{AB}{HC} = \frac{AC : \sin 90-\alpha}{2\sin\alpha \cdot AC} = \frac{\cancel{\sin 90-\alpha}\ 1}{2\sin\alpha \cdot \sin 90-\alpha}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \sin 90-\alpha$;

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2\sin\alpha \cdot \sin 90-\alpha$;

~~$2\sin\alpha(\cos\alpha - \cos\alpha) = 0$~~ ~~$\cos\alpha$~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

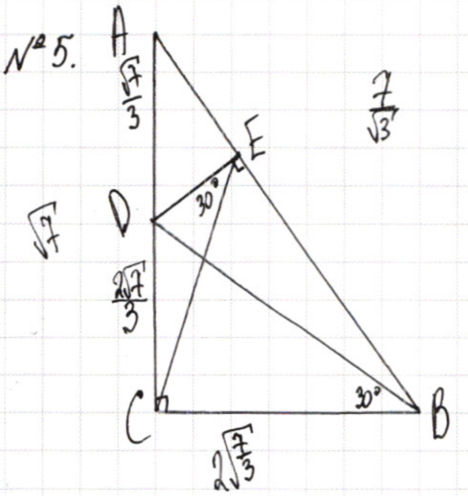
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.



По теореме Пифагора в $\triangle ABC$ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=$ $=\sqrt{(\sqrt7)^2+\left(2\sqrt{\frac73}\right)^2}=\sqrt{7+\frac{28}{3}}=\sqrt{\frac{49}{3}}=\frac{7}{\sqrt3}$. $\angle DBC=\angle DEC$, т.к. $CDEB$ - вписанный четырехугольник.

В прямоугольном $\triangle DBC$ $\angle DBC=30^\circ \Rightarrow$ катет DC в 2 раза меньше гипотенузы BD. Пусть $DC=x$. Тогда $BD=2x$.

По т. Пифагора в $\triangle DBC$ $DB^2=DC^2+BC^2$;

$$4x^2=x^2+\frac{28}{3}$$

$$3x^2=\frac{28}{3}\Rightarrow x^2=\frac{28}{9}\Rightarrow x=\frac{2\sqrt7}{3}.$$

(x неотрицательно)

Значит, $DC=\frac{2\sqrt7}{3}$; $BD=\frac{4\sqrt7}{3}$. Тогда $AD=AC-DC=\sqrt7-\frac{2\sqrt7}{3}=\frac{\sqrt7}{3}$.

$AD:AC=\left(\frac{\sqrt7}{3}\right):(\sqrt7)=1:3.$

$\triangle AED\sim\triangle ACB$ по двум углам ($\angle DAE$ - общий; $\angle AED=\angle ACB=90^\circ$). Тогда:

$\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow \cancel{AE=\frac{DE\cdot AC}{B}}$ $AE=\frac{AC\cdot AD}{AB}=\frac{(\sqrt7)\cdot\left(\frac{\sqrt7}{3}\right)}{\left(\frac{7}{\sqrt3}\right)}=\frac{7\cdot\sqrt3}{7\cdot3}=\frac{\sqrt3}{3}$;

$DE=\frac{AD\cdot BC}{AB}=\frac{\left(\frac{\sqrt7}{3}\right)\cdot\left(2\sqrt{\frac73}\right)}{\left(\frac{7}{\sqrt3}\right)}=\frac{\sqrt7\cdot2\cdot\sqrt7\cdot\sqrt3}{3\cdot\sqrt3\cdot7}=\frac{2}{3}$.

Тогда $S_{\triangle AED}=\frac{AE\cdot DE}{2}=\frac{\sqrt3\cdot2}{3\cdot3\cdot2}=\frac{\sqrt3}{9}$.

