МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N°3.

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \quad (1) \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

~~ОД~~ Особые ограничения:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \cdot y \geq 0$$

(1) $y - 2x = \sqrt{xy}$

Возведём обе части в квадрат.

$y^2 + 4x^2 - 4xy = xy$

$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$

Решим квадратное уравнение относительно y.

$D = 25x^2 - 16x^2 = 9x^2$.

$y_1 = \frac{5x + 3x}{2}$; $\Rightarrow$ $y_1 = 4x$.

$y_2 = \frac{5x - 3x}{2}$; $y_2 = x$.

Несложно заметить что в обоих случаях x и y имеют один знак $\Rightarrow$ все решения будут удовлетворять особым ограничениям.

Вернёмся к системе.

~~$y = 4x$~~

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y = 4x, \\ 2y + x^2 = 9; \end{cases} (2) \\ \begin{cases} y = x \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases} (3) \end{array}\right.$$

решим систему (2):

$$\begin{cases} y = 4x \\ 8x + x^2 - 9 = 0 \quad (2') \end{cases} \qquad \cancel{y=4x}$$

решим ур-ние (2'):

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 16 + 9 = 25$$

$$x_1 = -4 + 5; \quad x_1 = 1;$$

$$x_2 = -4 - 5; \quad x_2 = -9.$$

Вернемся к системе:

$$\begin{cases} y = 4x \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -9 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -9 \\ y = -36. \end{cases} \end{array}\right.$$

решим систему (3):

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + 2x - 9 = 0 \quad (3') \end{cases}$$

решим ур-ние (3'):

$$x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 1 + 9 = 10$$

$$x_1 = -1 + \sqrt{10}; \quad x_2 = -1 - \sqrt{10}.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Вернёмся к системе:

$$\begin{cases} y = x \\ x = -1 \pm \sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -1-\sqrt{10} \\ x = -1-\sqrt{10} \end{cases} \\ \begin{cases} y = -1+\sqrt{10} \\ x = -1+\sqrt{10} \end{cases} \end{array} \right.$$

Вернёмся к совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -9 \\ y = -36 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1-\sqrt{10} \\ y = -1-\sqrt{10} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1+\sqrt{10} \\ y = -1+\sqrt{10} \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $(1; 4)$; $(-9; -36)$; $(-1-\sqrt{10}; -1-\sqrt{10})$; $(-1+\sqrt{10}; -1+\sqrt{10})$.

№ 1.

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x|\cdot|x-3|} \leq 0$$

Преобразуем числитель дроби в левой части неравенства.

$$x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| = (x-1)^2 + 4 - 4|x-1| =$$
$$= |x-1|^2 + 2^2 - 2\cdot 2\cdot |x-1| = (|x-1| - 2)^2.$$

Вернёмся к неравенству.

$$\frac{(|x-1|-2)^2}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \le 0$$

Числитель дроби в левой части неравенства всегда $\geq 0 \Rightarrow$ решение системы можно записать так:

$$\left[\begin{cases}|x-1|-2=0, & (1)\\ 4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|<0 & (2).\end{cases}\right.$$

(знаменатель не равен 0 по ОДЗ).

Решим (1):

$|x-1|-2=0$

$|x-1|=2$

$\left[\begin{array}{l}x-1=2\\ x-1=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-1.\end{array}\right.$ не подходят по ОДЗ, т.к. знаменатель $=0$.

Решим (2):

$4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|<0.$

раскроем модуль, рассматривая случаи:

$|x|$: $-$ | 0 | $+$ | 3 | $+$ → x

$|x-3|$: $-$ | 0 | $-$ | 3 | $+$

1.) $x \le 0$

$4x^2-12x+x^2-3x<0$

$5x^2-15x<0$

$5x(x-3)<0$

решим методом интервалов:

$+$ (0) $-$ (3) $+$ → x

$\begin{cases}x \le 0\\ x \in (0;3)\end{cases}$

Т.к. $x \le 0$, то в этом случае нет решений.

2.) $0 < x \le 3$

$4x^2-12x+x(3-x)<0$

$4x^2-12x+3x-x^2<0$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

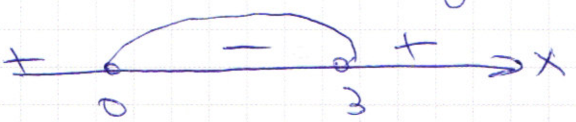
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3x^2 - 9x < 0$

$3x(x-3) < 0$

Решим методом интервалов:



$x \in (0;3)$ подходит.

3.) $x > 3$

$4x^2 - 12x + x^2 - 3x < 0$

$5x^2 - 15x < 0$

Решение такое же, как в 1), но ограничение $x > 3 \Rightarrow$ нет решений.

Вернемся к совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \cancel{[illegible]} \\ x = -1 \\ \cancel{x \in (0;3)} \quad 0 < x < 3 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x \in (0;3) \cup \{-1\}$.

Ответ: $x \in (0;3) \cup \{-1\}$.

N°5.

Дано: | ~~решение:~~

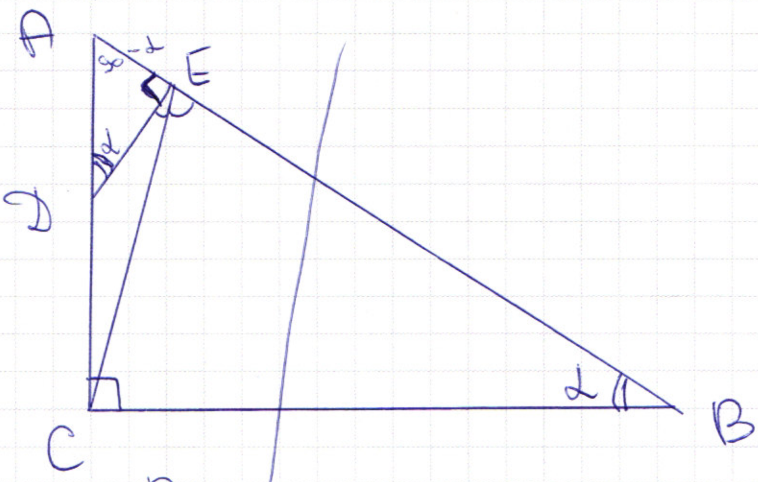
$\triangle ABC$ – прямоуг.

