

1 9 класс

1. (a) Произведение двух натуральных чисел A и B — это четырёхзначное число, у которого первая цифра совпадает с третьей, а вторая совпадает с четвёртой. Какое наибольшее произведение могут иметь числа A и B , если известно, что $A + B$ меньше 195?

Ответ: 9393.

Решение. Четырёхзначное число, у которого первая цифра совпадает с третьей, а вторая совпадает с четвёртой, делится на 101. Так как 101 — простое число, то одно из чисел A и B делится на 101, а раз их сумма не превосходит 195, то одно из чисел равно 101. Поэтому другое не превосходит 93, а значит произведение не превосходит 9393. Пример: $101 \cdot 93$.

- (b) Произведение двух натуральных чисел A и B — это четырёхзначное число, у которого первая цифра совпадает с третьей, а вторая совпадает с четвёртой. Какое наибольшее произведение могут иметь числа A и B , если известно, что $A + B$ меньше 172?

Ответ: 7070.

- (c) Произведение двух натуральных чисел A и B — это четырёхзначное число, у которого первая цифра совпадает с третьей, а вторая совпадает с четвёртой. Какое наибольшее произведение могут иметь числа A и B , если известно, что $A + B$ меньше 183?

Ответ: 8181.

- (d) Произведение двух натуральных чисел A и B — это четырёхзначное число, у которого первая цифра совпадает с третьей, а вторая совпадает с четвёртой. Какое наибольшее произведение могут иметь числа A и B , если известно, что $A + B$ меньше 147?

Ответ: 4545.

2. (a) Миша выписал на доску 7 подряд идущих натуральных чисел и сложил их. Оказалось, что эта сумма заканчивается на 1230123. Какое наименьшее число могло быть среди выписанных на доске?

Ответ: 7318586.

Решение. Чем меньше числа на доске, тем меньше их сумма. Сумма $S = (n-3) + (n-2) + (n-1) + n + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 7n$ делится на 7. Поэтому число $S = \overline{a_1 \dots a_k 1230123}$ делится на 7. Наименьшим подходящим числом такого вида будет 51230123. Тогда $n = 51230123 : 7 = 7318589$ и $n-3 = 7318586$.

- (b) Миша выписал на доску 7 подряд идущих натуральных чисел и сложил их. Оказалось, что эта сумма заканчивается на 2025123. Какое наименьшее число могло быть среди выписанных на доске?

Ответ: 6003586.

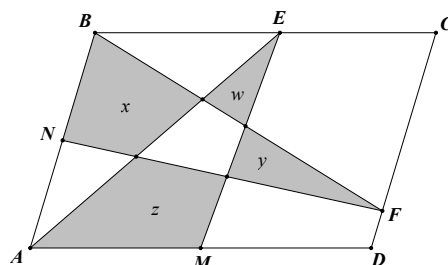
- (c) Миша выписал на доску 9 подряд идущих натуральных чисел и сложил их. Оказалось, что эта сумма заканчивается на 1230123. Какое наименьшее число могло быть среди выписанных на доске?

Ответ: 6803343.

- (d) Миша выписал на доску 9 подряд идущих натуральных чисел и сложил их. Оказалось, что эта сумма заканчивается на 2025123. Какое наименьшее число могло быть среди выписанных на доске?

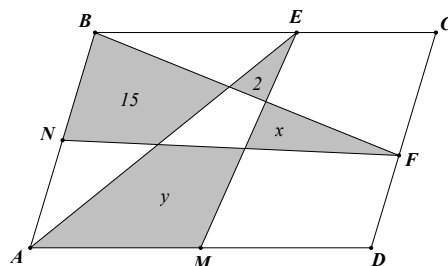
Ответ: 3558343.

3. (a) На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E и F , а на сторонах AD и AB — их середины M и N соответственно. Петя соединил некоторые из точек и закрасил четыре из полученных многоугольников, как показано на рисунке, после чего на двух из них написал их площади y и z , а две другие неизвестные отметил x и w . Найдите наименьшее возможное значение разности площадей $x - w$.



