МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство
$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30°$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе
$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

рассмотрим числитель.

$x^2-6x+10-2|x-3| = x^2-6x+9-2|x-3|+1 =$

$= (x-3)^2-2|x-3|+1 = |x-3|^2-2|x-3|+1 =$

$= (|x-3|-1)^2$ т.е числитель всегда ≥ 0 т.е $|x-3|=1$; $x=4$ или $x=2$

$2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|<0$

x: $-$ $+$ $+$

$x-2$: $-$ 0 $-$ 2 $+$

если $x\ge 2$, то $2x^2-4x+x^2-2x<0$

$3x^2-6x<0$; $x^2-2x<0$; $\begin{cases} x\cdot(x-2)<0 \\ x\ge 2 \end{cases}$ $\varnothing$

если если $0\le x<2$ $2x^2-4x+x(2-x)<0$;

$2x^2-4x+2x-x^2<0$; $x^2-2x<0$; $\begin{cases} x\cdot(x-2)<0 \\ 0\le x<2 \end{cases}$ т.е

$0<x<2$

если $x<0$, то $2x^2-4x-x(2-x)<0$;

$2x^2-4x+x^2-2x<0$; $x^2-2x<0$; $\begin{cases} x\cdot(x-2)<0 \\ x<0 \end{cases}$ $\varnothing$

Отв: $x\in(0;2]\cup\{4\}$

$-1.$ $$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

$y^2\cdot(y^2+5y-6)$

y^2+5y-6

~~$y=3;\ y=2$~~

$y=-6;\ y=1$

$$\frac{(x-3)^2-2|x-3|+1}{2x\cdot(x-2)+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

$|x-3|^2-2|x-3|+1=(|x-3|-1)^2$

$y^2\cdot(y+6)=25$

$y^3+2y^2+4y^2-25=0$

~~$(|x-3|-1)^2$~~

т. е

~~$2x\cdot(x-2)$~~ $2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|\vee 0$

$y^2\cdot(y+1)+(2y-5)$

$2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|\le 0$

$x-2$ | $-$ $-$ $+$

x | $-$ 0 $+$ 2 $+$

$y=-5$

~~$x<2$~~ $x\ge 2$

$2x^2-4x+x^2-2x\ \vee 0$

$3x^2-6x\ \vee 0$

$x^2-2x\ \vee 0$

$x\cdot(x-2)>0$ т. к $x\ge 2$

$0\le x<2$

$2x^2-4x+x\cdot(2-x)\ \vee 0$

$2x^2-4x+2x-x^2\ \vee 0$

$x^2-2x\ \vee 0$

$x\cdot(x-2)\ \vee 0$

$x=y=-\frac{1+\sqrt{21}}{2}$

$-y=|y|$

~ 3

$x-2y=\sqrt{xy}$

$x+y^2=5;\ y^2=$

$x-2y=\sqrt{xy}\ \uparrow^2$ $x=5-y^2$

$x^2-4xy+4y^2=xy$

$x^2-5xy+4y^2=0$

$25-10y^2+y^4-5y\cdot(5-y^2)+4y^2=0$

$25\underset{\sim}{-10y^2}+y^4-25y+\underset{\sim}{5y^2}+\underset{\sim}{4y^2}=0$

$y^4-y^2-25y+25=0$

$y^2\cdot(y^2-1)-25(y-1)=0;$

$y^2\cdot(y-1)(y+1)-25(y-1)=0;\ (y-1)\cdot(y^3-y^2-25)=0$

$y=1$ или $y^3-y^2-25=0;\ y^2\cdot(y-1)=25;\ |y|\cdot\sqrt{y-1}=|5|$

☑ черновик ☐ чистовик

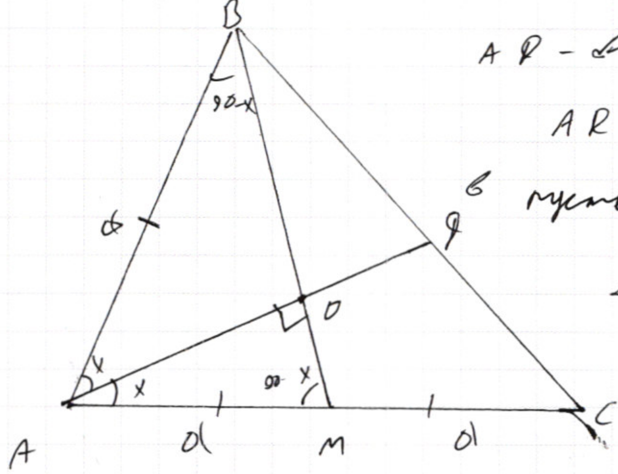
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 2.