$DE \perp AB$

$AC = \sqrt{29}$

$BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$

$\angle CED = 45^\circ$



$\frac{AD}{AC}$ – ?

$S_{\triangle AED}$ – ?

Пусть $\angle ABC = \alpha$.

Тогда $\angle CAB = 90^\circ - \alpha$ (по теор.)

$\angle ADE = 90^\circ - \angle CAB = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) =$
$= \alpha$

Рассм. $\triangle ADE$ и $\triangle ABC$:

1) $\angle ADE = \angle ABC = \alpha$

2) $\angle AED = \angle ACB = 90^\circ$.

$\Rightarrow$ $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ по остр. $\angle$

$\Rightarrow$ $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ (1)

$AB^2 = AC^2 + CB^2$ по теор. Пифагора

$AB = \sqrt{29 + \frac{25\cdot 29}{4\cancel{2}}} = \sqrt{\frac{27\cdot 29}{4\cancel{2}}} =$

$= \cancel{\frac{3\sqrt{3\cdot 29}}{2}}$. $\cancel{\frac{3\sqrt{3\cdot 29}}{2}}$

$= \frac{3\sqrt{3\cdot 29}}{2}$

(1) $\frac{AE}{\sqrt{29}} =$

$\longrightarrow$

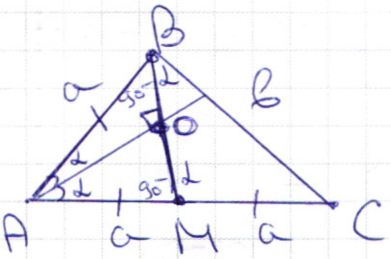
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 6
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2.

Рассмотрим $\triangle ABC$, у кот. бис. $\perp$ мед.



BM – медиана.

Пусть $\angle BAO = \alpha = \angle CAO$
(AO – бис.)

Тогда $\angle ABO = 90 - \alpha$
и
$\angle AMO = 90 - \alpha$
(по теореме)

$\angle ABO = \angle AMO = 90 - \alpha \Rightarrow \triangle ABM$ – р/б с основанием BM по пр-ку $\Rightarrow$ $AB = AM$.

Пусть $AM = MC = AB = a$, $BC = b$.

$AC = 2a$, $AB = a$, $BC = b$.

Запишем неравенство $\triangle$:

$$\begin{cases} AC < AB + BC \\ BC < AB + AC \\ AB < AC + BC \end{cases}$$

$\Leftarrow$ (то что $a < 2a + b$ при $a, b \in N$ очевидно)

Из первых двух пунктов:

$$\begin{cases} 2a < a + b \\ b < a + 2a \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$a < b < 3a.$$

P – периметр.

$P = a + 2a + b = 3a + b.$

$a < b < 3a \Rightarrow 4a < b + 3a < 6a$

$\Leftrightarrow$

$4a < P < 6a.$

По усл. $P = 300 \Rightarrow$

$4a < 300 < 6a$, откуда

$\begin{cases} a < 75 \\ a > 50 \end{cases} \Leftrightarrow 50 < a < 75.$

Осталось проверить сколько существует целочисленных a, таких что $50 < a < 75$.

Их всего $75 - 50 - 1 = 24.$

↑ строгое нер-во

Ответ: 24.

№6.

$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, (2) \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. (1) \end{cases}$

Рассмотрим (1).

$x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0$

$(x-1)^2 - 1 + (y - 1\frac{1}{2})^2 - (1\frac{1}{2})^2 \leq 0$

$(x-1)^2 + (y - 1\frac{1}{2})^2 \leq 3,25$

решением является окружность с центром в точке $O(1; 1\frac{1}{2})$ и радиусом $R = \sqrt{3,25}$ и вся область внутри окружности.

Рассмотрим (2).

