МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45°$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 1.

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\le 0.$$

Раскроем модули в 4 случаях:

I. $x\in(-\infty;0]$.

$$\frac{x^2-2x+5+4x-4}{4x^2-12x+x^2-3x}\le 0.$$

$$\frac{(x+1)^2}{5x(x-5)}\le 0. \Rightarrow x\in\{-1\}.$$

II. $x\in(0;1]$.

$$\frac{x^2-2x+5+4x-4}{4x^2-12x-x^2+3x}\le 0.$$

$$\frac{(x-1)^2}{3x(x-3)}\le 0 \Rightarrow x\in(0;1].$$

III. $x\in(1;3]$.

$$\frac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-12x-x^2+3x}\le 0.$$

$$\frac{(x^{\cancel{2}}-3)^2}{3x(x-3)}\le 0. \Rightarrow x\in(1;3).$$

IV. $x\in(3;+\infty)$.

$$\cancel{\frac{(x-3)^2}{5x}} \quad \frac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-12x+x^2-3x}\le 0.$$

$$\frac{(x-3)^2}{5x(x-3)}\le 0. \Rightarrow x\in\varnothing.$$

В итоге:

$x\in(0;3)\cup\{-1\}$.

Ответ: $x\in(0;3)\cup\{-1\}$.

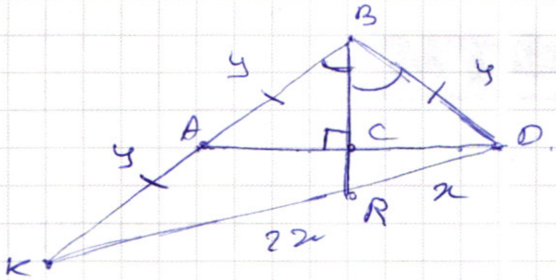
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1

(Нумеровать только чистовики)

Задача 2.



Решение:

1) $\triangle ABC = \triangle BCP \Rightarrow$

$\Rightarrow KA = AB = BP = y$

2) По св. бисс. $\frac{KR}{RP} = \cancel{\frac{2}{1}} \frac{KB}{BP} = \frac{2}{1} = \frac{2x}{x}$.

3). Запишем неравенства для треугольника:

$3y > 3x \Rightarrow y > x$, $3x + y > 2y \Rightarrow 3x > y$.

и по условию:

~~x+y>100~~ $3(x+y) = 300 \Rightarrow x + y = 100$.

Отсюда $y > 50$ (т.к. при $y \le 50$, $x \ge 50 \Rightarrow x \ge y$)

и $y < 75$ (т.к. при $y \ge 75$, $x \le 25 \Rightarrow 3x \le y$), y принимает значения от 51 до 74 и каждому y имеется свой x, равный $100 - y$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ всего вариантов $74 - 51 + 1 = 24$.

Ответ: 24.

Задача 3.

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} & (1) \\ 2y + x^2 = 9. & (2) \end{cases} \Rightarrow (2)\ y = \frac{9 - x^2}{2}.$$

Подставим в (1):

$$\frac{9 - x^2}{2} - 2x = \sqrt{\frac{x(3-x)(x+3)}{2}} \quad \Big| \cdot 2$$

$$9 - x^2 - 4x = \sqrt{-2x(x-3)(x+3)}$$

Возведём в квадрат с соблюдением ОДЗ:

ОДЗ: $\begin{cases} x(x-3)(x+3) \le 0 \\ -(x^2 + 4x - 9) \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-3)(x+3) \le 0 \\ x^2 + 4x - 9 \le 0 \end{cases}$

$\longrightarrow$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Возведение в квадрат:

$x^4+16x^2+81+8x^3-18x^2-72x = 18x \cancel{-2x^3} - 2x^3.$

$x^4+10x^3-2x^2-90x+81=0$, $x=1$ — один из корней (подходит по ОДЗ)

$$
\begin{array}{l|l}
x^4+10x^3-2x^2-90x+81 & x-1 \\
\underline{x^4-x^3} & x^3+11x^2+9x-81 \\
\quad 11x^3-2x^2 & \\
\quad \underline{11x^3-11x^2} & \\
\qquad 9x^2-90x & \\
\qquad \underline{9x^2-9x} & \\
\qquad\quad -81x+81 & \\
\qquad\quad \underline{-81x+81} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow \cancel{(x-3)(x+3)}$

$11x^2+9x-81.$

~~$f(x)=x^3+11x^2+9x-81$ — монотонно возрастающая функция~~ Вернёмся к ОДЗ:

$$\begin{cases} x(x-3)(x+3)\le 0 \\ x^2+4x-9\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-3]\cup[0;3] \\ x\in\left[-2-\sqrt{13};\ -2+\sqrt{13}\right] \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x\in[-2-\sqrt{13};-3]\cup[0;-2+\sqrt{13}].$

