

2 10 класс

1. (a) Найдите количество целых значений параметра a , при каждом из которых уравнение $(a^2 + a + 1)x^2 + (7a + 2)x + (a - 1) = 0$ имеет два корня, один из которых больше 2, а другой — меньше 2.

Ответ: 4.

Решение. Поскольку коэффициент при x^2 положителен при любом значении a , то условие задачи равносильно тому, что указанная функция в точке $x = 2$ принимает отрицательное значение. Решая неравенство, получаем, что $a \in (\frac{-19-\sqrt{249}}{8}; \frac{-19+\sqrt{249}}{8})$. В данном промежутке лежит 4 целых числа.

- (b) Найдите количество целых значений параметра a , при каждом из которых уравнение $(a^2 - a + 1)x^2 + (8a - 1)x + (2a + 1) = 0$ имеет два корня, один из которых больше 2, а другой — меньше 2.

Ответ: 3.

- (c) Найдите количество целых значений параметра a , при каждом из которых уравнение $(a^2 - a + 1)x^2 + (10a - 3)x + (a - 1) = 0$ имеет два корня, один из которых больше 3, а другой — меньше 3.

Ответ: 3.

- (d) Найдите количество целых значений параметра a , при каждом из которых уравнение $(a^2 + a + 1)x^2 + (11a + 2)x + (3a + 1) = 0$ имеет два корня, один из которых больше 3, а другой — меньше 3.

Ответ: 4.

2. (a) Найдите наибольшее натуральное k такое, что число $300^{2700} - 3^{2700}$ делится на 3^k .

Ответ: 2705.

Решение. $300^{2700} - 3^{2700} = 3^{2700}(10^{2700} - 1)(10^{2700} + 1)$. Число $10^{2700} - 1$ делится на 3. Поэтому число $10^{2700} + 1 = (10^{2700} - 1) + 2$ на 3 не делится. Десятичная степень числа $10^{2700} - 1$ состоит из 2700 девяток. Если его разделить на 9, мы получим число из 2700 единиц, которое делится на 27, но не делится на 81. Поэтому число $10^{2700} - 1$ делится на 3^5 , но не делится на 3^6 . Поэтому наибольшее подходящее $k = 2700 + 5 = 2705$.

- (b) Найдите наибольшее натуральное k такое, что число $300^{27027} - 3^{27027}$ делится на 3^k .

Ответ: 27032.

- (c) Найдите наибольшее натуральное k такое, что число $300^{5400} - 3^{5400}$ делится на 3^k .

Ответ: 5405.

- (d) Найдите наибольшее натуральное k такое, что число $300^{54054} - 3^{54054}$ делится на 3^k .

Ответ: 54059.

3. (a) Маша пишет в ряд крестики и нолики — всего 1000 символов. Оказалось, что количество символов между любыми двумя ноликами отлично от 12. Какое наибольшее количество ноликов могла написать Маша?

Ответ: 506.

Решение. Разобьем символы на цепочки символов, идущих через 12: 1-й, 14-й, 27-й, ..., 2-й, 15-й, ... и т. д. Таким образом мы получим 13 цепочек. Поскольку $1000 = 76 \cdot 13 + 12$, у нас будет 12 цепочек из 77 символов и одна из 76 символов. В каждой цепочке нолики не могут стоять рядом. Поэтому в любой цепочке длины 77 их наибольшее количество равно 39, а в цепочке длины 76 их наибольшее количество равно 38. Всего получится $39 \cdot 12 + 38 = 506$ ноликов.

- (b) Маша пишет в ряд крестики и нолики — всего 1000 символов. Оказалось, что количество символов между любыми двумя ноликами отлично от 10. Какое наибольшее количество ноликов могла написать Маша?

Ответ: 505.

- (c) Маша пишет в ряд крестики и нолики — всего 1200 символов. Оказалось, что количество символов между любыми двумя ноликами отлично от 12. Какое наибольшее количество ноликов могла написать Маша?

Ответ: 602.