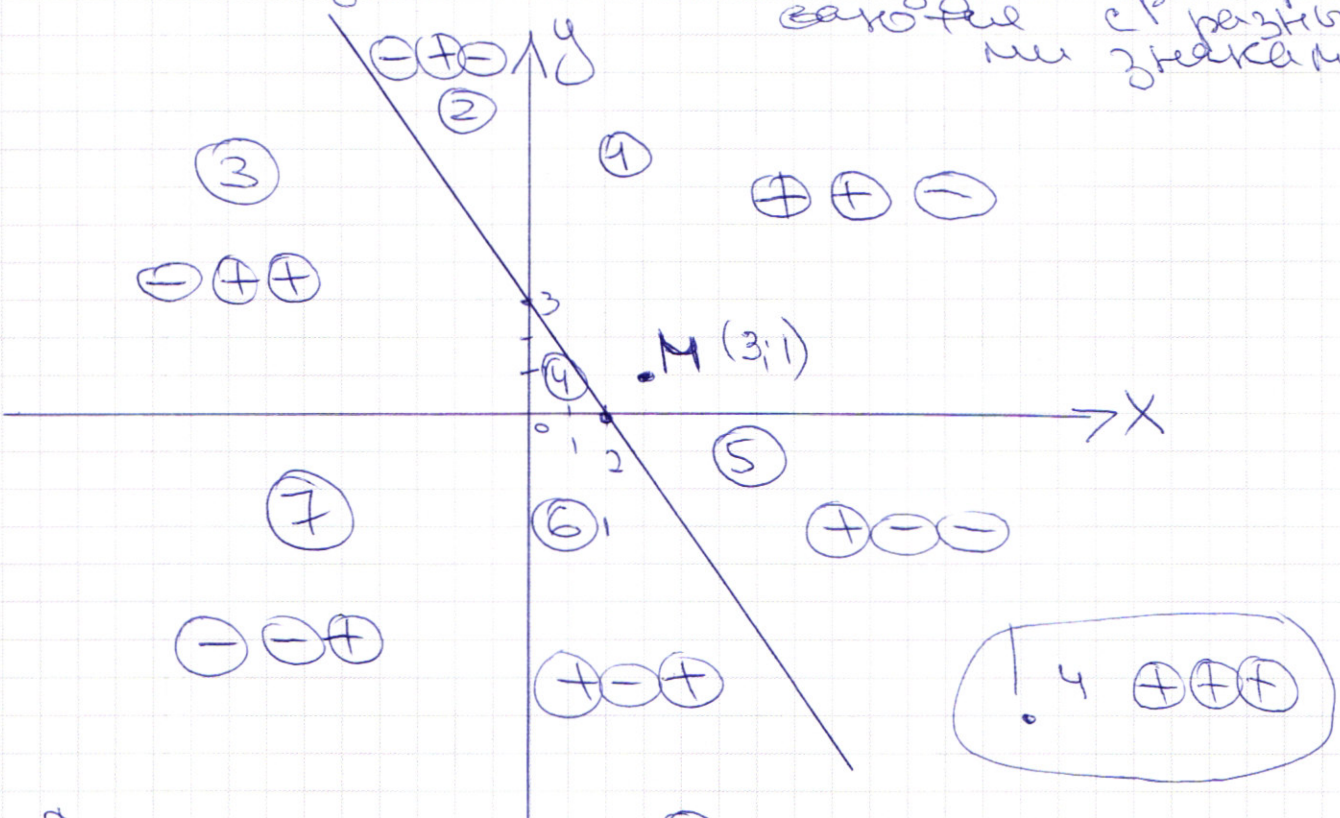
$|3x|$ ~~равен~~ обращается в 0 на прямой $x = 0$ (ордината)

$|2y|$ ~~равен~~ обращается в 0 на прямой $y = 0$ (абсцисса)

$|6 - 3x - 2y| = 0$ задаёт прямую $y = -\frac{3}{2}x + 3.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Эти три прямые делят координатную плоскость на 7 частей, в каждой из ком. модули раскрываются с разными знаками.



Для области (1) возьмём пробную точку M(3;1) и посмотрим как раскроются модули.

$|3\cdot 3| = 9$ (+)

$2\cdot 1 = 2$ (+)

$6 - 3\cdot 3 - 2\cdot 1 = -5$ (−)

Проделав аналогичную работу с остальными частями получаем знаки раскрытия модулей, как они представлены на графике. (первый знак $|3x|$, второй $|2y|$, третий — $|6-3x-2y|$)

Теперь раскроем модули и решим ~~...~~ неравенства.

(1) $3x+2y-6+3x+2y>6$

$6x+4y>12 \quad |:2$

$3x+2y>6$

$2y<3x-6$

$y<\frac{3}{2}x-3$

√ (2) $-\cancel{3x}+2y-6+\cancel{3x}+2y>6$

$4y>12$

$y>3$

√ (3) $-3x+\cancel{2y}+\cancel{6}-3x-\cancel{2y}>\cancel{6}$

$-6x>0$

$x<0$

(4) $\cancel{3x}+\cancel{2y}+6-\cancel{3x}-\cancel{2y}>6$

$0>0$

$\varnothing$

√ (5) $3x-\cancel{2y}-6+3x+\cancel{2y}>6$

$6x>12$

$x>2$

√ (6) $\cancel{3x}-2y+\cancel{6}-\cancel{3x}-2y>\cancel{6}$

$-4y>0$

$y<0$

(7) $-3x-2y+\cancel{6}-3x-2y>\cancel{6}$

$-6x-4y>0 \quad |:(-2)$

$3x+2y<0$

$3x<-2y$

$y<-\frac{3}{2}x$

Вернёмся к системе и изобразим всё на графике.