AQ - биссектриса; BM - медиана и
AQ ⊥ BM
пусть ∠OAM = x тогда
∠AMB = 90 - x и ∠ABM = 90 - x,
т.е △ABM равнобед. т.е
AM = MC = AB = d пусть
BC = b. тогда

$3d + b = 600$

$AC + AB > BC$; $3d > b$

$AB + BC > AC$; $d + b > 2d$; $b > d$

т.е мы получили систему

$\begin{cases} 1) \; 3d + b = 600 \\ 2) \; 3d > b \\ 3) \; b > d \end{cases}$, где d и $b \in \mathbb{Z}$

$6d > 600$; $d > 100$ — подставим 1) в 3)

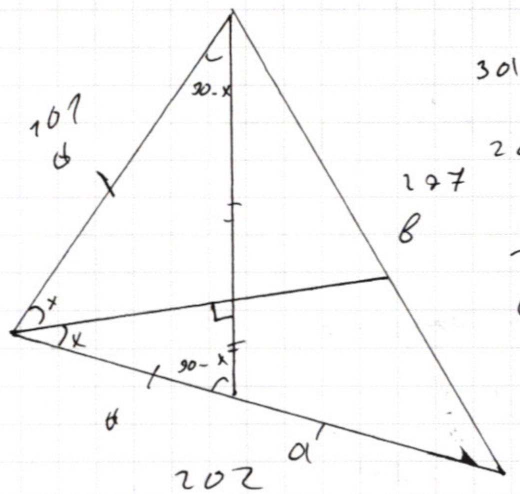
$4d < 600$; $d < 150$ — 2) в 3)

т.е $\begin{cases} d > 100 \\ d < 150 \end{cases}$ т.е количество таких треугольников равно

кол. чисел от 101 до 149 включительно, а это 49

Отв: 49

№ 2.



$3\alpha + \beta = 600$

$2\alpha \cancel{\leq} \alpha + \beta$; $\alpha < \beta$

$3\alpha > \beta$

$\beta \vdots 3$

$$\begin{cases} \beta > \alpha \\ 3\alpha > \beta \\ \beta \vdots 3 \\ 3\alpha + \beta = 600 \end{cases}$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9

1 9

$6\alpha > 600$; $\alpha > 100$

$8\alpha < 600$; $\alpha < 150$

т.е количество треугольников от 101 ... до 149

Отв: 49.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5\ ;\ x=5-y^2 \end{cases}$$ где $xy\geq 0$ и $x-2y\geq 0$; $x\geq 2y$

$x^2-4xy+4y^2=xy$; $x^2-5xy+4y^2=0$ подставим $x=5-y^2$

$y^4+25-10y^2-5y\cdot(5-y^2)+4y^2=0$;

$25-10y^2+y^4-25y+5y^3+4y^2=0$

$y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0$

$y^2\cdot(y^2+5y-6)-25(y-1)=0$

$y^2\cdot(y+6)\cdot(y-1)-25(y-1)=0$

$(y-1)\cdot(y^3+6y^2-25)=0$

$y=1$ или $y^3+6y^2-25=0$

$x=4$ можно увидеть, что $y=-5$ т.е $x=-20$,

но тогда $x-2y=-20+10=-10$, а $x-2y\geq 0$

~~т.к $xy\geq 0$ и $x=5-y^2$, то $5y-y^3\geq 0$; $y^3-5y\leq 0$~~

~~$(y^3-5y)+(6y^2+5y-25)=0$~~

~~$6y^2+5y-25=$~~

~~т.е $2y^3+6y^2-25$~~

$$\begin{array}{r|l} y^3+6y^2-25 & y+5 \\ -\ y^3+5y^2 & \overline{y^2+y-5} \\ \hline y^2-25 & \\ -\ y^2+5y & \\ \hline -5y-25 & \\ -\ -5y-25 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