- (d) Маша пишет в ряд крестики и нолики — всего 1300 символов. Оказалось, что количество символов между любыми двумя ноликами отлично от 10. Какое наибольшее количество ноликов могла написать Маша?

Ответ: 651.

4. (a) Числа a, b, c удовлетворяют равенству

$$10(a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)) = a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b),$$

причём обе части равенства ненулевые. Найдите наибольшее возможное значение суммы $S = a + b + c$.

Ответ: 0,1.

Решение. Заметим, что

$$a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = (a+b+c)(a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)),$$

поэтому $a + b + c = 0,1$.

- (b) Числа a, b, c удовлетворяют равенству

$$a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = 17(a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)),$$

причём обе части равенства ненулевые. Найдите наибольшее возможное значение суммы $S = a + b + c$.

Ответ: 17.

- (c) Числа a, b, c удовлетворяют равенству

$$20(a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)) = a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b),$$

причём обе части равенства ненулевые. Найдите наибольшее возможное значение суммы $S = a + b + c$.

Ответ: 0,05.

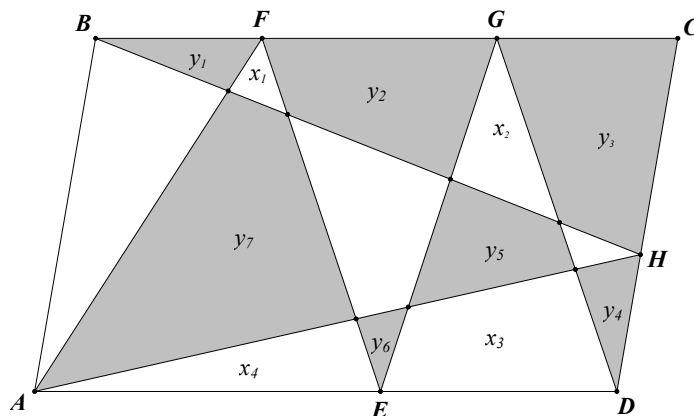
- (d) Числа a, b, c удовлетворяют равенству

$$a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = 26(a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)),$$

причём обе части равенства ненулевые. Найдите наибольшее возможное значение суммы $S = a + b + c$.

Ответ: 26.

5. (a) На сторонах параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E, F, G и H и соединены отрезками друг с другом и с вершинами параллелограмма, как показано на рисунке. Полученные в результате разбиения параллелограмма многоугольники раскрасили в шахматном порядке. Для всех частей, закрашенных серым цветом, кроме одной, Петя отметил на рисунке их площади $y_1, \dots, y_6$. Найдите площадь y_7 оставшейся серой части.

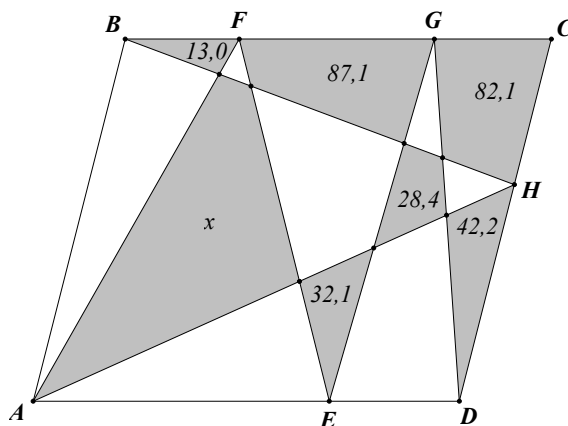


Решение. Сумма площадей $S_{AFE} + S_{EGD}$ равна половине площади параллелограмма. Ей же равна и сумма площадей $S_{BCH} + S_{ADH}$. Отсюда

$$x_1 + y_7 + x_4 + x_2 + y_5 + x_3 = y_1 + x_1 + y_2 + x_2 + y_3 + y_4 + x_3 + y_6 + x_4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_7 + y_5 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_6 \Rightarrow y_7 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_6 - y_5.$$