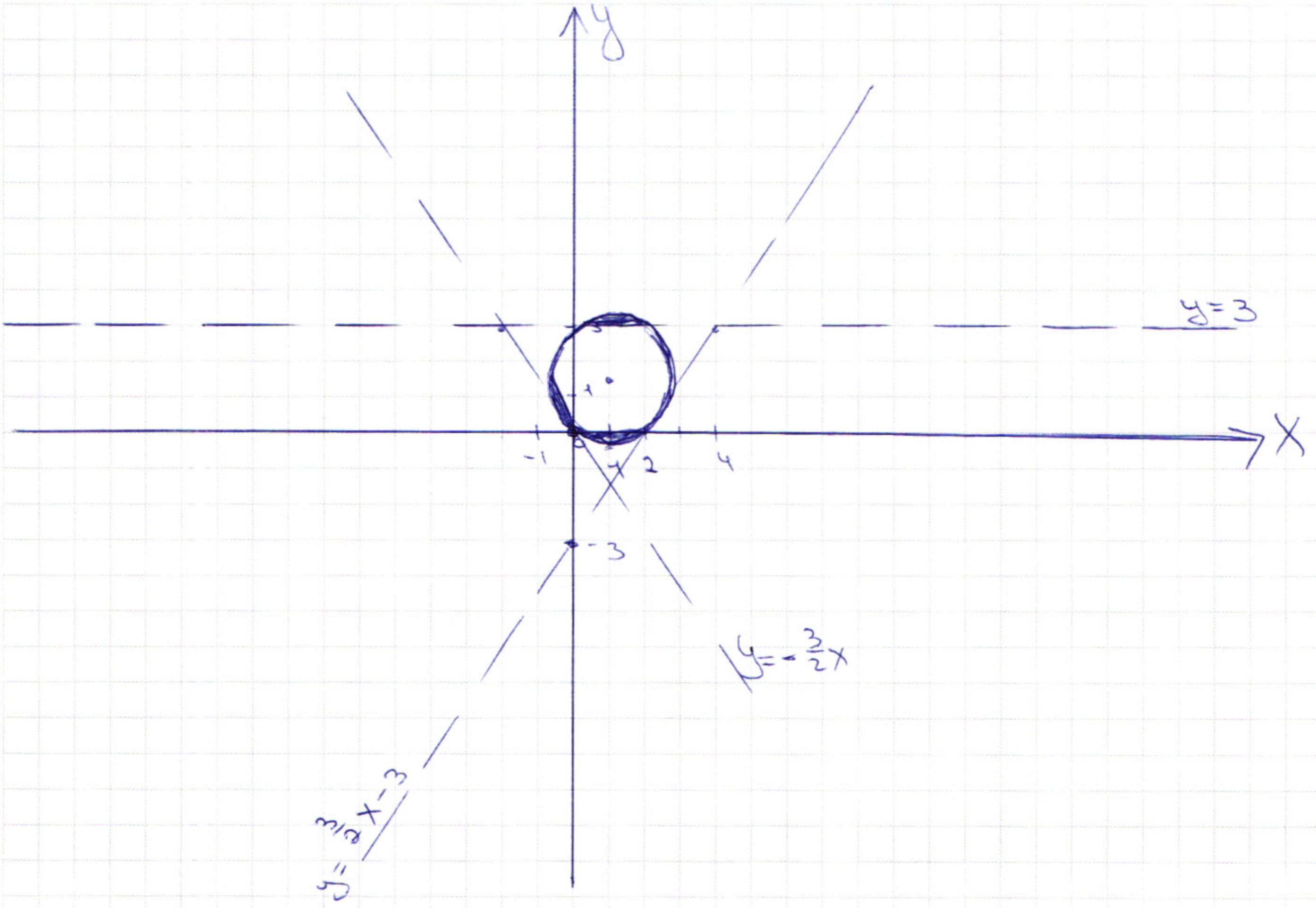
→

☑ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№ 5.

Дано:

$AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$

$BC = \sqrt{29}$

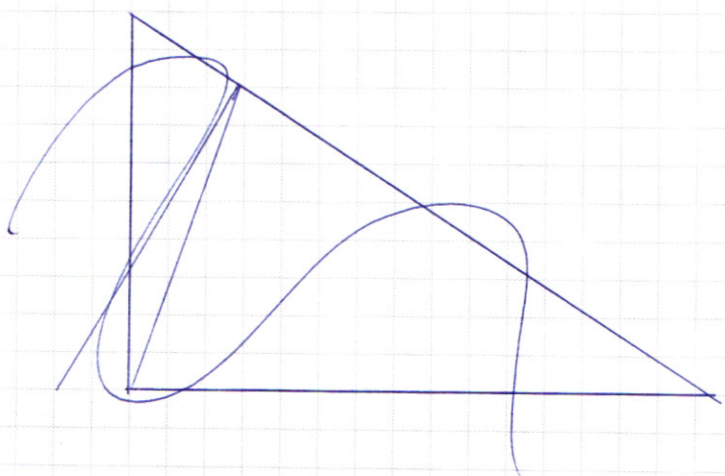
$\angle CED = 45°$

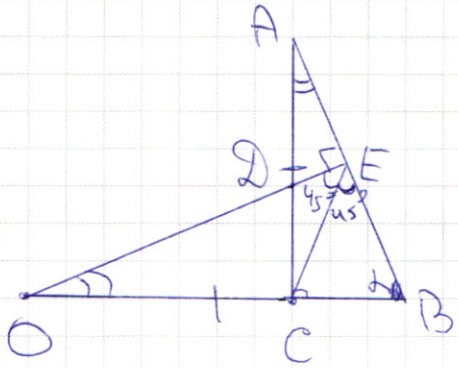
$DE \perp AB$

$\frac{AD}{AC}$ – ?

S_{AED} – ?

Решение:





Рассм. $\triangle OEB$ и $\triangle ACB$:

1.) $\angle B$ – общий

2.) $\angle OEB = \angle ACB = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle OEB \sim \triangle ACB$ по остр. углу $\Rightarrow \dfrac{BC}{BE} = \dfrac{AC}{OE}$.

$\angle CED = 45^\circ \Rightarrow \angle CEB = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ \Rightarrow EC$ – бис.

$\dfrac{OC}{OE} = \dfrac{BC}{BE}$ по осн. св-ву бис.

$$\begin{cases} \dfrac{OC}{OE} = \dfrac{BC}{BE} \\ \dfrac{BC}{BE} = \dfrac{AC}{OE} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{OC}{\cancel{OE}} = \dfrac{AC}{\cancel{OE}} \Rightarrow OC = AC.$$

Пусть $\angle ABC = \alpha$.

$\angle CAB = 90 - \alpha$ по теор.

$\angle EOB = 90 - \alpha$ по теор.