Ответ: $AD:AC=1:3$; $S_{\triangle AED}=\frac{\sqrt3}{9}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6. $\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4; & (1); \\ x^2-2x-4y+y^2\leq 0; & (2); \end{cases}$

(2): $(x-1)^2+(y-2)^2\leq 5$. - окружность (+ её внутренность) с центром в точке (1;2) и радиусом $\sqrt{5}$.

Решим первое неравенство.

1) $x\geq 0;\ y\geq 0;\ 4-2x-y\geq 0$: $4>4$ - неверно, нет решений; $y\leq 4-2x$;

2) $x\leq 0;\ y\leq 0;\ 4-2x-y\leq 0$: $-4>4$ - неверно, нет решений; $y\geq 4-2x$;

3) $x\geq 0;\ y\geq 0;\ 4-2x-y\leq 0$: $4x+2y>8 \Rightarrow y>4-2x$ при $x\geq 0; y\geq 0;\ y\geq 4-2x$

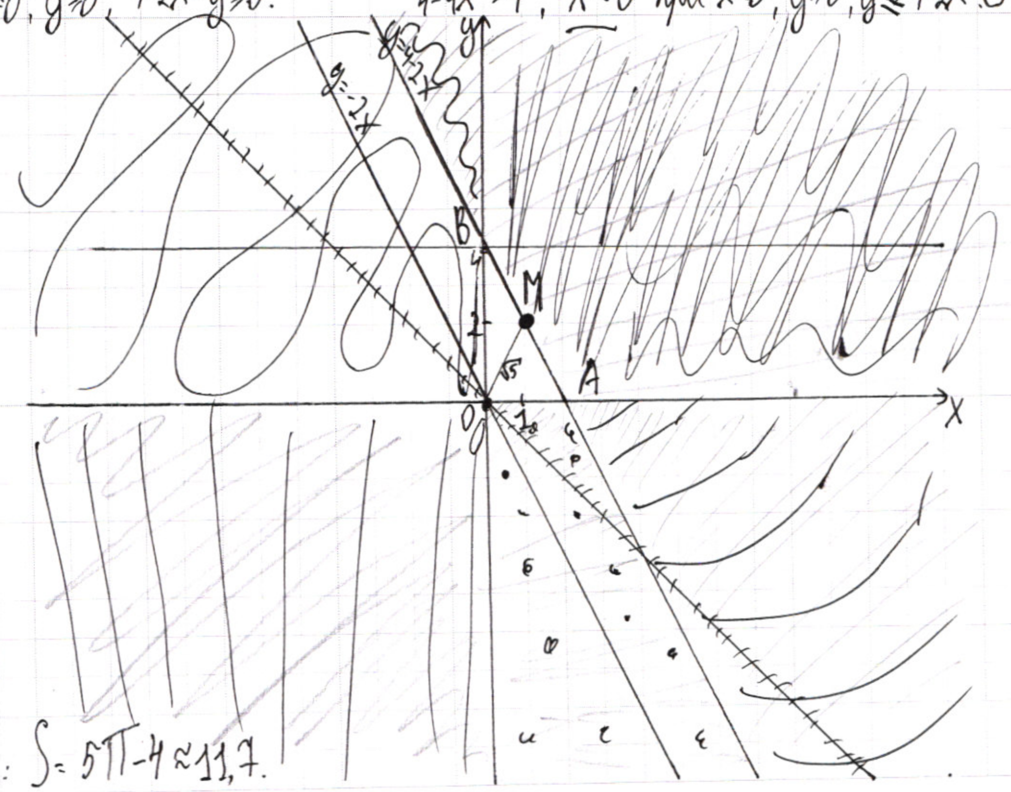
4) $x\geq 0;\ y\leq 0;\ 4-2x-y\leq 0$: $4x>8 \Rightarrow x>2$ при $x\geq 0;\ y\geq 4-2x; y\leq 0$.