т.е $y^3+6y^2-25=(y+5)\cdot(y^2+y-5)=0$

т.е $y=-5$ или $y^2+y-5=0$; $D=1+5\cdot4=21$

$\ominus$

$y=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$ прод

прод

$y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$ т.е

$x=5-\frac{1-2\sqrt{21}+21}{4}=5-5,5+\frac{\sqrt{21}}{4}=$

$=\frac{\sqrt{21}-2}{4}$

$\frac{\sqrt{21}-2}{4}-\sqrt{21}+1=\frac{2-3\sqrt{21}}{4}<0$

$\ominus$

$y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$

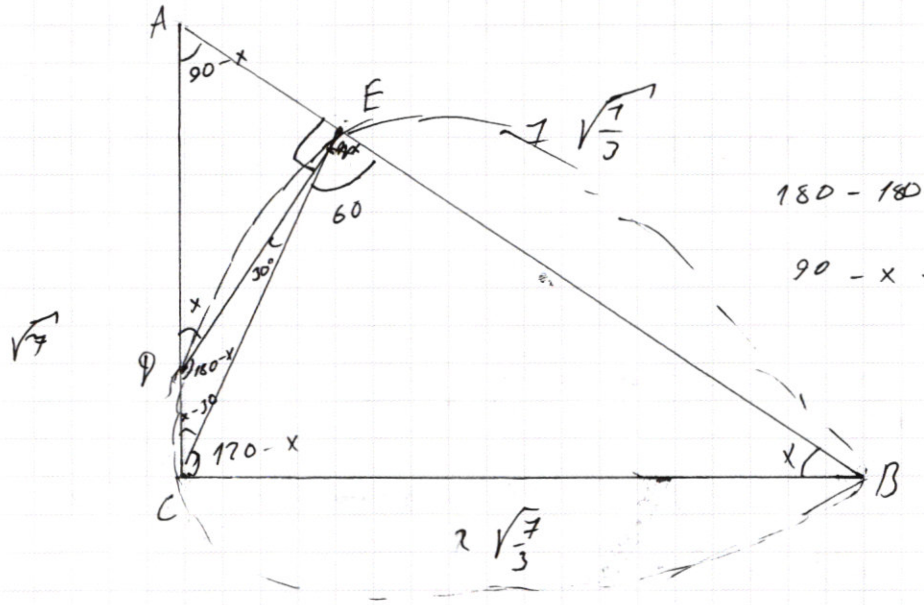
$x=5-\frac{1+2\sqrt{21}+21}{4}=\frac{-2-2\sqrt{21}}{4}=$

$=-\frac{1+\sqrt{21}}{2}$; $-\frac{1+\sqrt{21}}{2}+\frac{1+\sqrt{21}}{2}\geq 0$

~~$-\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)+\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)^2\geq 0$~~

Отв: $x=4, y=1$; $x=-\frac{1+\sqrt{21}}{2}=y$

№6.



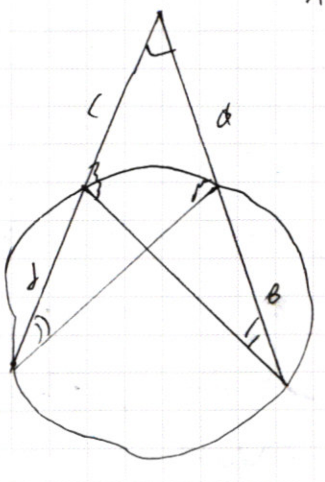
$180 - 180 + x - 30 = x - 30$

$90 - x + 30 = 120 - x$

$AB^2 = 7 + 4\cdot\frac{7}{3} = 7 + \frac{28}{3} = \frac{49}{3}$

$AB = 7\sqrt{\frac{1}{3}}$

заметим $\frac{AФ}{AB} = \frac{AE}{AC}$



$\frac{d+c}{a+b} = \frac{a}{c}$

$dc + c^2 = a^2 + ba$

$a^2 - c^2 = dc - ba$

~~$AФ^2 +$~~

$AФ^2 + AФ\cdot ФC = AE^2 + AE\cdot EB$

$AФ^2 - AE^2 = ФE^2$

$ФE^2 = AE\cdot EФ - AФ\cdot ФC$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6.