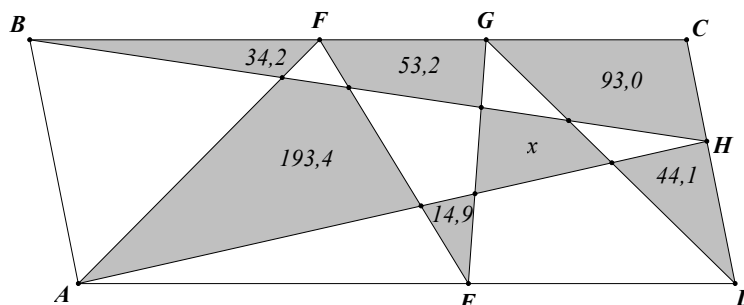
- (b) На сторонах параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E, F, G и H и соединены отрезками друг с другом и с вершинами параллелограмма, как показано на рисунке. Полученные в результате разбиения параллелограмма многоугольники раскрасили в шахматном порядке. Петя отметил на рисунке округлённые до десятых площади всех частей, закрашенных серым цветом, кроме одной. Найдите площадь x оставшейся серой части, округлённую до целого числа.



Ответ: 228.

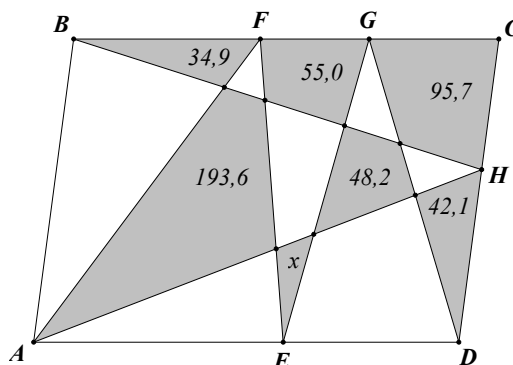
- (c) На сторонах параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E, F, G и H и соединены отрезками друг с другом и с вершинами параллелограмма, как показано на рисунке. Полученные в

результате разбиения параллелограмма многоугольники раскрасили в шахматном порядке. Петя отметил на рисунке округлённые **до десятых** площади всех частей, закрашенных серым цветом, кроме одной. Найдите площадь x оставшейся серой части, округлённую **до целого числа**.



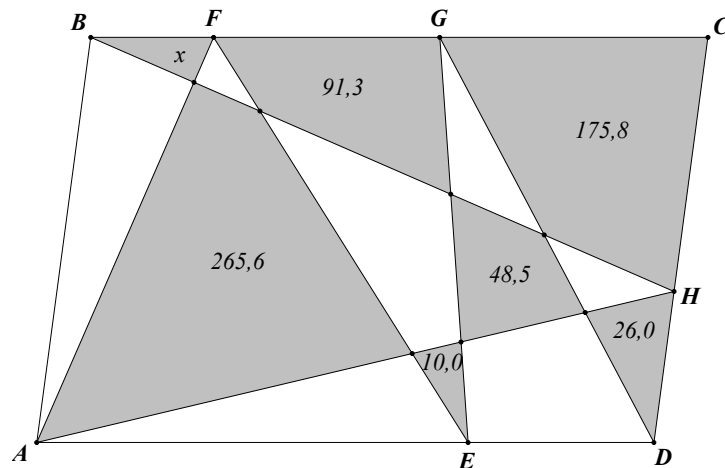
Ответ: 46.

- (d) На сторонах параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E, F, G и H и соединены отрезками друг с другом и с вершинами параллелограмма, как показано на рисунке. Полученные в результате разбиения параллелограмма многоугольники раскрасили в шахматном порядке. Петя отметил на рисунке округлённые **до десятых** площади всех частей, закрашенных серым цветом, кроме одной. Найдите площадь x оставшейся серой части, округлённую **до целого числа**.



Ответ: 14.

- (e) На сторонах параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E, F, G и H и соединены отрезками друг с другом и с вершинами параллелограмма, как показано на рисунке. Полученные в результате разбиения параллелограмма многоугольники раскрасили в шахматном порядке. Петя отметил на рисунке округлённые **до десятых** площади всех частей, закрашенных серым цветом, кроме одной. Найдите площадь x оставшейся серой части, округлённую **до целого числа**.



