

3 11 класс

1. (a) Пару взаимно простых натуральных чисел a и b назовем *забавной*, если $|a - b| < 5$. Найдите количество забавных пар чисел (x, y) таких, что $60 \leq x < y \leq 160$.

Ответ: 262.

Решение. Разность $y - x$ может быть равна 1, 2, 3 или 4.

Если разность равна 1, то x и y всегда взаимно просты, и подходящих пар 100.

Если разность равна 2, то x и y взаимно просты, если x и y нечетны, и подходящих пар 49.

Если разность равна 3, то x и y взаимно просты, если x и y не делятся на 3, и подходящих пар 65.

Если разность равна 4, то x и y взаимно просты, если x и y нечетны, и подходящих пар 48.

Всего пар будет $100 + 49 + 65 + 48 = 262$.

- (b) Пару взаимно простых натуральных чисел a и b назовем *забавной*, если $|a - b| < 5$. Найдите количество забавных пар чисел (x, y) таких, что $75 \leq x < y \leq 190$.

Ответ: 303.

- (c) Пару взаимно простых натуральных чисел a и b назовем *забавной*, если $|a - b| < 5$. Найдите количество забавных пар чисел (x, y) таких, что $80 \leq x < y \leq 211$.

Ответ: 346.

- (d) Пару взаимно простых натуральных чисел a и b назовем *забавной*, если $|a - b| < 5$. Найдите количество забавных пар чисел (x, y) таких, что $92 \leq x < y \leq 170$.

Ответ: 204.

2. (a) Вася написал на доске выражение $31 + 32 + 33 + \dots + 100$, после чего стер из него несколько слагаемых (при необходимости вместе с идущими перед ними знаками). Значение получившегося после вычеркивания чисел выражения оказалось равно 4489. Сколькими способами Вася мог стереть числа с доски?

Ответ: 19.

Решение. Значение исходного выражения равно 4585. Поэтому нужно стереть несколько чисел (возможно, одно), дающих в сумме 96. То есть можно стереть либо одно число 96, либо одну из 17 пар чисел (47, 49), (46, 50), (45, 51), $\dots$ (31, 65), либо тройку чисел (31, 32, 33).

- (b) Вася написал на доске выражение $30 + 31 + 32 + \dots + 100$, после чего стер из него несколько слагаемых (при необходимости вместе с идущими перед ними знаками). Значение получившегося после вычеркивания чисел выражения оказалось равно 4522. Сколькими способами Вася мог стереть числа с доски?

Ответ: 19.

- (c) Вася написал на доске выражение $32 + 33 + 34 + \dots + 100$, после чего стер из него несколько слагаемых (при необходимости вместе с идущими перед ними знаками). Значение получившегося после вычеркивания чисел выражения оказалось равно 4455. Сколькими способами Вася мог стереть числа с доски?

Ответ: 20.

- (d) Вася написал на доске выражение $29 + 30 + 31 + \dots + 100$, после чего стер из него несколько слагаемых (при необходимости вместе с идущими перед ними знаками). Значение получившегося после вычеркивания чисел выражения оказалось равно 4554. Сколькими способами Вася мог стереть числа с доски?

Ответ: 18.

3. (a) В остроугольном треугольнике a, b, c — длины сторон, а α, β, γ — соответственно противолежащие им углы. Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$a(b^2 + c^2) \cos \alpha + b(c^2 + a^2) \cos \beta + c(a^2 + b^2) \cos \gamma,$$

если известно, что $abc = 2$?

Ответ: 6.

Решение. Обозначим данное выражение за $abcS$. Тогда трижды используя теорему косинусов для исходного треугольника перепишем S в следующем виде:

$$S = \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \cdot \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \cdot \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \cdot \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

Заметим, что первое произведение можно преобразовать следующим образом:

$$\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - \frac{a^2}{bc}\right) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2} - \frac{a^2}{c^2} - \frac{a^2}{b^2}\right).$$

После аналогичного преобразования второго и третьего произведения в S получаем, что $S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$. Поэтому исходное выражение равно 6.