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4 \\ x^2+y^2-2x-4y\le 0 \end{cases}$$ – это урав. окружности с центром в $x_0=1$ и $y_0=2$ и $R=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

т.е $x^2+y^2-2x-4y$; $(x-1)^2+(y-2)^2=5$

построим график $|2x|+|y|+|4-2x-y|=4$

$x=0$; $|y|+|4-y|=4$; $y\in[0;4]$

$y=0$ $|2x|+|4-2x|=4$; $x\in[0;2]$

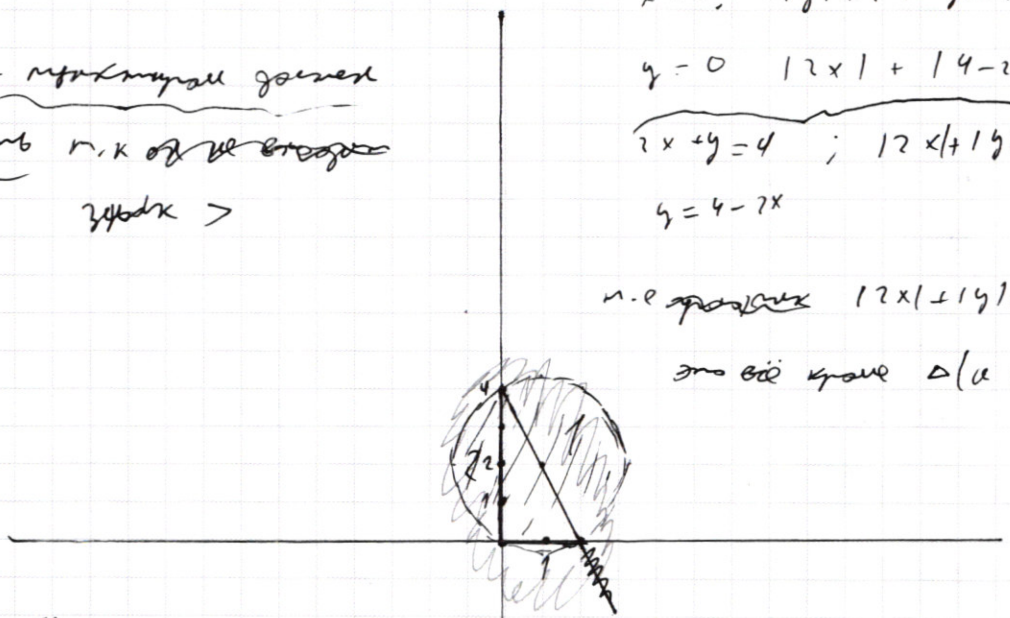
$2x+y=4$; $|2x|+|y|=4$

$y=4-2x$

т.е ~~график~~ $|2x|+|y|+|4-2x-y|>4$

это всё кроме Δ (и внутри неподход. им)

Δ – треугольник должен быть т.к ~~он не входит~~ знак $>$



найдём площадь закрашенной фигуры

часть 1. $S_1=\dfrac{\pi\cdot 5}{2}=2{,}5\pi$

часть 2. $S_2=\dfrac{\pi\cdot\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5}-1)}{2}=$

$=\dfrac{5\pi-\sqrt{5}\pi}{2}$ т.е

$S_\Sigma=2{,}5\pi+2{,}5\pi-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\pi=$