~~$\Rightarrow x\in\left[-3;\frac{-2-\sqrt{13}}{2}\right]\cup\left[\ \ \right]$ $x\in\left[0;\frac{-2+\sqrt{13}}{2}\right]$~~

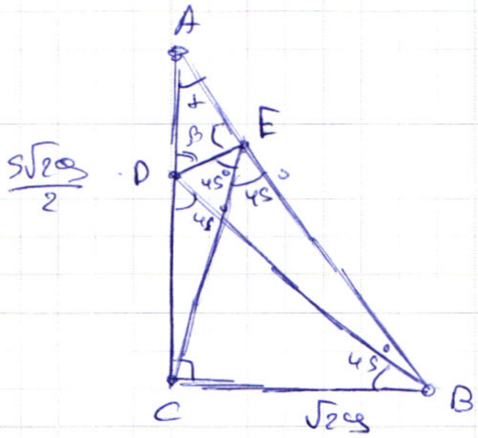
~~При $x\le\frac{-2+\sqrt{13}}{2}\le 1$ $f(1)<0\Rightarrow$ при всех остальных x, подходящих ОДЗ значение также (т.к. $f(1)$ — максимально возможное значение функции на ОДЗ) будет меньше 0. Значит, $x=1$ единственный корень и $y=\frac{9-x^2}{2}=4$. Ответ: $(1;4)$.~~

Продолжение задачи на странице № 8.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 3 (Нумеровать только чистовики)

Задание 5.



Решение:

~~Т.к.~~ $\angle DEC = 90°$; $\angle CED = 45°$.

1) $\angle ACB + \angle DEB = 180°$ =>

=> CDEB можно вписать в окружность (впишем его).

2) $\angle DEC = \angle DBC = 45°$, т.к. они опираются на одну хорду и являются вписанными углами.

Аналогично $\angle CDB = \angle CEB = 45°$.

3) В итоге $\triangle CDB$ – равнобедренный и $CD = CB = \sqrt{29}$ =>

=> $AD = AC - CD = 2,5\sqrt{29} - \sqrt{29} = 1,5\sqrt{29}$ и $\frac{AD}{AC} = \frac{1,5\sqrt{29}}{2,5\sqrt{29}} = \frac{3}{5}$.

4) $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{6,25 \cdot 29 + 29} = \sqrt{7,25 \cdot 29} = \sqrt{\frac{29}{4} \cdot 29} = \frac{29}{2}$.

5) $\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ABC}} = k^2$ (т.к. они подобны по 2-м $\angle$).

6) $k = \frac{AD}{AB} = \frac{1,5\sqrt{29}}{29} \cdot 2 = \frac{3\sqrt{29}}{29}$

$k^2 = \frac{9 \cdot 29}{29^2} = \frac{9}{29}$. Таким образом,

$S_{\triangle AED} = \frac{9 \cdot S_{\triangle ABC}}{29} = \frac{5 \cdot 29 \cdot 9}{4 \cdot 29} = \frac{45}{4} = 11,25$.

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$; $S_{\triangle AED} = 11,25$.

~~Задание~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

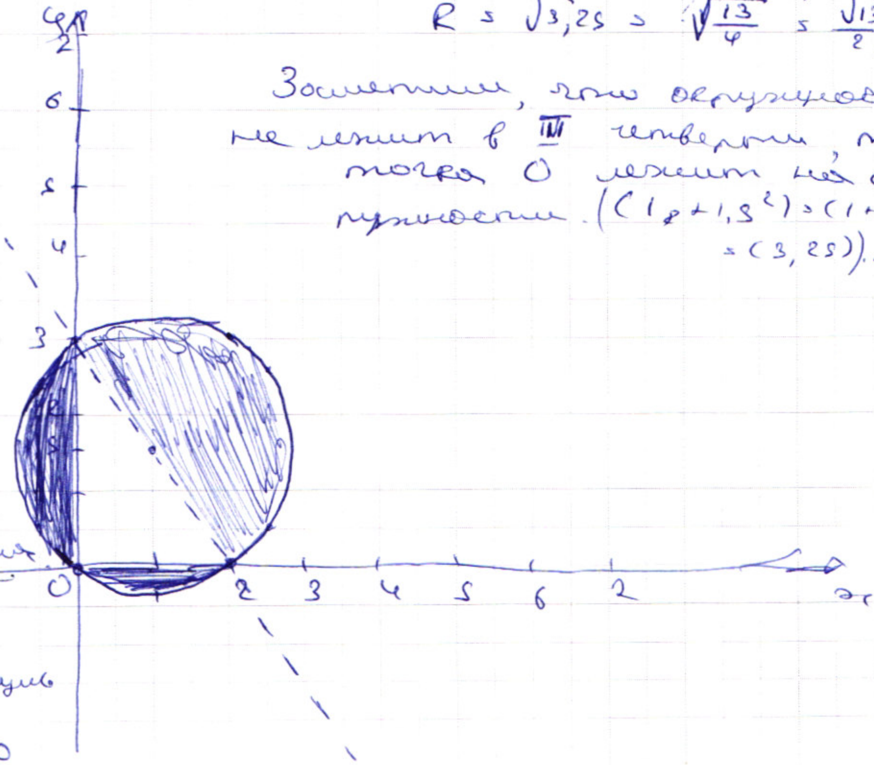
~~3~~ Задание 6.