Ответ: 11.

6. (a) Рассматривают все непустые подмножества множества $T = \{1, 2, \dots, 100\}$. Для каждого из них вычисляют среднее арифметическое всех чисел этого подмножества. Пусть A — среднее арифметическое всех средних арифметических, вычисленных для подмножеств, содержащих число 40, а B — аналогичная величина для всех подмножеств, содержащих число 61. Найдите сумму $A + B$.

Ответ: 101.

Решение. Сопоставим каждому подмножеству $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ (кроме $\{1, 2, \dots, 100\}$) подмножество $\{101 - a_1, 101 - a_2, \dots, 101 - a_m\}$ (некоторым подмножествам будет сопоставлено оно же само). Назовем два сопоставленных друг другу подмножества *парой*. Сумма средних значений в любой такой паре равна 101. Для каждого из множеств, среднее которого участвует в вычислении величины A , второе множество из пары участвует в выражении для B , и наоборот. Поэтому в сумме $A + B$ каждая пара множеств указанного вида даёт вклад 101. Отметим также, что множество $\{1, 2, \dots, 100\}$ имеет среднее $101/2$, и учитывается в обеих величинах A и B . Поэтому сумма $A + B$ равна 101.

- (b) Рассматривают все непустые подмножества множества $T = \{1, 2, \dots, 200\}$. Для каждого из них вычисляют среднее арифметическое всех чисел этого подмножества. Пусть A — среднее арифметическое всех средних арифметических, вычисленных для подмножеств, содержащих число 45, а B — аналогичная величина для всех подмножеств, содержащих число 156. Найдите сумму $A + B$.

Ответ: 201.

- (c) Рассматривают все непустые подмножества множества $T = \{1, 2, \dots, 300\}$. Для каждого из них вычисляют среднее арифметическое всех чисел этого подмножества. Пусть A — среднее арифметическое всех средних арифметических, вычисленных для подмножеств, содержащих число 102, а B — аналогичная величина для всех подмножеств, содержащих число 199. Найдите сумму $A + B$.

Ответ: 301.

- (d) Рассматривают все непустые подмножества множества $T = \{1, 2, \dots, 500\}$. Для каждого из них вычисляют среднее арифметическое всех чисел этого подмножества. Пусть A — среднее арифметическое всех средних арифметических, вычисленных для подмножеств, содержащих число 161, а B — аналогичная величина для всех подмножеств, содержащих число 340. Найдите сумму $A + B$.

Ответ: 501.

7. (a) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω , а его диагональ AC — биссектриса угла BAD . Найдите радиус окружности ω , если $AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $AC = \frac{3}{2}$, $AD = \frac{5}{2\sqrt{2}}$. Ответ округлите до третьего знака после запятой.

Ответ: 0,885.

Решение. Пусть $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$, $BC = x$, $\angle ADC = \alpha$. Биссектриса AC делит дугу BD пополам, поэтому $CD = BC = x$. По теореме косинусов для треугольников ABC и ADC

$$\begin{cases} b^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cos(\pi - \alpha), \\ b^2 = c^2 + x^2 - 2cx \cos \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{b^2 - ac}, \\ \cos \alpha = \frac{c-a}{2\sqrt{b^2-ac}}. \end{cases}$$

По теореме синусов для треугольника ADC искомый радиус равен

$$\frac{b}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{b\sqrt{b^2 - ac}}{\sqrt{4b^2 - (a+c)^2}} = 3\sqrt{\frac{2}{23}}.$$

- (b) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω , а его диагональ AC — биссектриса угла BAD . Найдите радиус окружности ω , если $AB = \sqrt{2}$, $AC = 2$, $AD = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Ответ округлите до третьего знака после запятой.

Ответ: 1,069.

- (c) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω , а его диагональ AC — биссектриса угла BAD . Найдите радиус окружности ω , если $AB = \sqrt{2}$, $AC = 4$, $AD = \frac{7}{\sqrt{2}}$. Ответ округлите до третьего знака после запятой.