$=\pi\cdot\left(5-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$

часть 2 $S_2=\dfrac{\pi\cdot 2\cdot(\sqrt{5}-1)}{2}=$

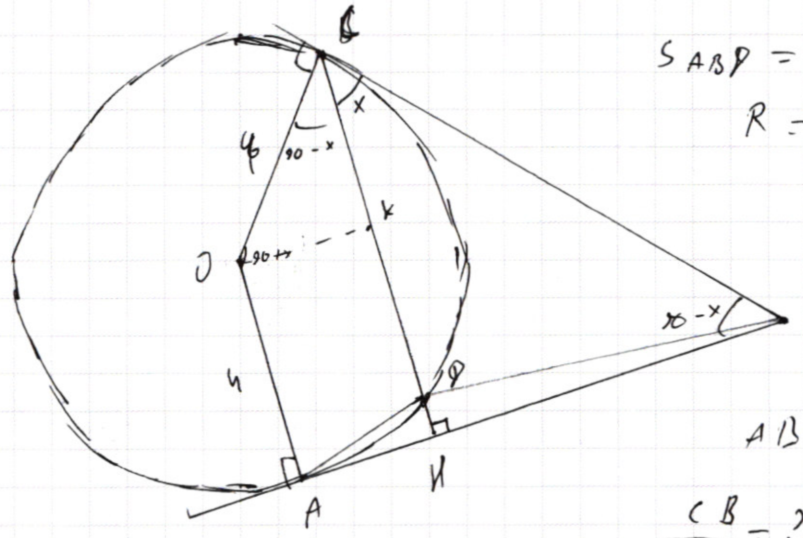
$=\pi\cdot(\sqrt{5}-1)$

$S_\Sigma=2{,}5\pi+\pi\cdot(\sqrt{5}-1)=$

$=\pi\cdot(\sqrt{5}+1{,}5)$

Ответ: $S=\pi\cdot(\sqrt{5}+1{,}5)$

№ 4.



$S_{ABD} = 6$

$R = 4$

$\frac{AB}{CH} = ?$

$AB \cdot DH = 12$

$CB \cdot DH = 12$

$AB = CB$

$\frac{CB}{CH} = ?$;

$CH = 4 + 4\cos(90-x)\gamma$; $\frac{CH-4}{4} = \cos\gamma$

$\cos 90 - x = \frac{HB}{CB}$; $CH = 4 + 4\frac{HB}{CB}$

$\sin\gamma = \frac{CH}{CB}$

$\frac{(CH-4)^2}{16} + \frac{CH^2}{CB^2} = 1 \quad | \cdot 16CB^2$

$\cancel{16CH^2 - 8 \cdot 16 \cdot CH + 16^2}$

$CH^2 \cdot CB^2 - 8CH \cdot CB^2 + \cancel{16CB^2} + 16CH^2 = \cancel{16CB^2}$

$CH^2 \cdot CB^2 - 8CH \cdot CB^2 + 16CH^2 = 0$

$CH \cdot CB^2 - 8CB^2 + 16CH = 0$

$CB^2 \cdot (CH - 8) + 16CH = 0$

$y^3 - 5y \le 0$

$y \cdot (y^2 - 5) \le 0$

$2y \le 5 - y^2$; $y^2 + 2y - 5 \le 0$ $\quad y \cdot (y - \sqrt{5}) \cdot (y + \sqrt{5}) \le 0$

$-\quad +\quad -\quad +$

$-\sqrt{5} \quad 0 \quad \sqrt{5}$

$x + x^2 = 5$

$D = 24$

$x^2 + x - 5 = 0$ $\quad 5 - 2y - y^2 \ge 0$; $y^2 + 2y - 5 \le 0$

$D = 1 + 20 = \sqrt{21}$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$ $\quad 5y - y^3 \ge 0$; $y^3 - 5y \le 0$

$6y^2 + 5y - 25$

$D = 25 + 4 \cdot 25 \cdot 6 = 625 = 25^2$ $\quad y = \frac{-5 \pm 25}{12}$;

$+\quad -\quad +$

$-\frac{5}{2} \quad \frac{5}{3}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 7