① $\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6 \\ x^2-2x-3y+y^2\le 0. \end{cases}$ ②

②. $x^2-2x-3y+y^2 = x^2-2x+1+y^2-3y+2,25-1-2,25 =$
$= (x-1)^2+(y-1,5)^2-3,25 \le 0.$

$(x-1)^2+(y-1,5)^2 \le 3,25.$ ← ур-ие окружности с ц. в точке $(1; 1,5)$.
$R = \sqrt{3,25} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$

Заметим, что окружность не лежит в III четверти, т.к. точка O лежит на окружности. $((1^2+1,5^2)=(1+2,25)=(3,25))$.



① 1) $6-3x-2y>0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y<3-1,5x.$
2) $6-3x-2y<0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y>3-1,5x.$

Раскрываем по четвертям:

в I:
1) $3x+2y+6-3x-2y>6$
$6>6$ – не подх.
2) $3x+2y-6+3x+2y>6$
$4y+6x>12.$
$y>3-1,5x$ – подх, по ~~...~~ условию раскрытия модуля

во II и IV четвертях
~~2~~ ~~4~~. третий модуль ~~3x+2y~~ раскрывается только с плюсом т.к. $y<3-1,5x$.

во II:
$-3x+2y+6-3x-2y>6$
$-6x>0$
$x<0$ – подходит.

в IV:
$3x-2y+6-3x-2y>6$
$-4y>0$
$y<0$ – подходит.

В итоге $S = \pi r^2 - \frac{2\cdot 3}{2} = \pi r^2 - 3 = 3,25\pi - 3.$

Ответ: $S = 3,25\pi - 3.$

Задание 7.

$3 \leq x \leq 19$. $3 \leq y \leq 19$. $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$.

Пусть p - ~~просто~~ произвольное простое число, n - натуральное число).
Тогда

$f(p) = f\left(\frac{n \cdot p}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) + f(n \cdot p) = f\left(\frac{1}{n}\right) + f(n) + f(p) =$

$= f(p)$. $\Rightarrow f(n) = -f\left(\frac{1}{n}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(y) > f(x)$. $x, y \in N$.

Пусть ~~Если~~ $m \in N$. а ~~т~~ Тогда его можно записать в виде $p_1^{q_1} \cdot p_2^{q_2} \cdot p_3^{q_3} \dots \cdot p_n^{q_n}$ ~~Є~~ p и тогда

$f(m) = p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 + p_3 \cdot q_3 + \dots + p_n q_n$. В таком случае рассмотрим $f(j)$, где j принимает все значения от 3 до 19:

$f(3) = 3$. $f(6) = 5$. $f(9) = 6$ $f(12) = 7$

$f(4) = 4$ $f(7) = 7$. $f(10) = 7$. $f(13) = 13$.

$f(5) = 5$. $f(8) = 6$ $f(11) = 11$ $f(14) = 9$.

$f(15) = 8$. $f(18) = 8$.

$f(16) = 8$. $f(19) = 19$.

$f(17) = 17$

Расположим ~~8~~ 17 данных чисел в порядке возрастания:

3, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 11, 13, 17, 19.

Витоге: При $f(y) = 3$ нет возм. x.

При $f(y) = 4$, есть 1 возможное значение x. и 1 для y.

При $f(y) = 5$, есть 2 возм. x и 2 возм. y.

При $f(y) = 6$, 2 знач. y и 4 для x →

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При $f(y)=7$ есть 3 возм. знач. для y и 6 для x.

При $f(y)=8$ — 3 для y и 9 для x.

При $f(y)=9$ — 1 для y и ~~10~~ 12 для x.

При $f(y)=11$ — 1 для y и 13 для x.

При $f(y)=13$ — 1 для y и 14 для x.

При $f(y)=17$ — 1 для y и 15 для x.

При $f(y)=19$ — 1 для y и 16 для x.

Осталось посчитать общее число:

$1+2\cdot2+2\cdot4+3\cdot6+3\cdot9+12+13+14+15+16=$

$=$ ~~122~~ 128.

Ответ: 128.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Продолжение задачи № 3.