5) $x\geq 0;\ y\leq 0;\ 4-2x-y\geq 0$: $4-2y>4 \Rightarrow -2y>0;\ y<0$ при $x\geq 0; y\leq 0;\ y\leq 4-2x$

6) $x\leq 0;\ y\leq 0;\ 4-2x-y\geq 0$: $4-4x-2y>4;\ -2x-y>0;\ y<-2x$ при $x\leq 0; y\leq 0;\ y\leq 4-2x$.

7) $x\leq 0;\ y\geq 0;\ 4-2x-y\leq 0$: $2y>8 \Rightarrow y>4$ при $x\leq 0; y\geq 0;\ y\geq 4-2x$.

8) $x\leq 0;\ y\geq 0;\ 4-2x-y\geq 0$: $4-4x>4;\ x<0$ при $x\leq 0; y\geq 0; y\leq 4-2x$.



$M(1;2)$ - центр окружности (2).

$OM=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

$MA=MO=MB=\sqrt{5}$.

$(A(2;0); B(0;4); O(0;0))$

Тогда площадь искомой фигуры - это $S_{круга} - S_{\triangle OBA} = \pi R^2 - \frac{4\cdot 2}{2} =$

$=5\pi-4\approx 15{,}7-4=$

$\approx 11{,}7$.

Ответ: $S=5\pi-4\approx 11{,}7$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №6

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \le 0$

1) $x \le 0$;
2) $0 \le x \le 2$
3) $2 \le x \le 3$
4) $x \ge 3$

$\left(\frac{\sqrt{21}-1}{2}\right)^2 = \frac{22-2\sqrt{21}}{4}$

1) $\frac{x^2-6x+10-2(3-x)}{2x^2-4x+\cancel{x}(-x)(2-x)} \le 0$; $\cancel{x^2-6x}$ $\frac{x^2-4x+4}{\cancel{2x}\ 3x^2-6x} \le 0$ $\frac{(x-2)^2}{3x(x-6)} \le 0$

$\sqrt{21} \vee \sqrt{24}-1$

2) $\frac{x^2-6x+10-2(3-x)}{2x^2-4}$ $\frac{x^2-4x+4}{x^2-2x} = \frac{(x-2)^2}{x(x-2)} \le 0$

$21 \vee 25-2\sqrt{24}$

$\cancel{4}\ \sqrt{24} \vee 2$

$>$

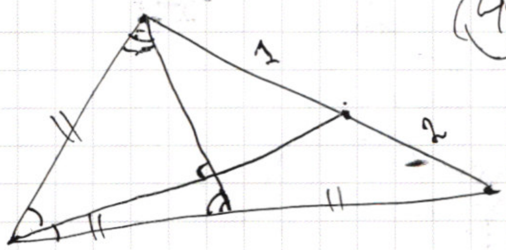
3) $\frac{(x-2)^2}{3x^2-6x}$

$(y^2+4y-5)(y^2+y-5)$

$y^4+5y^3-6y^2-25y+25$

4) $\frac{x^2-8x+16}{3x^2-6x} = \frac{(x-4)^2}{3x(x-6)} \le 0$

2)



48

$\cancel{200\ 200}$ 150 150 300

$3x \ge 600-3x$
$x > 100$

$2x < 600+x-3x$
$4x < 600 \Rightarrow x < 150$

3) $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$ $x=5-y^2$

$5-y^2-2y = \sqrt{(5-y^2)\cdot y}$

$5-y^2-2y \ge 0$

$(y^2+2y-5)^2 = y^4+4y^2+25+4y^3-20y-10y^2$

$y^4+4y^2+25+4y^3-20y = 5y-y^3$
$-10y^2$

$\cancel{y^4-6y}$ $y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0$;

$y=1$ - корень

$-y^4+5y^3-6y^2-25y+25 \,|\, y-1$
$y^4-y^3 \qquad |\, y^3+6y^2-25$
$-6y^3-6y^2$
$6y^3-6y^2$
$0 \quad -25y+25$