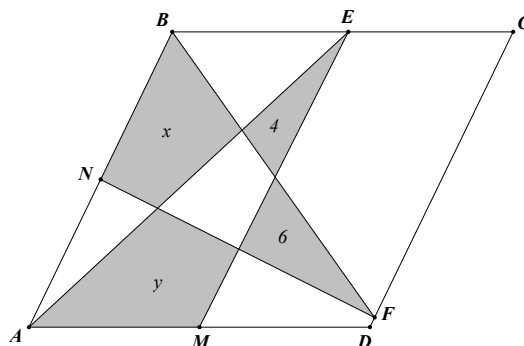
Решение. Площади треугольников BFN и AEM равны четверти площади параллелограмма $ABCD$. Отсюда следует, что $x + y = z + w$, то есть $x - w = z - y$.

- (b) На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E и F , а на сторонах AD и AB — их середины M и N соответственно. Петя соединил некоторые из точек и закрасил четыре из полученных многоугольников, как показано на рисунке, после чего на двух из них написал их площади, а две другие неизвестные отметил x и y . Найдите наибольшее возможное значение разности площадей $x - y$.



Ответ: -13 .

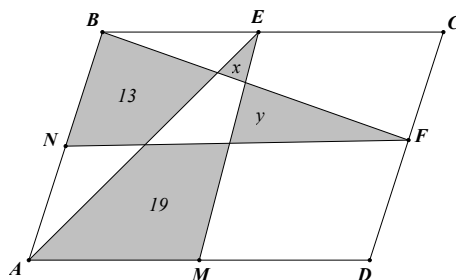
- (c) На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E и F , а на сторонах AD и AB — их середины M и N соответственно. Петя соединил некоторые из точек и закрасил четыре из полученных многоугольников, как показано на рисунке, после чего на двух из них написал их площади, а две другие неизвестные отметил x и y . Найдите наибольшее возможное значение разности площадей $x - y$.



Ответ: -2 .

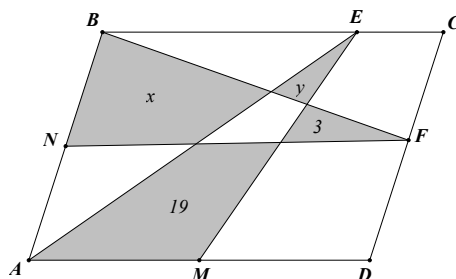
- (d) На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E и F , а на сторонах AD и AB — их середины M и N соответственно. Петя соединил некоторые из точек и закрасил четыре из полученных многоугольников, как показано на рисунке, после чего на двух из

них написал их площади, а две другие неизвестные отметил x и y . Найдите наибольшее возможное значение разности площадей $x - y$.



Ответ: -6 .

- (е) На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E и F , а на сторонах AD и AB — их середины M и N соответственно. Петя соединил некоторые из точек и закрасил четыре из полученных многоугольников, как показано на рисунке, после чего на двух из них написал их площади, а две другие неизвестные отметил x и y . Найдите наибольшее возможное значение разности площадей $y - x$.



Ответ: -16 .

4. (а) Найдите наименьшее положительное значение константы C такое, что при любых a и b выполняется неравенство $C + a^2 + b^2 \geq ab + a + b$.

Ответ: 1 .

Решение. $C \geq -a^2 - b^2 + ab + a + b = -\frac{1}{2}(a - b)^2 - \frac{1}{2}(a - 1)^2 - \frac{1}{2}(b - 1)^2 + 1$. Правая часть не превосходит 1 и при $a = 1$, $b = 1$ равна 1 . Таким образом, наименьшее положительное C это 1 .

- (b) Найдите наименьшее положительное значение константы C такое, что при любых a и b выполняется неравенство $C + a^2 + b^2 \geq ab - a - b + 1$.

Ответ: 2 .

- (c) Найдите наименьшее положительное значение константы C такое, что при любых a и b выполняется неравенство $C + a^2 + b^2 \geq ab + 2a + 2b - 3$.