$f(x) = x^3 + 11x^2 - 9x - 81$ — монотонная возрастающая функция. При ~~$x \geq 3$~~ ~~...~~ $f(2) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ при всех допустимых x функция будет принимать отрицательное значение, т.к. $max(x) = -2 + \sqrt{13} < 2$. $\Rightarrow x = 1$ — единственный ~~...~~ корень. $y = \frac{9 - x^2}{2} = \frac{8}{2} = 4$.

Ответ: $(1; 4)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\leq 0.$$

4 При случая:

I. $x\in(-\infty;0)$;

$$\frac{x^2-2x+5+4x-4}{4x^2-12x+x^2-3x}\leq 0.$$

$$\frac{x^2+2x+1}{5x^2-15x}\leq 0.$$

$$\frac{(x+1)^2}{5x(x-3)}\leq 0.$$

$x=-1$.

$x\in(0;3)$

$x\neq 0$

$x\neq 3$

II. $x\in(0;1]$.

$$\frac{x^2-2x+5+4x-4}{4x^2-12x-x^2+3x}\leq 0$$

$$\frac{(x+1)^2}{3x^2-9x}\leq 0.$$

$$\frac{(x+1)^2}{3x(x-3)}\leq 0.$$

$x\in$ ~~(0;3)~~ $(0;1]$.

III При $x\in(1;3]$.

$$\frac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-12x-x^2+3x}\leq 0.$$

$$\frac{x^2-6x+9}{3x(x-3)}\leq 0.$$

$$\frac{(x-3)^2}{3x(x-3)}\leq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x\in(1;3)$.

IV. При $x\in(3;+\infty)$:

$$\frac{(x-3)^2}{5x(x-3)}\leq 0.\quad x\in\varnothing.$$

Ответ: $x\in(0;3)\cup\{-1\}$.

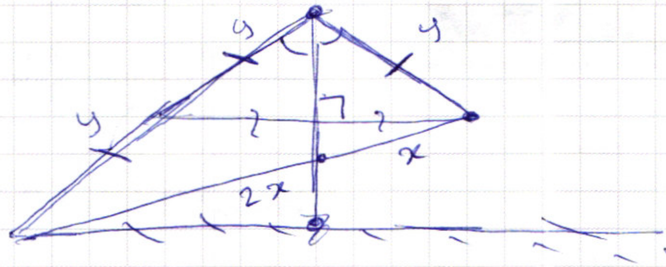
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

Задача 2.



$3x+3y=300$.

$x+y=100$.

x, y - ц. числа.

По неравенству:

$y>x$.

$3x+y>2y$.

$3x>y$.

$x+y=100 \Rightarrow$ ① . $y>50$. $y<75$: т.к.

При ~~y≥75~~ $y\geq 75$, $x\leq 25 \Rightarrow 3x\leq y$

При $y\leq 50$, $x\geq 50 \Rightarrow y\leq x$.

В итоге y принимает значения от 51 до 74. Для каждого y имеется соответствующий ему x. В итоге

$74-51+1=24$ видов треугольников.

Ответ: 24.

Задача 3.

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=8 \end{cases} \Rightarrow$$

ОДЗ: $xy\geq 0$

$y\geq 2x$

$\Rightarrow$ $\cancel{y^2-4xy+4x^2=xy}$.

$\cancel{y^2-5xy+4x^2=0}$.

$\cancel{2y^2-10xy+8x^2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$ ② $\Rightarrow$ ②: $y = \frac{9-x^2}{2}$

Подставляем в ①.

$$\frac{9-x^2}{2} - 2x = \sqrt{\frac{x(x-3)(x+3)}{2}} \quad \Big| \cdot 2$$

$$\underbrace{9 - x^2 - 4x}_{} = \sqrt{-2x(x-3)(x+3)}$$

$$-(x^2+4x-9) = \sqrt{-2(x(x-3)\underbrace{(x+3)}_{\geq 0})} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \in$ $(-\infty;-3] \cup [0;3]$

ОДЗ: $-3 \quad 0 \quad 3$

$-(x^2+4x-9) \geq 0$.

$D_1 = 4 + 9 = 13$. $x \in \left[\frac{-2-\sqrt{13}}{2}; \frac{-2+\sqrt{13}}{2}\right]$

$$x^4 + 16x^2 + 81 + 8x^3 - 18x^2 - 72x = 18x - 2x^3$$

$$x^4 + 10x^3 - 2x^2 - 90x + 81 = 0$$

$x = 1$ — один из корней. Подходит ОДЗ.

$$\begin{array}{l} x^4 + 10x^3 - 2x^2 - 90x + 81 \;\big|\; x - 1 \\ \underline{x^4 - x^3} \qquad\qquad\qquad\quad x^3 + 11x^2 + 9x - 81 \\ \quad 11x^3 - 2x^2 \\ \quad \underline{11x^3 - 11x^2} \\ \qquad 9x^2 - 90x \\ \qquad \underline{9x^2 - 9x} \\ \qquad\quad -81x + 81 \\ \qquad\quad \underline{-81x + 81} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

ОДЗ: $x \in \left[\frac{-2-\sqrt{13}}{2}; -3\right] \cup$
$\cup \left[0; \frac{-2+\sqrt{13}}{2}\right]$

$$x^3 + 11x^2 + 9x - 81 = 0.$$

$f(x) = x^3 + 11x^2 + 9x - 81$ —

$\frac{-2+\sqrt{13}}{2} < 1$.