$\Rightarrow \angle CAB = \angle EOB$

Рассм. $\triangle ODC$ и $\triangle ABC$:

1.) $OC = AC$

2.) $\angle CAB = \angle EOB$

$\Rightarrow \triangle ODC = \triangle ABC$ по катету и острому углу $\Rightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow DC = BC,\ OD = AB.$

$AD = AC - DC = AC - BC = \frac{5\sqrt{29}}{2} - \sqrt{29} = \frac{3\sqrt{29}}{2}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{3\sqrt{29}\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}\cdot 5\sqrt{29}} = \frac{3}{5}.$

Рассм. $\triangle ODC$ и $\triangle ADE$:

1.) $\angle DOC = \angle DAE = 90 - \alpha$

2.) $\angle OCD = \angle AED = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle ODC \sim \triangle ADE$ по остр. углу $\Rightarrow$

$\frac{OD}{AD} = \frac{OC}{AE} = \frac{DC}{DE}$

~~$AE = \frac{AD}{OC \cdot DE}$~~ $AB^2 = AC^2 + CB^2$ по т. Пиф.

$AB = \sqrt{\frac{29\cdot 4}{4} + \frac{25\cdot 29}{4}} = \sqrt{\frac{29^2}{4}} = \frac{29}{2}$

~~$AE = \frac{OC \cdot DE}{}$~~ ~~$AB = \sqrt{29 + \frac{25\cdot 29}{4}} = \frac{3\sqrt{3\cdot 29}}{2}$~~

$\frac{OD}{AD} = \frac{AB}{AD} = \cancel{\frac{3\sqrt{3\cdot 29}\cdot 2}{2\cdot 3\sqrt{29}}} = \cancel{\sqrt{3}}\ \frac{29\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}\cdot 3\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{29}}{3}$

~~$AE = OC\cdot\sqrt{3} = AC\cdot\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{29\cdot 3}}{2}$~~

~~$DE = DC\cdot\sqrt{3} = \sqrt{29\cdot 3}$~~

$S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{29} \cdot 3 \cdot 5 \cdot}{2}$

$\frac{\cdot \sqrt{29 \cdot 3}}{} = \frac{29 \cdot 3 \cdot 5}{4} =$

$= 108,75.$

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$; $S_{\triangle AED} = 108,75.$

№7.

Т.к. $f(ab) = f(a) + f(b)$, то $f(\frac{x}{y})$ есть сумма всех простых делителей числа $\frac{x}{y}$.

$f(p) = p$ все простые числа ~~положительны~~ $\Rightarrow$ $f(x/y) < 0$ не может быть

Ответ: нет таких.

№5

$AE = OC : \frac{\sqrt{29}}{3} = AC : \frac{\sqrt{29}}{3} = \frac{5\sqrt{29} \cdot 3}{2 \cdot \sqrt{29}} = \frac{15}{2}$

$= \cancel{\frac{5\sqrt{29} \cdot \sqrt{29}}{2 \cdot 3}} = \cancel{\frac{5 \cdot 29}{6}} = \cancel{24\frac{1}{6}}$

$DE = DC : \frac{\sqrt{29}}{3} = BC : \frac{\sqrt{29}}{3} =$

$= \cancel{\frac{29}{3}} \cdot \frac{\sqrt{29} \cdot 3}{\sqrt{29}} = 3$

$S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot DE = \cancel{\frac{5 \cdot 29 \cdot 29}{6 \cdot 2 \cdot 3}} =$

$= \cancel{116\frac{269}{36}} = \cancel{116\frac{29}{36}}$ $\frac{15 \cdot 3}{2 \cdot 2} = 11,25$

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$, ~~$S_{\triangle AED} = 116\frac{29}{36}$~~.

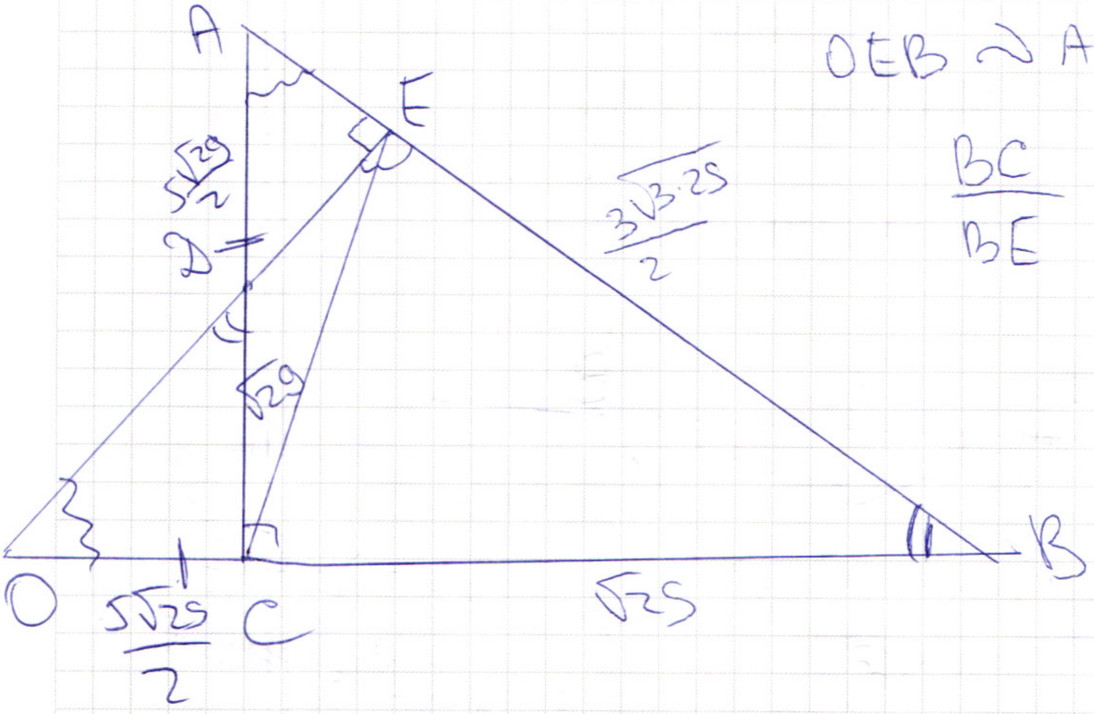
$S_{\triangle AED} = 11,25.$

14

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)