- (b) В остроугольном треугольнике a, b, c — длины сторон, а α, β, γ — соответственно противолежащие им углы. Какое наименьшее значение может принимать выражение

$$a(b^2 + c^2) \cos \alpha + b(c^2 + a^2) \cos \beta + c(a^2 + b^2) \cos \gamma,$$

если известно, что $abc = 3$?

Ответ: 9.

- (c) В остроугольном треугольнике a, b, c — длины сторон, а α, β, γ — соответственно противолежащие им углы. Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$a(b^2 + c^2) \cos \alpha + b(c^2 + a^2) \cos \beta + c(a^2 + b^2) \cos \gamma,$$

если известно, что $abc = 4$?

Ответ: 12.

- (d) В остроугольном треугольнике a, b, c — длины сторон, а α, β, γ — соответственно противолежащие им углы. Какое наименьшее значение может принимать выражение

$$a(b^2 + c^2) \cos \alpha + b(c^2 + a^2) \cos \beta + c(a^2 + b^2) \cos \gamma,$$

если известно, что $abc = 5$?

Ответ: 15.

4. (a) Вычислите площадь множества точек, координаты которых $(x; y)$ удовлетворяют неравенству $|x - 1| + |x + 1| + 2|y| \leq 8$.

Ответ: 30.

Решение. Точка (x, y) лежит во множестве тогда и только тогда, когда в нём лежит любая из трёх точек $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$, поэтому множество симметрично относительно начала координат и обеих координатных осей, а поэтому достаточно определить точки этого множества при $x, y \geq 0$. В этом случае неравенство принимает вид $2y + x + 1 + |x - 1| \leq 8$. При $x \leq 1$ оно равносильно неравенству $y \leq 3$, а при $x \geq 1$ — неравенству $y \leq 4 - x$. Площадь четверти множества равна $3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{15}{2}$, поэтому площадь всего множества равна 30.

- (b) Вычислите площадь множества точек, координаты которых $(x; y)$ удовлетворяют неравенству $|x - 2| + |x + 2| + 2|y| \leq 8$.

Ответ: 24.

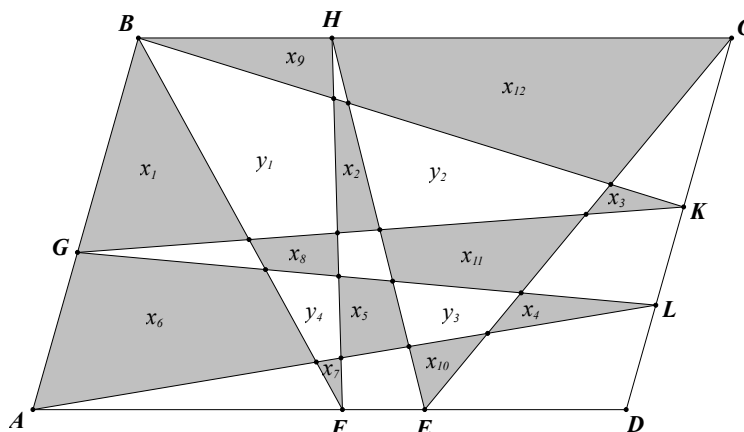
- (c) Вычислите площадь множества точек, координаты которых $(x; y)$ удовлетворяют неравенству $|x - 3| + |x + 3| + 2|y| \leq 10$.

Ответ: 32.

- (d) Вычислите площадь множества точек, координаты которых $(x; y)$ удовлетворяют неравенству $|x - 4| + |x + 4| + 2|y| \leq 10$.

Ответ: 18.

5. (a) На сторонах параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E, F, G, H, K и L , как показано на рисунке. Петя соединил некоторые из точек отрезками и раскрасил полученные многоугольники в шахматном порядке. После этого он написал на всех закрашенных многоугольниках, кроме одного, их площади $x_1, \dots, x_{11}$. Найдите оставшуюся площадь x_{12} .