$f(x)$ — монотонно возраст. ф-ция. $\Rightarrow$ Но промежутке от 0 до 1 решений нет.

$\Rightarrow$ Отв. ...

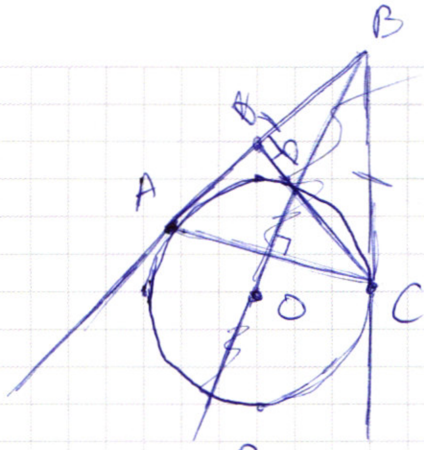
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

4.

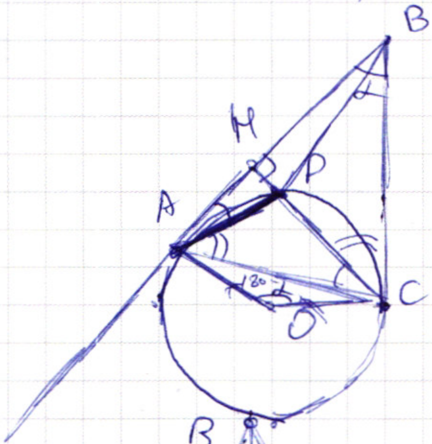


$\frac{AB}{CH}$

$CH^2 + HB^2 = BC^2 =$

$= AB^2$.

$CH^2 + AH^2 = AC^2$.



$S_{ABP} = 15$.

$R = 6$.

$\frac{AB}{2} \cdot PH = 15$.

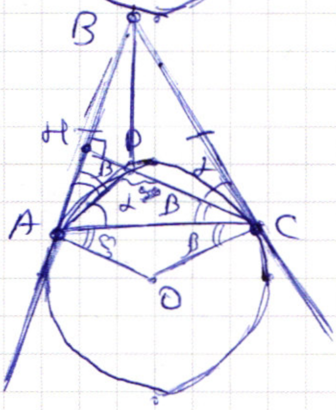
$\cancel{\Delta AHC \sim \Delta}$

$R = 6$.

По т. косинусов

$AC^2 = 36 + 36 + 2 \cdot \cos\alpha = 72 + 2 \cdot \cos\alpha$

$= 2AB^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\alpha$.



$\frac{BH \cdot AB}{2} = 15$.

$\angle B = 90 - \alpha$.

$\angle A = \alpha + \beta = \angle C$. $\frac{180 - \angle B}{2} =$

$= \cancel{90 - 90 + \alpha}$

$\cancel{90 - \alpha = 180 - 2\alpha - 2\beta}$

$\alpha + 2\beta = 90$.

$\angle A = \alpha + \beta = \angle C =$

$180 - \alpha - \beta =$

$\angle B = 90 - \alpha$.

$= 180 - \alpha - 2\beta + \beta =$

$= 90 + \beta$.

$\frac{180 - (90 - \alpha)}{2} =$

$= 45 + \frac{\alpha}{2} = \alpha + \beta \Rightarrow \frac{\alpha}{2} + \beta = 45 \Rightarrow \alpha + 2\beta = 90$.

$90 + \beta$, $90 + \alpha$.

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -3] \cup [0; 3] \\ x \in [-2-\sqrt{13}; -2+\sqrt{13}] \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \in [-2-\sqrt{13}; -3] \cup [0; -2+\sqrt{13}]$.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

6.

$$\begin{cases} |3x|+|2y| + |6-3x-2y| > 6 & (1) \\ x^2-2x-3y+y^2 \le 0 & (2) \end{cases}$$