$OEB \sim ACB$

$$\frac{BC}{BE} = \frac{AC}{OE} = \frac{\cancel{OB}}{} , \frac{AB}{OB}$$

$$\frac{OC}{OE} = \frac{BC}{BE} \quad (CE - биc.) \Rightarrow$$

$OC = AC$,

$AED \sim ACB$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{ED}{BC}$$

~~$OEB \sim ACB$~~

$$OE = \frac{AC \cdot OB}{AB}$$

$$435 : 4 = 108{,}75$$

$ODC \sim ABC$

$$\frac{OD}{AB} = \frac{OC}{AC} = \frac{DC}{BC} = 1$$

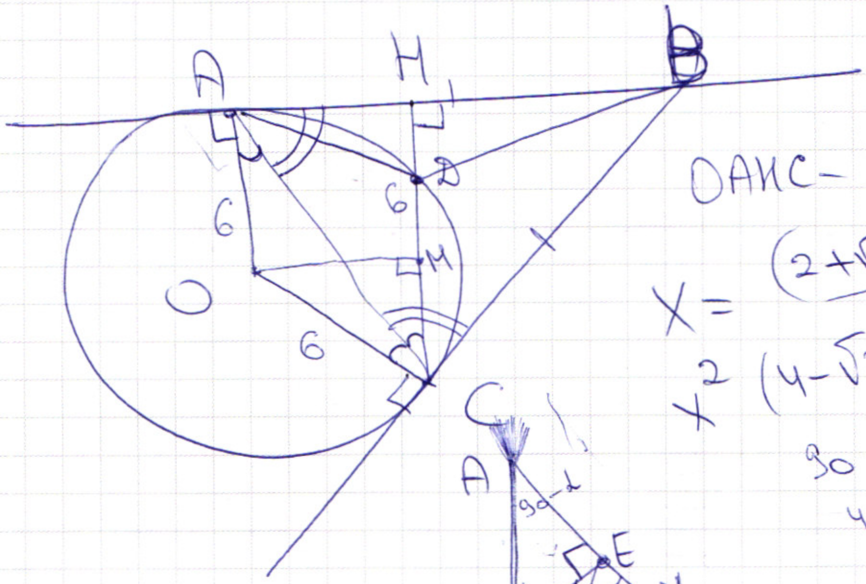
29×3

$29 \times 15 = 145 + 29\cdot10 = 435$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



ОАНС − прямоуг. трап.

$x = \frac{(2+\sqrt{2})\sqrt{29-x^2}}{4-\sqrt{2}}$

$x^2(4-\sqrt{2})^2 = \cancel{2\cdot 29}+$

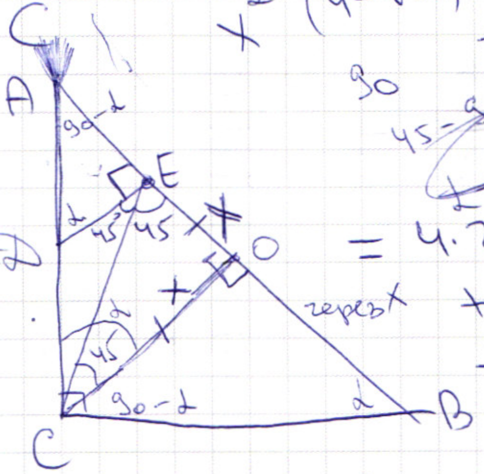
$f(ab) =$

$\frac{AB}{CH}$

$f\left(\frac{3}{\sqrt{29}}\right) =$

$S_{ABD} = 15$

$R = 6$



$= 4\cdot 29 - 4x^2 +$

$+ 2\cdot 29 - 2x^2 +$

$+ 4\sqrt{2}\cdot 29 -$

$- 4\sqrt{2}x^2$

$\sqrt{BC^2 - x^2} = m$

$CE = x\sqrt{2}$

$OB = \sqrt{BC^2 - x^2}$

$BC^2 = 2x^2 + \left(x + \sqrt{BC^2 - x^2}\right)^2 - 2\cdot\cos 45\cdot$

$\cdot x\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{BC^2-x^2} + x\right)$

$29 = 2x^2 + x^2 + 29 - x^2 - 2x\sqrt{29 - x^2} -$

$- 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x\sqrt{2}\cdot (m + x)$

$0 = 4x^2 - 2xm - x\sqrt{2}(m+x)$

$0 = 4x - 2m - \sqrt{2}(m+x)$

$0 = 4x - 2m - m\sqrt{2} - x\sqrt{2}$ $\quad x\sqrt{2} - 4x = \ldots$

$x = \frac{(2m + m\sqrt{2})}{4-\sqrt{2}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