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = p$

Все простые x не подходят, покажем ниже почему

$x=1$; $f(1) = f(1)+f(1)$ т.е $f(1)=0$ т.е $\ominus$

$x=2$; $f(2) = 2$; но $f\left(\frac{4}{4}\right) = f(1) = 0$ $\ominus$

$x=3$; $f(3)=3$ $\ominus$

$x=4$; $f(4) = 2f(2) = 4$ $\ominus$

$x=5$; $f(5)=5$ $\ominus$

$x=6$; $f(6) = f(2)+f(3) = 5$; $f\left(\frac{6}{5}\right) = f(6) + f\left(\frac{1}{5}\right) = 0$ $\ominus$

$f(1) = f(5) + f\left(\frac{1}{5}\right)$; $0 = 5 + f\left(\frac{1}{5}\right)$ т.е $f\left(\frac{1}{5}\right) = -5$

~~$x=7$~~; $x=8$; $f(8) = f(4)+f(2) = 6$

$f(1) = f(6) + f\left(\frac{1}{6}\right)$; $0 = 5 + f\left(\frac{1}{6}\right)$; $f\left(\frac{1}{6}\right) = -5$

$f\left(\frac{8}{6}\right) = f(8) + f\left(\frac{1}{6}\right) = 6-5 = 1$ $\ominus$

$x=9$ $f(9) = 2f(3) = 6$; $f\left(\frac{9}{6}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right)$

$f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2)$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = -2$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = f(3) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 3-2 = +1$ $\ominus$ ~~т.к~~ ~~$\ldots$~~ $=6$

$x=10$ $f(10) = f(2)+f(5) = 7$; $f\left(\frac{10}{7}\right)$

$f(1) = f(7) + f\left(\frac{1}{7}\right)$; $f\left(\frac{1}{7}\right) = -7$

$f\left(\frac{10}{7}\right) = f(10) + f\left(\frac{1}{7}\right) = 0$ $\ominus$

$x=12$ $f(12) = f(3)+f(4) = 7$; $f\left(\frac{12}{7}\right) = f(12) + f\left(\frac{1}{7}\right) = 0$ $\ominus$

$x=14$ $f(14) = f(2)+f(7) = 9$; $f\left(\frac{14}{9}\right)$

$f(1) = f\left(\frac{1}{9}\right) + f(9)$; $f\left(\frac{1}{9}\right) = -6$; $f\left(\frac{14}{9}\right) = 9-6 = 3$ $\ominus$

прод $\rightarrow$

~ 1 прод.

$\underline{x=15}$ $f(15)=f(3)+f(5)=8$; $f(\frac{15}{8})$

$f(1)=f(8)+f(\frac{1}{8})$; $f(\frac{1}{8})=-6$

$f(\frac{15}{8})=f(15)+f(\frac{1}{8})=8-6=2$ ⊖

$\underline{x=16}$; $f(16)=2+f(4)=8$; $f(\frac{16}{8})=f(2)=2$ ⊖

$\underline{x=18}$; $f(18)=f(2)+f(9)=8$; $f(\frac{18}{8})=f(\frac{1}{8})+f(18)=$

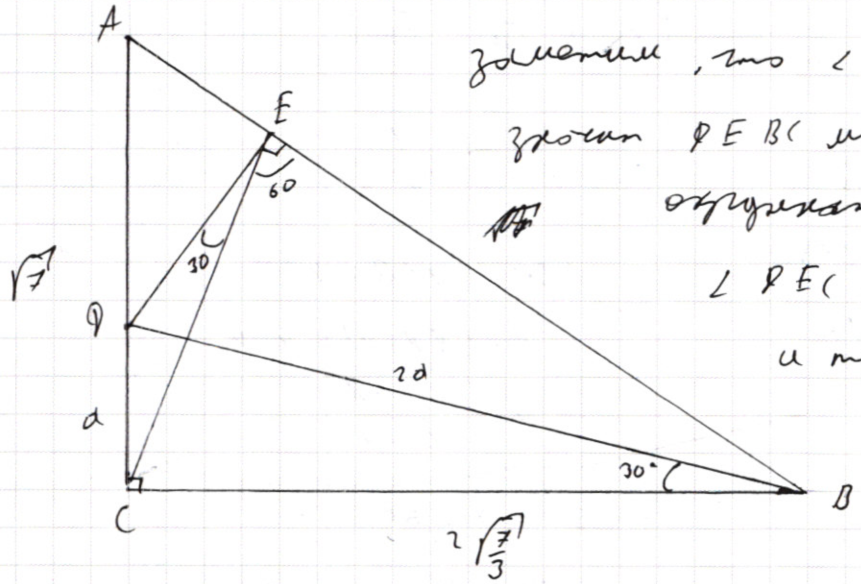
$f(\frac{1}{8})=-6$ $\qquad\qquad = -6+8=2$ ⊖