(2) $x^2-2x-3y+y^2 \Rightarrow x^2-2x+1+y^2-3y+2,25 \Rightarrow$

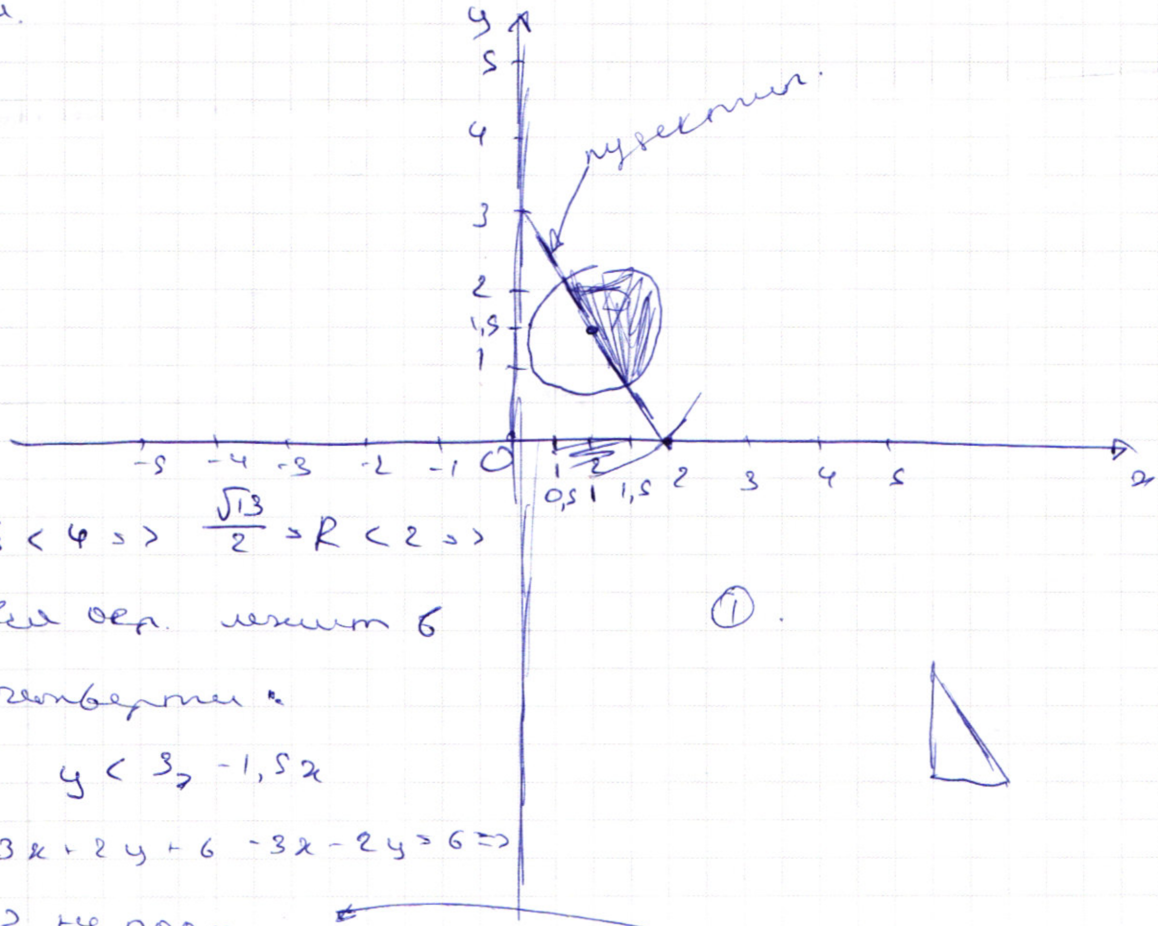
$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-1,5)^2 \le 3,25 = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$.

(1). $6-3x-2y>0 \Rightarrow y < 3-1,5x$.

$6-3x-2y<0 \Rightarrow y > 3-1,5x$.

В I: $3x+2y+6-3x-2y>6$ $\quad 6>6$ – не подх.

1 см.



$\frac{\sqrt{13}}{2}$ $\sqrt{13}<4 \Rightarrow \frac{\sqrt{13}}{2} = R < 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ вся обл. лежит в

I четверти.

1) При $y < 3-1,5x$

$3x+2y+6-3x-2y=6 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ не подх.

При $y>3-1,5x$:

$3x+2y-6+3x+2y = 6x+4y-6 > 6$.

$S = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 3,25}{2}$. $\quad 4y+6x>12$

$y > 3-1,5x$ ← подходит.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.