Ответ: 1 .

- (d) Найдите наименьшее положительное значение константы C такое, что при любых a и b выполняется неравенство $C + a^2 + b^2 \geq ab - 2a - 2b - 2$.

Ответ: 2 .

5. (а) Трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 8$, $BC = 6$, вписана в окружность. Хорда EF окружности, содержащая среднюю линию трапеции, имеет длину $3\sqrt{11}$. Какую длину имеет хорда PQ , параллельная EF , проходящая через точку S на стороне AB такую, что $AS : BS = 4 : 3$? В ответ напишите квадрат искомой величины.

Ответ: 96 .

Решение. Пусть O — центр ω ; K , L и M — середины BC , AD и KL соответственно; R — радиус ω , $OK = x$, $OL = y$. По теореме Пифагора для треугольников OKC , OLD и OMF

$$\begin{cases} R^2 = x^2 + 9, \\ R^2 = y^2 + 16, \\ R^2 = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + \frac{99}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4, \\ y = 3, \\ R = 5. \end{cases}$$

По теореме Пифагора для треугольника ONQ

$$OQ^2 = NQ^2 + ON^2 \iff R^2 = \frac{PQ^2}{4} + \left(y - \frac{4}{7}(x+y)\right)^2 \implies PQ^2 = 96.$$

- (b) Трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 24$, $BC = 10$, вписана в окружность. Хорда EF окружности, содержащая среднюю линию трапеции, имеет длину $3\sqrt{43}$. Какую длину имеет хорда PQ , параллельная EF , проходящая через точку S на стороне AB такую, что $AS : BS = 4 : 3$? В ответ напишите квадрат искомой величины.

Ответ: 352.

- (c) Трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 8$, $BC = 6$, вписана в окружность. Хорда EF окружности, содержащая среднюю линию трапеции, имеет длину $3\sqrt{11}$. Какую длину имеет хорда PQ , параллельная EF , проходящая через точку S на стороне AB такую, что $AS : BS = 5 : 2$? В ответ напишите квадрат искомой величины.

Ответ: 84.

- (d) Трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 24$, $BC = 10$, вписана в окружность. Хорда EF окружности, содержащая среднюю линию трапеции, имеет длину $3\sqrt{43}$. Какую длину имеет хорда PQ , параллельная EF , проходящая через точку S на стороне AB такую, что $AS : BS = 6 : 1$? В ответ напишите квадрат искомой величины.

Ответ: 192.

6. (a) В окружность вписан правильный 24000-угольник $A_1A_2 \dots A_{24000}$. Вася начинает движение из точки A_1 и обходит окружность в направлении увеличения номеров вершин несколько раз. В процессе обхода он вычёркивает эти вершины: во время первого обхода вычёркиваются все A_k с чётными номерами, во время второго — все те из оставшихся, номера которых делятся на три, на третий обход вычёркиваются те вершины, номера которых делятся на четыре и так далее. Найдите номер вершины, которую Вася вычеркнет 16003-ей.

Ответ: 35.

Решение. Вершин с чётными номерами 12000, а вершин с номерами, кратными 3, но не 2 — всего $\frac{24000}{6} = 4000$. Остаётся найти третье по порядку число, которое кратно 5 и не кратно ни 2, ни 3: это число 35.

- (b) В окружность вписан правильный 4800-угольник $A_1A_2 \dots A_{4800}$. Вася начинает движение из точки A_1 и обходит окружность в направлении увеличения номеров вершин несколько раз. В процессе обхода он вычёркивает эти вершины: во время первого обхода вычёркиваются все A_k с чётными номерами, во время второго — все те из оставшихся, номера которых делятся на три, на третий обход вычёркиваются те вершины, номера которых делятся на четыре и так далее. Найдите номер вершины, которую Вася вычеркнет 3206-ой.

Ответ: 85.