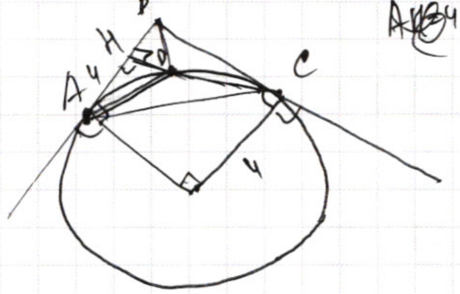
y^3+6y^2-25. $\cancel{y=-5}$ $-125+150-25$

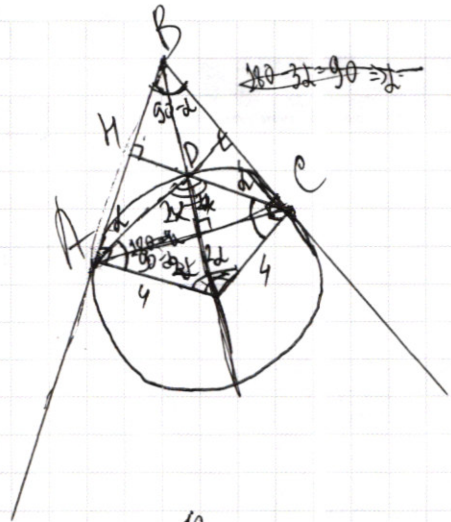
$-y^3+6y^2-25 \,|\, y+5$
$y^3+5y^2 \qquad |\, y^2+y-5$
$-5y+6y^2$
y^2+5y
$-5y-25$