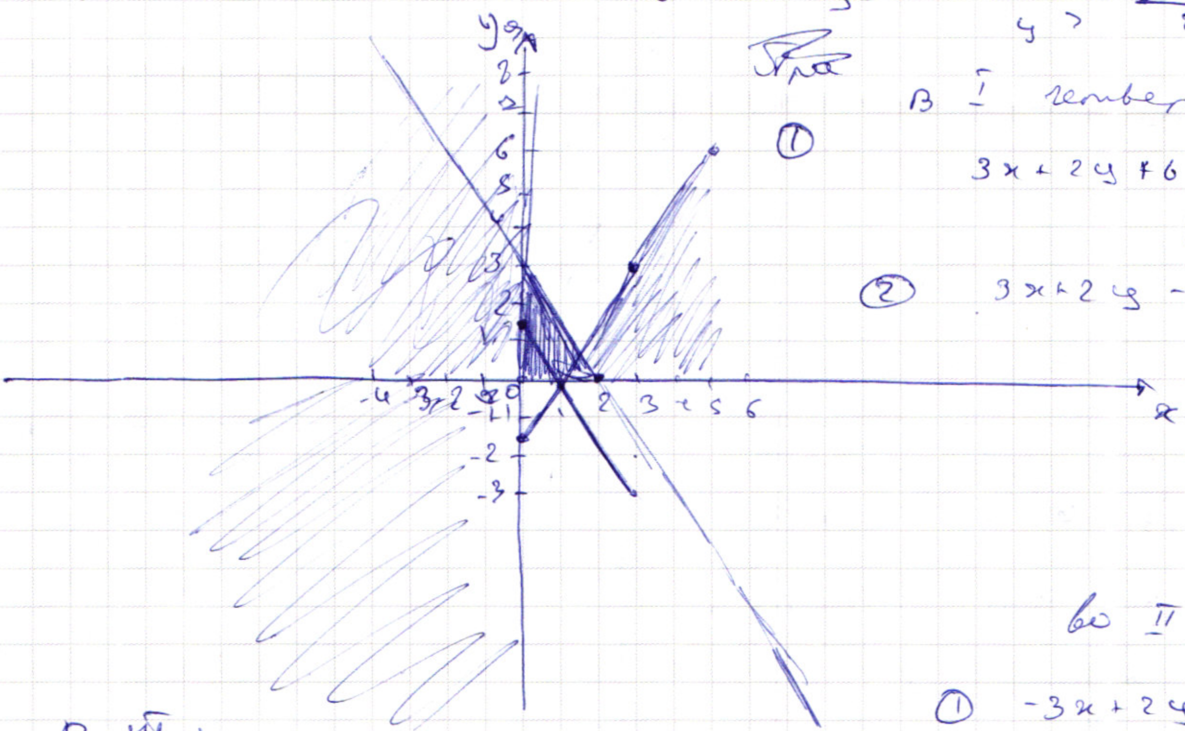
$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6-3x-2y| > 6 \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 < 0 \end{cases}$$

$6 - \cancel{3x - 2y} > 0$. $\quad 6 - 3x - 2y > 0 \Rightarrow$

$2\cancel{y + 3x}$

$\cancel{2y}$ $y < \frac{6-3x}{2} = 3 - 1{,}5x$.

$6 - 3x - 2y < 0 \Rightarrow y > \frac{6-3x}{2}$.



В I четверти

① $3x + 2y + 6 - 3x - 2y > 0$

$6 > 0$ при всех.

② $3x + 2y - 6 + 3x + 2y > 0$

$4y < 6x - 6$

$y < 1{,}5x - 1{,}5$

во II.

① $-3x + 2y + 6 - 3x - 2y > 0$

$-6x + 6 > 0$

$x < 1$

② $-3x + 2y - 6 + 3x + 2y > 0$

$4y - 6 > 0$

$y > 1{,}5$

В III:

$-3x - 2y + 6 - 3x - 2y > 0$

$4y < 6 - 6x$

$y < 1{,}5 - 1{,}5x$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(1)=0.$

$3\leq x\leq 19.$ $3\leq y\leq 19.$ $f\left(\frac{x}{y}\right)<0.$

Во-первых, $x\neq y.$

~~$f(6)=f(2)+f(3)=5.$~~ ~~$f(15)=8$~~

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(2)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(4)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(2)+f(2)=$

$=f\left(\frac{1}{2}\right)+4.$ $f(2)=2.\Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=-2.$

Пусть p - натур. число.

Тогда,

$f(p)=f\left(\frac{n\cdot p}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)+f(n\cdot p)=$

$=f\left(\frac{1}{n}\right)+f(n)+f(p)=f(p).\Rightarrow$

$\Rightarrow f(n)=-f\left(\frac{1}{n}\right).\Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)<0.$

$\Rightarrow f(y)>f(x).$

$3\leq x\leq 19.$ $3\leq y\leq 19.$

$f(m)$ — при $m\in N$ — ~~сумма всех простых делителей~~

Таким образом:

$f(3)=3$ 2 3 5 6 7 11 13 если m - ~~простое~~ число и $m=p_1^{q_1}\cdot p_2^{q_2}\ldots$, где $p_1, p_2, \ldots$ простые числа, то

$f(4)=2$ 8 9 17 19

$f(5)=5$

$f(6)=5$

$f(7)=7$

$f(8)=6$ $f(m)=q_1p_1+p_2q_2\ldots$

$f(9)=6$

$f(10)=7$

$f(11)=11$

$f(12)=7.$

$f(13)=13$

$f(14)=9.$

При $y=19$, $16x$.