- (с) В окружность вписан правильный 9600-угольник $A_1A_2 \dots A_{9600}$. Вася начинает движение из точки A_1 и обходит окружность в направлении увеличения номеров вершин несколько раз. В процессе обхода он вычёркивает эти вершины: во время первого обхода вычёркиваются все A_k с чётными номерами, во время второго — все те из оставшихся, номера которых делятся на три, на третий обход вычёркиваются те вершины, номера которых делятся на четыре и так далее. Найдите номер вершины, которую Вася вычеркнет 6405-ой.

Ответ: 65.

- (d) В окружность вписан правильный 72000-угольник $A_1A_2 \dots A_{72000}$. Вася начинает движение из точки A_1 и обходит окружность в направлении увеличения номеров вершин несколько раз. В процессе обхода он вычёркивает эти вершины: во время первого обхода вычёркиваются все A_k с чётными номерами, во время второго — все те из оставшихся, номера которых делятся на три, на третий обход вычёркиваются те вершины, номера которых делятся на четыре и так далее. Найдите номер вершины, которую Вася вычеркнет 48004-ой.

Ответ: 55.

7. (a) Треугольник XYZ равнобедренный ($\angle XYZ = \angle XZY = 35^\circ$). Внутри угла XYZ , но вне треугольника XYZ взята точка P так, что $\angle XPY = 22^\circ$, а $\angle ZPY = 55^\circ$. Найдите $\angle PYX$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 22.

Решение. Точка P лежит на окружности с центром X и радиусом XY , поскольку $\angle YXZ = 2\angle YPZ$. Значит, $XY = XZ = XP$. Из равнобедренного треугольника PXZ находим $\angle PZX = 77^\circ$, откуда $\angle PYZ = 180^\circ - \angle PZY - \angle YPZ = 13^\circ$. Тогда $\angle PYX = 35^\circ - 13^\circ = 22^\circ$.

- (b) Треугольник XYZ равнобедренный ($\angle XYZ = \angle XZY = 41^\circ$). Внутри угла XYZ , но вне треугольника XYZ взята точка P так, что $\angle XPY = 15^\circ$, а $\angle ZPY = 49^\circ$. Найдите $\angle PYX$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 15.

- (с) Треугольник XYZ равнобедренный ($\angle XYZ = \angle XZY = 51^\circ$). Внутри угла XYZ , но вне треугольника XYZ взята точка P так, что $\angle XPY = 13^\circ$, а $\angle ZPY = 39^\circ$. Найдите $\angle PYX$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 13.

- (d) Треугольник XYZ равнобедренный ($\angle XYZ = \angle XZY = 62^\circ$). Внутри угла XYZ , но вне треугольника XYZ взята точка P так, что $\angle XPY = 17^\circ$, а $\angle ZPY = 28^\circ$. Найдите $\angle PYX$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 17.

8. (a) У фокусника есть два набора по 40 карточек. На карточках каждого набора написаны различные натуральные числа от 1 до 40 (по одному числу на карточке). Фокусник перемешал карточки в каждом из наборов. После чего карточки первого набора он положил сверху на карточки второго набора. Затем он посчитал количество карточек, расположенных между парами карточек с одинаковыми числами и сложил полученные 40 чисел. Какую наименьшую сумму он мог получить?

Ответ: 1560.

Решение. Заметим, что каждое слагаемое в сумме — это количество карточек, расположенных от выбранной карточки из нижней половины, до середины стопки, к которому прибавили количество карточек от середины стопки до второй из выбранной пары карточек. Поэтому при

суммировании мы получим две перестановки слагаемых от 0 до 39. Поэтому ответ не зависит от расположения карточек: $2 \cdot (0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 39) = 39 \cdot 40 = 1560$.

- (b) У фокусника есть два набора по 50 карточек. На карточках каждого набора написаны различные натуральные числа от 1 до 50 (по одному числу на карточке). Фокусник перемешал карточки в каждом из наборов. После чего карточки первого набора он положил сверху на карточки второго набора. Затем он посчитал количество карточек, расположенных между парами карточек с одинаковыми числами и сложил полученные 50 чисел. Какую наименьшую сумму он мог получить?