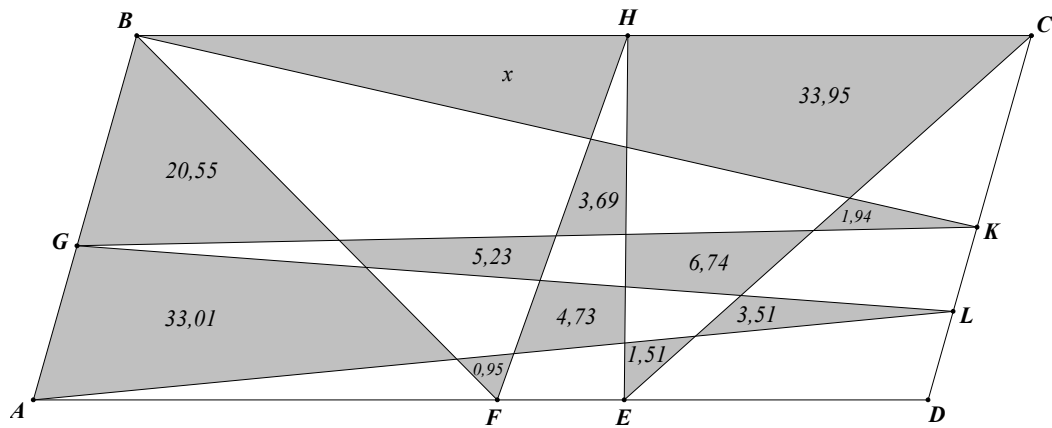
Решение. Суммы площадей треугольников $S_{BKG} + S_{GLA}$ и $S_{BHF} + S_{ENC}$ равны половине площади параллелограмма, откуда

$$\begin{aligned} x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + x_4 + y_3 + x_5 + y_4 + x_6 &= \\ &= x_7 + y_4 + x_8 + y_1 + x_9 + x_{10} + y_3 + x_{11} + y_2 + x_{12}, \end{aligned}$$

то есть

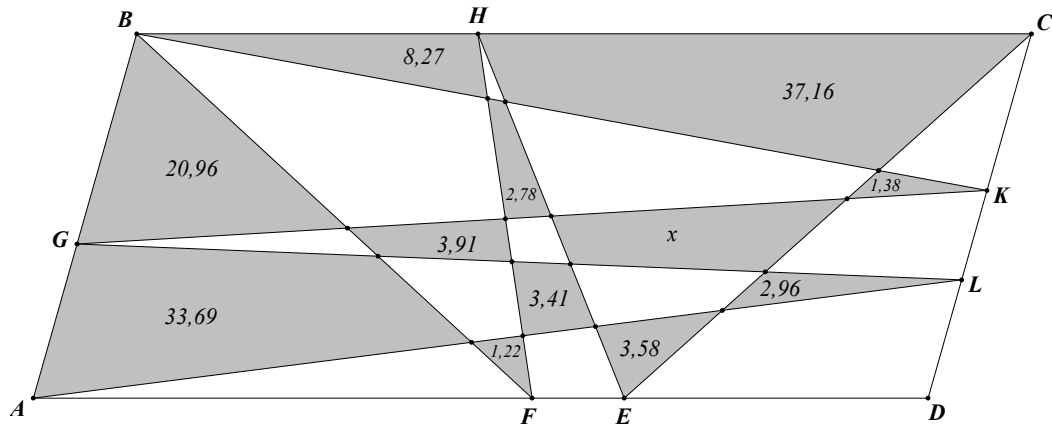
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12}.$$

- (b) На сторонах параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E, F, G, H, K и L , как показано на рисунке. Петя соединил некоторые из точек отрезками и раскрасил полученные многоугольники в шахматном порядке. После этого он написал на всех закрашенных многоугольниках, кроме одного, их площади, округлённые до сотых. Найдите оставшуюся площадь x , округлённую до целого числа.