При $y=18$, $10x$.

При $y=17$, $15x$.

При $y=13$, $14x$.

При $y=11$, $13x$.

$f(15)=8.$

$f(16)=8$

При $y=7$: 18, 16, 15 - $5x$.

При $y=14$ — $12x$.

$f(17)=17$

$f(18)=8$

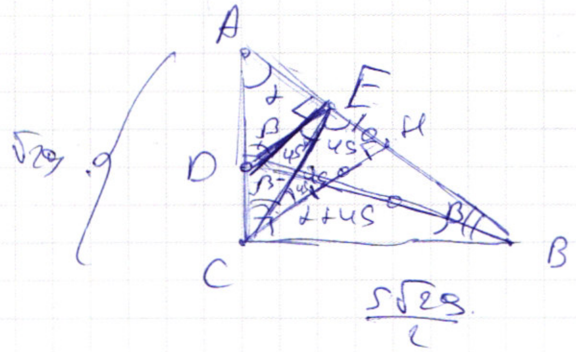
$f(19)=19.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.



$AC = \sqrt{29}$, $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$

$AC^2 + BC^2 = AB^2 =$

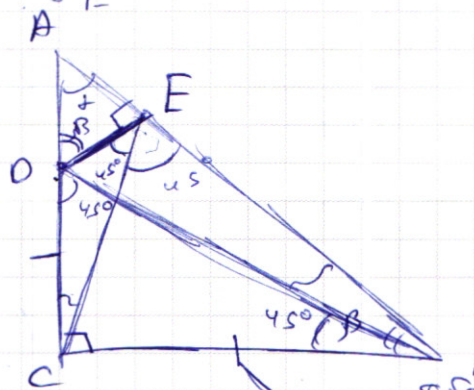
$= \cancel{29 + 12,25\cdot 29} = 29 +$

$+ 6,25\cdot 29 =$

$= \cancel{7,25}\ 7,25\cdot 29 =$

$= \frac{29\cdot 29}{4} = \frac{13\cdot 29}{2}$

$DC^2 + 6,25\cdot 29 = DB^2 = E$



$BC = DC = \frac{5\sqrt{29}}{2} =$

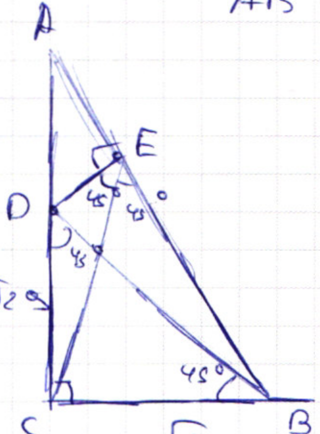
$= 2,5\sqrt{29} =$

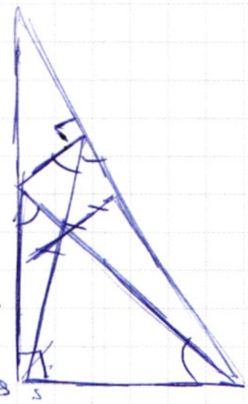
$\Rightarrow DC \Rightarrow$

$\Rightarrow AD = AC - 2,5\sqrt{29}$

~~$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$~~

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$





$AB^2 =$

$\cancel{= 6,25\sqrt{29}}$

$= 6,25\cdot 29 +$

$+ 29 =$

$= 7,25\cdot 29$

$AB = \cancel{\sqrt{13\cdot 29}}$

$= \sqrt{7,25\cdot 29}$

$= \cancel{\sqrt{\frac{29\cdot 29}{2}}}$

$= \sqrt{\frac{29}{2}}\cdot 5$

$AC = 2,5\sqrt{29}$

$BC = \sqrt{29} =$

$\Rightarrow DC \Rightarrow$ $AD = 1,5\sqrt{29}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{1,5\sqrt{29}}{2,5\sqrt{29}} = \frac{3}{5}$

$2,25\cdot 4 = 29$

$\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ACB}} = k^2$

$K = \frac{AD}{AB}$

$AD = 1,5\sqrt{29}$

$\cancel{= k^2 = }\ \frac{3}{}$ $\cancel{\frac{AB}{}}$

$\frac{AD}{AB} = \frac{15\sqrt{29}}{29} = K$

$K^2 = \frac{9\cdot 29}{29^2} = \frac{9}{29} \Rightarrow$

$= \frac{2,5\cdot 29\cdot 9}{2\cdot 29} = \frac{2,5\cdot 9}{2} = 1,25\cdot 9 = S_{\triangle AED} = \frac{9\cdot S_{ACB}}{29} = \frac{}{11,25}$

$1 + 4 + 8 + 12 + 17 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 =$

$= 5 + 26 + 39 + 27 + 31 =$

$= 31 + 31 + 66 = 62 + 66 = 128$