Ответ: 2450.

- (c) У фокусника есть два набора по 60 карточек. На карточках каждого набора написаны различные натуральные числа от 1 до 60 (по одному числу на карточке). Фокусник перемешал карточки в каждом из наборов. После чего карточки первого набора он положил сверху на карточки второго набора. Затем он посчитал количество карточек, расположенных между парами карточек с одинаковыми числами и сложил полученные 60 чисел. Какую наименьшую сумму он мог получить?

Ответ: 3540.

- (d) У фокусника есть два набора по 70 карточек. На карточках каждого набора написаны различные натуральные числа от 1 до 70 (по одному числу на карточке). Фокусник перемешал карточки в каждом из наборов. После чего карточки первого набора он положил сверху на карточки второго набора. Затем он посчитал количество карточек, расположенных между парами карточек с одинаковыми числами и сложил полученные 70 чисел. Какую наименьшую сумму он мог получить?

Ответ: 4830.

9. (a) Рассматривают все непустые подмножества множества $\{1; 2; \dots; 150\}$. Для каждого из них находят среднее арифметическое всех чисел этого подмножества. Найдите среднее арифметическое всех этих средних арифметических.

Ответ: 75,5.

Решение. Разобьём все подмножества, кроме $\{1; 2; \dots; 150\}$, на пары $\{a \mid a \in T\}$ и $\{150 + 1 - a \mid a \in T\}$. Сумма и среднее арифметическое средних значений в любой такой паре равна 151 и 151/2 соответственно. Среднее значение во множестве $\{1; 2; \dots; 150\}$ также равно 151/2. Поэтому среднее значение всех средних значений равно 151/2.

- (b) Рассматривают все непустые подмножества множества $\{1; 2; \dots; 200\}$. Для каждого из них находят среднее арифметическое всех чисел этого подмножества. Найдите среднее арифметическое всех этих средних арифметических.

Ответ: 100,5.

- (c) Рассматривают все непустые подмножества множества $\{1; 2; \dots; 350\}$. Для каждого из них находят среднее арифметическое всех чисел этого подмножества. Найдите среднее арифметическое всех этих средних арифметических.

Ответ: 175,5.

- (d) Рассматривают все непустые подмножества множества $\{1; 2; \dots; 500\}$. Для каждого из них находят среднее арифметическое всех чисел этого подмножества. Найдите среднее арифметическое всех этих средних арифметических.

Ответ: 250,5.

10. (a) Вова задумал многочлен $Q(x)$ с целыми коэффициентами. Оказалось, что $Q(11) = Q(25) = 450$. Какое наименьшее значение может принимать его свободный член c , если $|c| < 150$?

Ответ: -100 .

Решение. Представим многочлен $Q(x)$ в виде $Q(x) = xR(x) + c$, где $R(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Тогда $Q(25) = 25n + c$, а $Q(11) = 11m + c$, где m и n – целые. Из условия получаем, что $25n = 11m$. Значит, $n = 11k$, $m = 25k$. Итак, $25 \cdot 11k + c = 450$, откуда $c = 450 - 275k$. Из условия $|c| < 150$ следует, что единственное подходящее $k = 2$, и $c = -100$.

Осталось заметить, что многочлен $Q(x) = -2x^2 + 72x - 100$ подходит.

- (b) Вова задумал многочлен $Q(x)$ с целыми коэффициентами. Оказалось, что $Q(31) = Q(40) = 3300$. Какое наименьшее значение может принимать его свободный член c , если $|c| < 500$?

Ответ: -420 .

- (c) Вова задумал многочлен $Q(x)$ с целыми коэффициентами. Оказалось, что $Q(17) = Q(30) = 999$. Какое наименьшее значение может принимать его свободный член c , если $|c| < 400$?

Ответ: -21 .

- (d) Вова задумал многочлен $Q(x)$ с целыми коэффициентами. Оказалось, что $Q(20) = Q(29) = 1500$. Какое наименьшее значение может принимать его свободный член c , если $|c| < 300$?

Ответ: -240 .