~~Отв: Всего пар 1, и это $x=2$; $y=6$.~~

Отв: таких пар не существует

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.



Заметим, что $\angle BED = \angle DCB = 90°$ значит $DEBC$ можно вписать в окружность и $\angle DBC$ и $\angle DEC$ опираются на одну и туже дугу $\cup DC$ значит $\angle DBC = 30°$

т.к $\angle DBC = 30°$, то $2DC = DB = 2d$ т.е

по т. Пифагора $4d^2 = d^2 + 4\cdot\frac{7}{3} \quad |\cdot 3$; $9d^2 = 28$

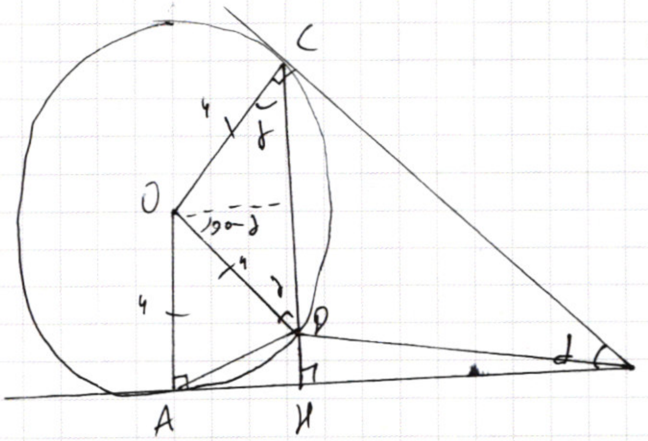
$d = \sqrt{\frac{28}{9}} = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

т.е $DC = \frac{2\sqrt{7}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{7}$

$AD = AC - DC = \sqrt{7} - \frac{2}{3}\sqrt{7} = \frac{1}{3}\sqrt{7}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{3}$