Ответ: 2,475.

- (d) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω , а его диагональ AC — биссектриса угла BAD . Найдите радиус окружности ω , если $AB = 3\sqrt{2}$, $AC = 5$, $AD = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Ответ округлите до третьего знака после запятой.

Ответ: 2,593.

8. (a) В течение $2N$ дней Петя планирует готовиться к экзаменам по N различным предметам, среди которых есть математика, физика и информатика. К каждому из экзаменов он будет готовиться ровно два дня, причём ни к математике, ни к физике, ни к информатике он не хочет готовиться два дня подряд, а каждый день он готовится только к одному предмету. Сколькими способами Петя может выбрать порядок, в котором он будет готовиться к экзаменам?

Решение. Всего способов выбрать порядок подготовки $\frac{(2N)!}{2^N}$. Требуемое количество способов вычислим по формуле включений и исключений: способов, в которых два дня подряд идёт подготовка к математике, всего $\frac{(2N-1)!}{2^{N-1}}$; тех, где по два дня подряд идёт подготовка и к математике, и к физике — всего $\frac{(2N-2)!}{2^{N-2}}$; наконец, тех, где ко всем трём выбранным предметам он готовится по два дня подряд, всего $\frac{(2N-3)!}{2^{N-3}}$. Поэтому ответ

$$\frac{(2N)!}{2^N} - C_3^1 \cdot \frac{(2N-1)!}{2^{N-1}} + C_3^2 \cdot \frac{(2N-2)!}{2^{N-2}} - C_3^3 \cdot \frac{(2N-3)!}{2^{N-3}}.$$

- (b) В течение 10 дней Петя планирует готовиться к экзаменам по 5 различным предметам, среди которых есть математика, физика и информатика. К каждому из экзаменов он будет

готовиться ровно два дня, причём ни к математике, ни к физике, ни к информатике он не хочет готовиться два дня подряд, а каждый день он готовится только к одному предмету. Сколькими способами Петя может выбрать порядок, в котором он будет готовиться к экзаменам?

Ответ: 59220.

- (с) В течение 12 дней Петя планирует готовиться к экзаменам по 6 различным предметам, среди которых есть математика, физика и информатика. К каждому из экзаменов он будет готовиться ровно два дня, причём ни к математике, ни к физике, ни к информатике он не хочет готовиться два дня подряд, а каждый день он готовится только к одному предмету. Сколькими способами Петя может выбрать порядок, в котором он будет готовиться к экзаменам?

Ответ: 4377240.

- (d) В течение 14 дней Петя планирует готовиться к экзаменам по 7 различным предметам, среди которых есть математика, физика и информатика. К каждому из экзаменов он будет готовиться ровно два дня, причём ни к математике, ни к физике, ни к информатике он не хочет готовиться два дня подряд, а каждый день он готовится только к одному предмету. Сколькими способами Петя может выбрать порядок, в котором он будет готовиться к экзаменам?

Ответ: 431600400.

- (е) В течение 16 дней Петя планирует готовиться к экзаменам по 8 различным предметам, среди которых есть математика, физика и информатика. К каждому из экзаменов он будет готовиться ровно два дня, причём ни к математике, ни к физике, ни к информатике он не хочет готовиться два дня подряд, а каждый день он готовится только к одному предмету. Сколькими способами Петя может выбрать порядок, в котором он будет готовиться к экзаменам?

Ответ: 54972918000.

9. (a) Последовательность x_n такова, что $x_0 = 2$, а для всех целых неотрицательных n

$$\frac{x_{n+1}}{4n^2 + 12n + 10} = \frac{x_n}{4n^2 + 4n + 2} - 1.$$

Найдите x_{100} .

Ответ: $x_n = (1 - n) \cdot (4n^2 + 4n + 2)$, $x_{100} = -3999798$.