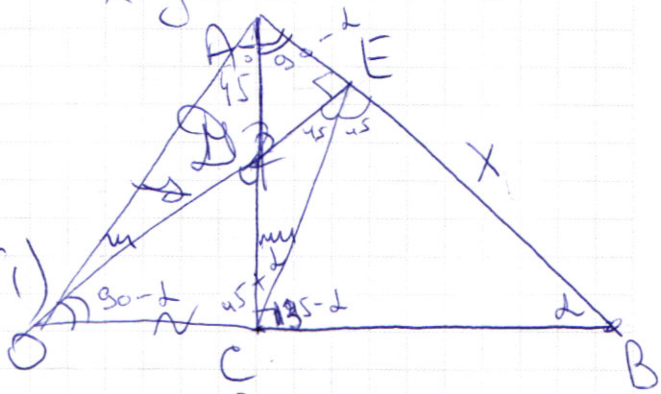
3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

ОДЗ: ~~$x\geq 0$~~ ~~$y\geq 0$~~ $x\cdot y\geq 0$

$$\frac{OC}{\cancel{OD+DE}\ OE}=\frac{BC}{BE}$$

$$\begin{cases} y^2+4x^2-4xy=xy \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y^2+4x^2-3xy=0 \quad (1) \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

(1) $y^2-5xy+4x^2=0$

$D=25x^2-16x^2=9x^2$

$DOC \sim DAE$

$$\frac{DO}{DA}=\frac{OC}{AE}=\frac{DC}{DE}$$

$$y=\frac{5x\pm 3x}{2}=\left[\begin{array}{l}4x\\ x\end{array}\right.$$

$OAD \sim CED$

$AED \sim ACB$

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AD}{}$$

$$\begin{cases} y=4x \\ 8x+x^2=9 \end{cases}$$

$\cancel{OA}$

$y=x$

$2x+x^2=9$

$$\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{ED}{CB}$$

$x^2+8x-9=0$

$x^2+2x-9=0$

$\frac{D}{4}=16+36=52=$

$=4\cdot 13$

$\frac{D}{4}=1+9=10$

$x=-1\pm\sqrt{10}$

$x=-4\pm 2\sqrt{13}$

$OEB \sim ACB$

$$\frac{OE}{AC}=\frac{OB}{AB}=\frac{EB}{CB}$$

$$\frac{BC}{BE}=\frac{AC}{OE}=\frac{OC}{OE}$$

$AC=OC$

1	2	3	4	5	6
V		V		V	
				7	

① $$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leq 0$$

$$\frac{|x-1|^2+4-4|x-1|}{|2x-3|^2+|x^2-3x|-9} \leq 0$$

$$\frac{(|x-1|-2)^2}{|2x-3|^2+|x^2-3x|-9} \leq 0$$

Числ. $\geq 0 \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} |x-1|-2=0 \\ |2x-3|^2+|x^2-3x|-9<0 \end{array}\right.$$

(1) $|x-1|=2$

$$\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

(2) $\cancel{4x^2-12x}$

$+ \quad 0 \quad - \quad 3 \quad + \quad x$

1) $x \leq 0$

$4x^2-12x+x^2-3x-9<0$

$5x^2-15x-9<0$

⑥ I) $-3x+2y+6-3x-2y>6$

$-6x>0$

$x<0$

II) $3x+2y-6+3x+2y>6$

$6x+4y\geq 12$

$3x+2y>6$

$3x-6>-2y$

$-\frac{3}{2}x+3<y$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

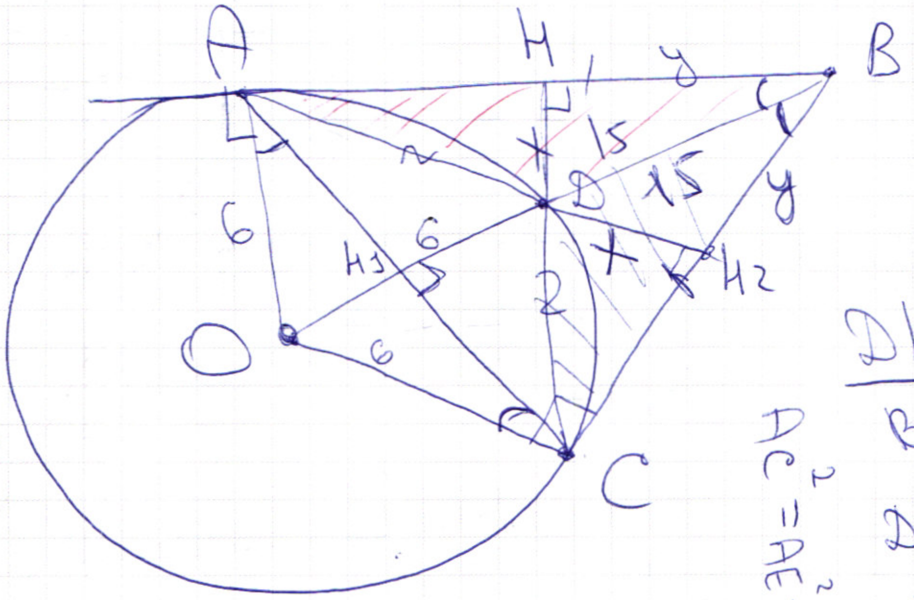
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$180-(180-\alpha+45)=$

$=$



$\frac{DH}{BH}=\frac{DC}{BC}$

$DH=x$

$BH=y$

$\frac{x}{y}=\frac{CH-x}{AB}$

$\frac{CH}{x}-1=\frac{AB}{y}$

$\frac{CH\cdot AB}{30}-1=\frac{AB}{AB-AH}$

$\frac{BC}{\sin 45}=\frac{CE}{\sin\alpha}$

$BC^2=CE^2+BE^2-2CE\cdot BE\cos 45$

$AC^2=AE^2+CE^2-2\cdot AE\cdot CE\cdot\cos 135°$

$\frac{AB}{CH}$ — ?