y^2+y-5 $\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

$y^2+2y-5 \le 0$
$y\ \frac{-2\pm\sqrt{24}}{2}$

$\frac{-2-\sqrt{24}}{2} \le y \le \frac{-2+\sqrt{24}}{2}$



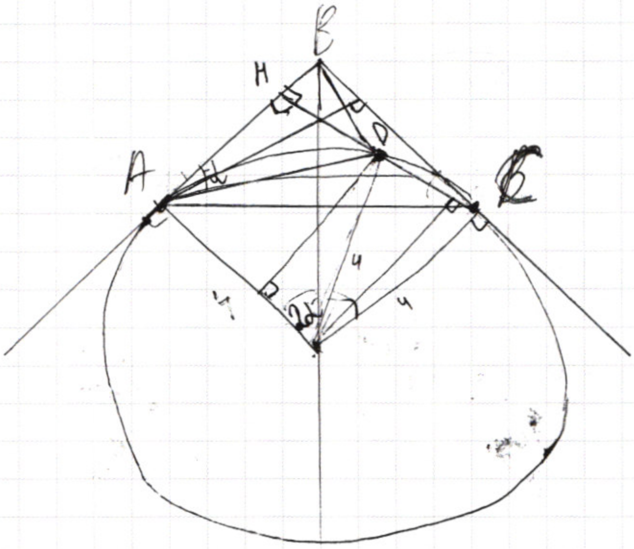


$S_{\triangle ABD} =$ $\quad S_{\triangle ABC} =$

$S_{\triangle ABD} = \frac{AB \cdot DH}{2} \Rightarrow AB = \frac{12}{DH}$

$CH = DH + CD$

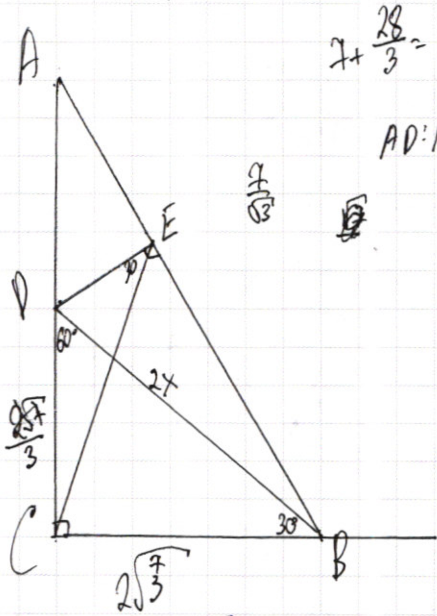
$\frac{12}{DH}$



$7 + \frac{28}{3} = \frac{49}{3} = \frac{7}{\sqrt{3}}$

$AD : AC$

$\frac{7}{\sqrt{3}}$



$4 - 2x - y \geq 0$

$y + 2x \leq 4$

$\sqrt{7}$

$x^2 + \frac{28}{3} = 4x^2$

$\frac{28}{3} = 3x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{28}{9} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

$x \geq 0;\ y \geq 0$

$2x + y +$

$\sqrt{7} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{14}{\sqrt{3}} : \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{9} = \frac{7\sqrt{3}}{27}.$

$(x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 \leq 0$

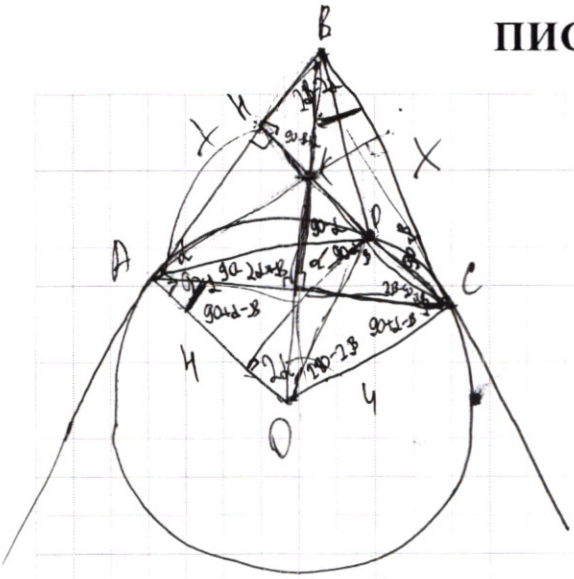
$\boxed{(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 5.}$

$\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} \quad \frac{1 \cdot \frac{7}{3\sqrt{3}}}{\frac{7}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{3}$

$\frac{\frac{\sqrt{7}}{3}}{\frac{7}{\sqrt{3}}} = \quad \frac{\sqrt{21}}{21}.$

$\frac{21}{21^2} = \frac{1}{21} \cdot \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



AB : CH

$S_{\triangle ABD} : S_{\triangle BCH} = \frac{AB\cdot DH}{BC\cdot BH} = \frac{DH}{BH}$