Отв: $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$



$AB = CB$, т.е. $\frac{CB}{CH} = ?$

$S_{ABD} = 6$

$4\cdot\cos\gamma + 4 = CH$; $\cos\gamma = \frac{CH-4}{4}$

$\frac{CB}{CH} = \frac{1}{\cos\gamma}$

$\frac{CB}{CH} = \frac{4}{CH-4}$

$CB\cdot CH - 4CB = 4CH$

$CB\cdot(CH-4) = 4CH$

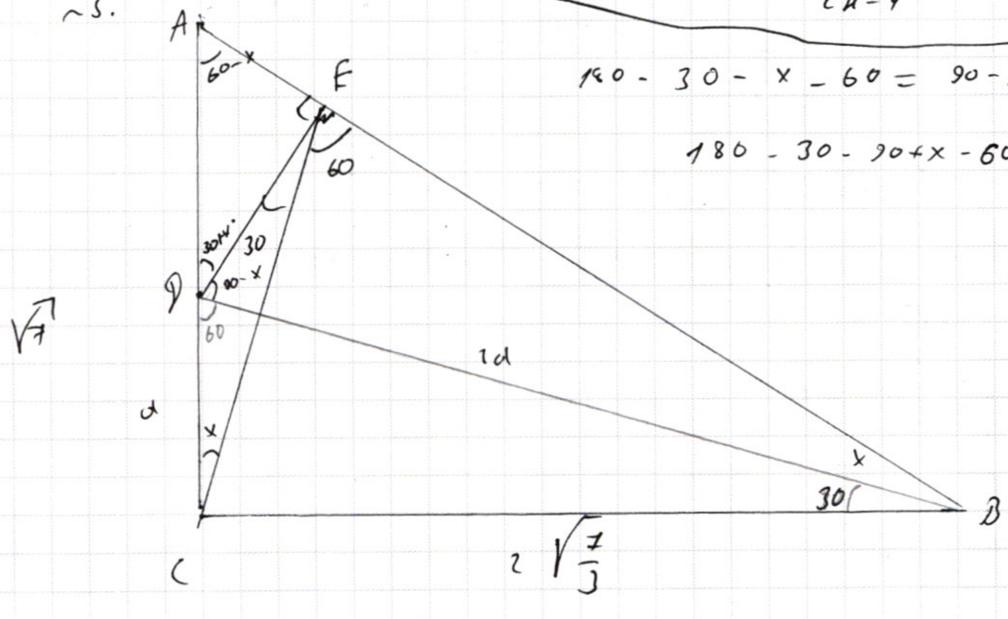
$CB = \frac{4CH}{CH-4}$

$CB\cdot DH = 12$ из S

$DH = 4 - \cos\gamma$

$(4-\cos\gamma)\cdot CB = 12$

№5.



$180 - 30 - x - 60 = 90 - x$

$180 - 30 - 90 + x - 60$

$\sqrt{7}$

$4d^2 = d^2 + 4\cdot\frac{7}{3}$

$3d^2 = 4\cdot\frac{7}{3}$

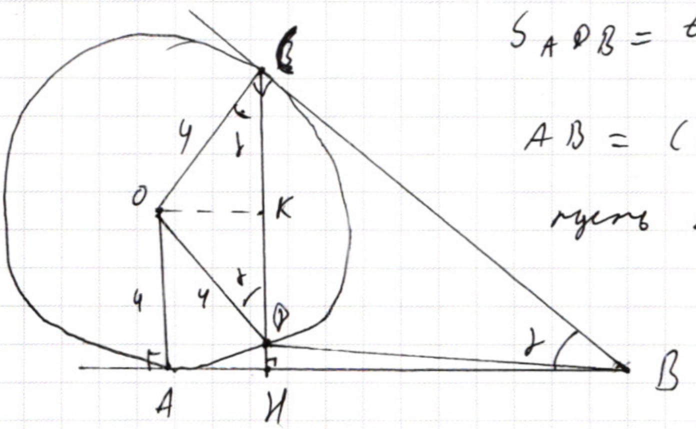
$9d^2 = 28$; $d = \sqrt{\frac{28}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{7}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №4.



$S_{AФB} = 6$ т.е $ФH \cdot AB = 12$

$AB = CB$ т.к это касательные

пусть $\angle B = \gamma$, тогда $\angle OCФ = \gamma$

и $\angle OФC = \gamma$

$4 = OA = KH = 4 \cdot \cos\gamma + ФH$ т.е $ФH = 4 - 4\cdot\cos\gamma$

$CB \cdot (4 - 4\cdot\cos\gamma) = 12$

$CB\cdot(1-\cos\gamma) = 3$; $CB = \frac{3}{1-\cos\gamma}$.

$CH = 4\cdot\cos\gamma + 4$ ~~и cos γ =~~

$CH = 4\cdot(\cos\gamma + 1)$

$\frac{CB}{CH} = \frac{\frac{3}{1-\cos\gamma}}{4(\cos\gamma+1)} = \frac{3}{4\cdot(-\cos^2\gamma+1)} = \frac{3}{4\cdot\sin^2\gamma}$, а

$\sin\gamma = \frac{CH}{CB}$ т.е $\frac{CB}{CH} = \frac{3}{4}\frac{CB^2}{CH^2}$; $\frac{CB}{CH}\cdot\frac{3}{4} = 1$ т.е

$\frac{1}{\sin^2\gamma} = \frac{CB^2}{CH^2}$

$\frac{CB}{CH} = \frac{4}{3}$ т.е $\frac{AB}{CH} = \frac{4}{3}$

Отв: $\frac{AB}{CH} = \frac{4}{3}$