$S_{ABD}=15$

$R=6$

$\frac{1}{2}x\cdot AB=15$

$BC=AB$

$36+AB^2=\left(6+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$

$AB\cdot x=30$

$x=\frac{30}{AB}$

$P=3a+b$

$4a<P<6a$

$4a<300<6a$

$50<a$

$a<75$

$180-\alpha-45+$

$+180-45-$

$-(180-\alpha)=$

$=$

$50<a<75$

$75-50-1$

$x^2-2x=$

$=(x-1.5)^2-1.5^2$

$5<a<8$

$8-5=3$

$a<b$

$a<b<3a$

$\begin{cases} a<2a+b \\ b<3a \\ 2a<a+b \end{cases}$

$3<a<8$

$8-3=5-1$

- [x] черновик
- [ ] чистовик

Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

7

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = p$

$(x; y)$

$3 \le x \le 19$

$3 \le y \le 19$

$f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) < 0$

$\parallel$

$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(18) = f(2 \cdot 9) = 2 + 3 + 3 = 8$

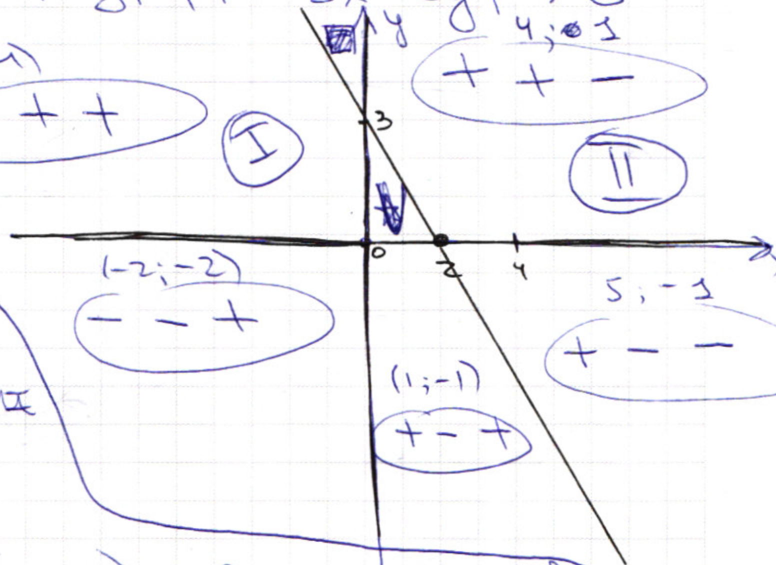
6

$x^2 - 2x - 3y + y^2 \le 0$

$(x-1)^2 - 1 + (y-1{,}5)^2 - 1{,}5^2 \le 0$

$(x-1)^2 + (y-1{,}5)^2 \le 3{,}25$

$|3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6$



$6 - 3x - 2y = 0$

$y = \frac{6-3x}{2} = -\frac{3}{2}x + 3$

1; $\frac{1}{2}$

+ + +

(−1; 10)

− + −

$6 - 3 \cdot 4 - 2 =$

$= 6 - 14$

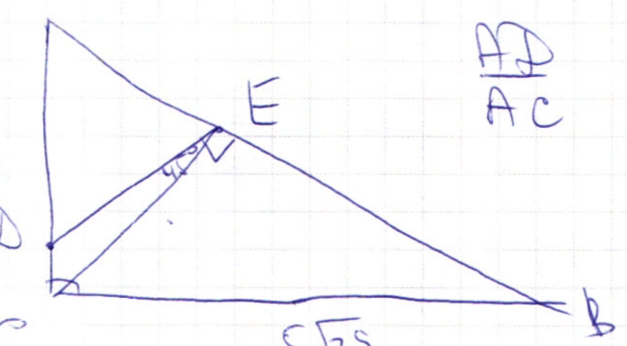
$6 - 15 + 2$

$6 - 3 - 1$

$9 + 20$

$|-3| \cdot |-6| = 18$

$|-3| \cdot |6| = 18$

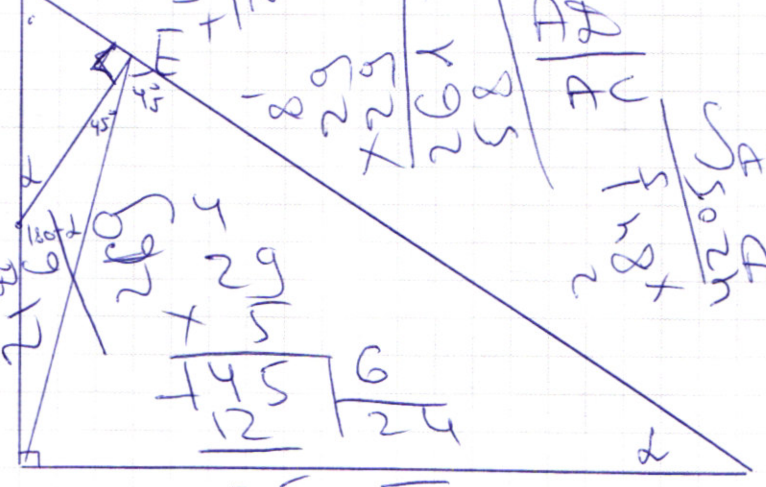


$\frac{AD}{AC}$

$\frac{5\sqrt{29}}{2}$

$\frac{45}{4}$

$\frac{45}{4}$



$\frac{AD}{AC}$

S_{AED}

$AED \sim ACB$

$\frac{AE}{\sqrt{29}} = \frac{AD}{AB} = \frac{ED}{BC}$

$AE = ED \cdot \frac{\sqrt{29} \cdot 2}{5\sqrt{29}}$

$ED + AE = AB$

29
+ 5
45
12

6
24

$\frac{5\sqrt{29}}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)