$DH = \frac{12}{X}$

$DH\cdot X = 12 \Rightarrow$

$CH = \sqrt{X^2 - BH^2}$

$\frac{BH}{X} = \frac{H\cdot}{C\cdot}$

$\frac{BH}{AB} = \frac{BK}{BO} = \frac{HK}{OC}$

$\frac{BH}{X} = \frac{BK}{BO} = \frac{HK}{4}$

$2\beta + 2\alpha + 90 - \beta = 180$

$2\alpha + \beta = 90$

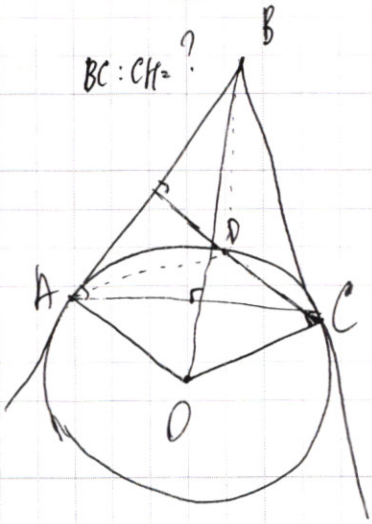
$\beta = 90 - 2\alpha$

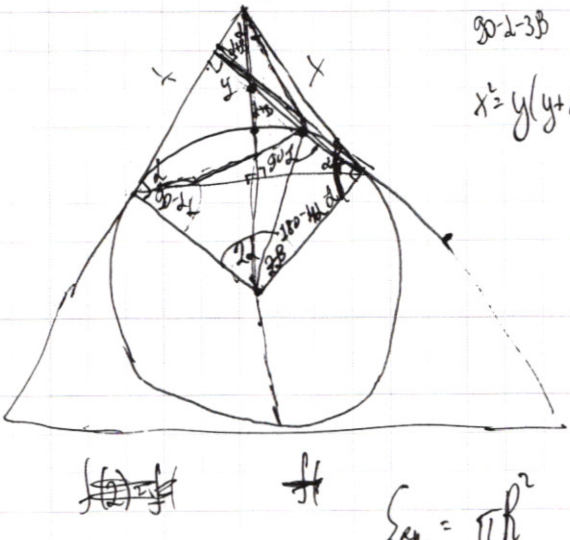
$90 - \alpha - 3\beta$

$x^2 = y(y+8) = y^2 + 8y$

$\alpha + 90 - 2\alpha - 90 - \alpha$

BC : CH = ?





$f(b) = f(1) + f(b) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(2b) = f(2) + f(b)$

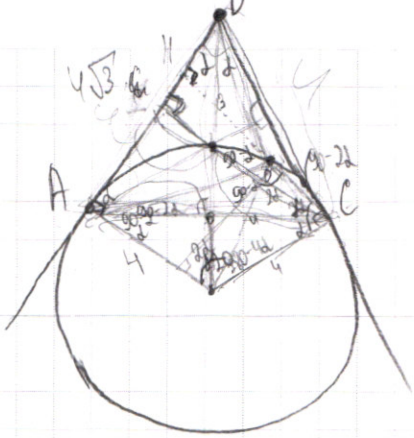
$f(b) + 2 = f(2b)$

$f(b) + 3 = f(3b)$

$3,14 \cdot 5 = 15,70$

$S_{кр} = \pi R^2$

xy $\frac{1}{y^2}$ $f(^1$



$AB = x$ $\quad HD = \frac{12}{x}$

~~BD~~

$\frac{CD}{\sin 2\alpha} = \frac{4}{\sin 2\alpha} \Rightarrow CD = \frac{\sin 4\alpha \cdot 4}{\sin 2\alpha}$

$\frac{CH}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin 1} \Rightarrow CH = AC \sin\alpha$

$\frac{AB}{1} = \frac{AC}{2\sin\alpha} \Rightarrow AB = \frac{AC}{2\sin\alpha}$

$\sin\alpha = \frac{AB \cdot AD \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{AC \cdot 2\sin\alpha \cdot AD \cdot 2\sin\alpha}{2}$

$\frac{AB}{CH} = \frac{AC}{2\sin\alpha \cdot AC \cdot \sin\alpha} =$

$\Rightarrow AC \cdot \sin\alpha \cdot AD = 6$

$2\sin^2\alpha = \frac{6}{AC \cdot AD}$

$\frac{BC}{CH} = \frac{1}{2 \cdot \sin\alpha}$

$4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 48 + 12 = 60 = 2\sqrt{15} \cdot \frac{1}{3} =$ $\quad \cos 120 = -\frac{1}{2} \Rightarrow 32 + 16 = 48 = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$

$= \frac{2\sqrt{15}}{3} \cdot 4\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{5}}{3} = 2\sqrt{5}$

$2\sin\alpha^2 = \sin 2\alpha$

$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$\sqrt{32 + 16\cos 2}$

$\alpha = 30 \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$

$32 + 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 32 + 8\sqrt{3} = 2\sqrt{8 + 2\sqrt{3}} =$ $\quad \frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$

$\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{2}$

30 45 60

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{2}{4} \cdot 2 = 1$

$\sin\alpha = \cos\alpha$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$