Решение. После замены $y_n = \frac{x_n}{(2n+1)^2 + 1}$ получаем соотношение $y_{n+1} = y_n - 1$, откуда $y_n = 1 - n$. Тогда $x_n = (1 - n) \cdot (4n^2 + 4n + 2)$.

- (b) Последовательность x_n такова, что $x_0 = 2$, а для всех целых неотрицательных n

$$\frac{x_{n+1}}{9n^2 + 24n + 17} = \frac{x_n}{9n^2 + 6n + 2} - 2.$$

Найдите x_{110} .

Ответ: $x_n = (1 - 2n) \cdot (9n^2 + 6n + 2)$, $x_{110} = -23994078$.

- (с) Последовательность x_n такова, что $x_0 = 2$, а для всех целых неотрицательных n

$$\frac{x_{n+1}}{16n^2 + 40n + 26} = \frac{x_n}{16n^2 + 8n + 2} - 1.$$

Найдите x_{120} .

Ответ: $x_n = (1 - n) \cdot (16n^2 + 8n + 2)$, $x_{120} = -27532078$.

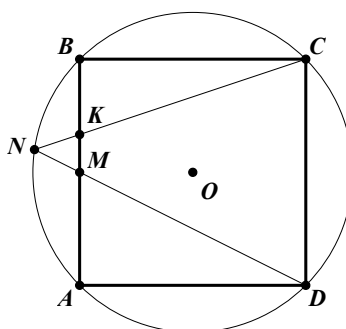
- (d) Последовательность x_n такова, что $x_0 = 2$, а для всех целых неотрицательных n

$$\frac{x_{n+1}}{25n^2 + 60n + 37} = \frac{x_n}{25n^2 + 10n + 2} - 2.$$

Найдите x_{130} .

Ответ: $x_n = (1 - 2n) \cdot (25n^2 + 10n + 2)$, $x_{130} = -109764718$.

10. (a) Квадрат $ABCD$ вписан в окружность с центром O , точка M — середина его стороны AB . На чертеже отметили точки N и K . Вычислите площадь квадрата $ABCD$, если расстояние $OK = L$.



Ответ: $\frac{18}{5}L^2$.

Решение. Пусть x — сторона квадрата. Найдем, в каком отношении точка K делит сторону AB . По теореме Пифагора длина DM равна $x\frac{\sqrt{5}}{2}$. Тогда из равенства произведений отрезков хорд $DM \cdot MN = AM \cdot MB = \frac{x^2}{4}$ следует, что $MN = \frac{x}{2\sqrt{5}}$. Треугольники NMK и NCD подобны с коэффициентом $\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{6}$, откуда $MK = \frac{x}{6}$. Итак, точка K делит сторону AB в отношении $2 : 1$, считая от вершины A . Запишем равенство произведения отрезков хорд AB и CN :

$$AK \cdot KB = \frac{x}{3} \cdot \frac{2x}{3} = R^2 - OK^2 = \frac{x^2}{2} - OK^2 \Rightarrow OK^2 = \frac{5}{18}x^2.$$

Отсюда площадь квадрата равна $x^2 = \frac{18}{5}OK^2$.

- (b) Квадрат $ABCD$ вписан в окружность с центром O , точка M — середина его стороны AB . На чертеже отметили точки N и K . Вычислите площадь квадрата $ABCD$, если расстояние $OK = 5$.

Ответ: 90.

- (c) Квадрат $ABCD$ вписан в окружность с центром O , точка M — середина его стороны AB . На чертеже отметили точки N и K . Вычислите площадь квадрата $ABCD$, если расстояние $OK = 15$.

Ответ: 810.

- (d) Квадрат $ABCD$ вписан в окружность с центром O , точка M — середина его стороны AB . На чертеже отметили точки N и K . Вычислите площадь квадрата $ABCD$, если расстояние $OK = 45$.

Ответ: 7290.

- (е) Квадрат $ABCD$ вписан в окружность с центром O , точка M — середина его стороны AB . На чертеже отметили точки N и K . Вычислите площадь квадрата $ABCD$, если расстояние $OK = 25$.

Ответ: 2250.