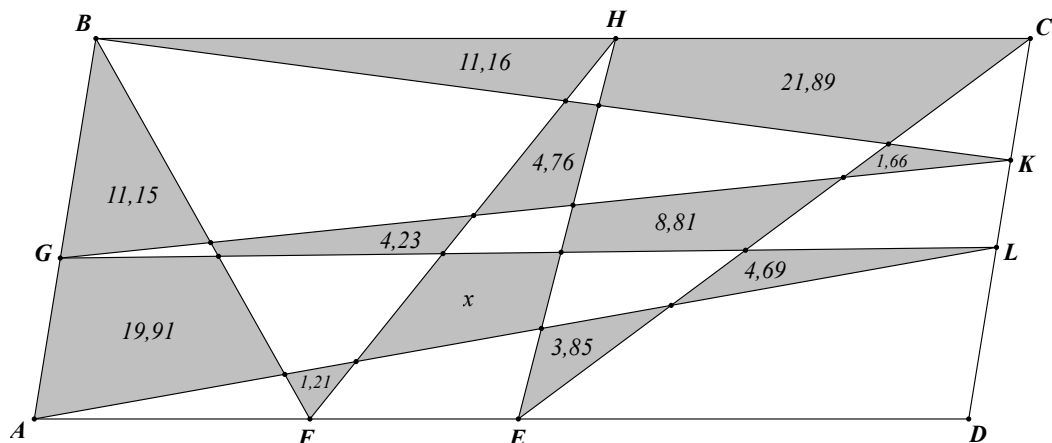
Ответ: 19.

- (с) На сторонах параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E, F, G, H, K и L , как показано на рисунке. Петя соединил некоторые из точек отрезками и раскрасил полученные многоугольники в шахматном порядке. После этого он написал на всех закрашенных многоугольниках, кроме одного, их площади, округлённые до сотых. Найдите оставшуюся площадь x , округлённую до целого числа.



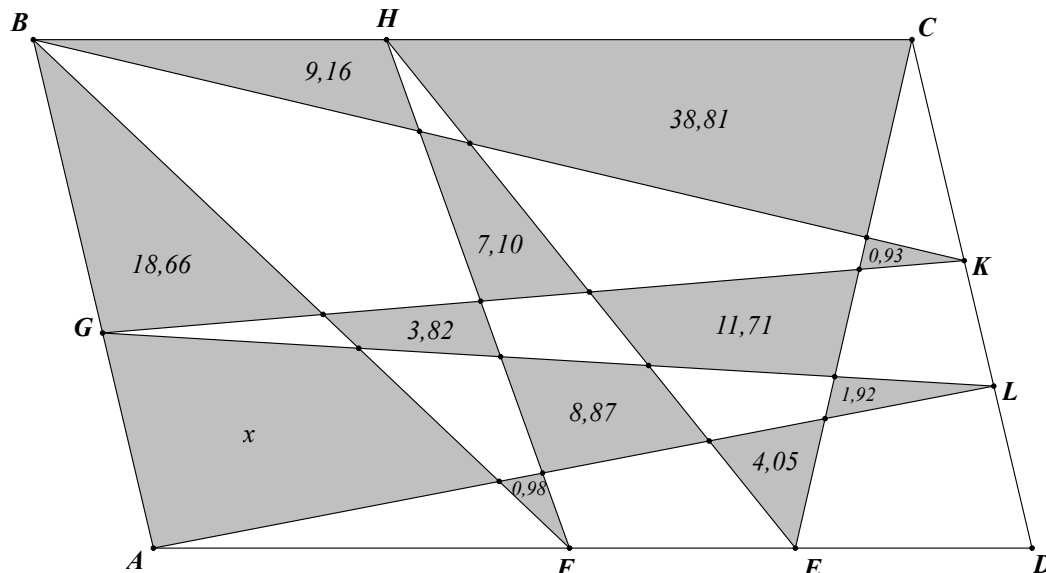
Ответ: 11.

- (d) На сторонах параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E, F, G, H, K и L , как показано на рисунке. Петя соединил некоторые из точек отрезками и раскрасил полученные многоугольники в шахматном порядке. После этого он написал на всех закрашенных многоугольниках, кроме одного, их площади, округлённые до сотых. Найдите оставшуюся площадь x , округлённую до целого числа.



Ответ: 9.

- (е) На сторонах параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E, F, G, H, K и L , как показано на рисунке. Петя соединил некоторые из точек отрезками и раскрасил полученные многоугольники в шахматном порядке. После этого он написал на всех закрашенных многоугольниках, кроме одного, их площади, округлённые до сотых. Найдите оставшуюся площадь x , округлённую до целого числа.



Ответ: 31.

6. (a) Найдите наибольшее натуральное k такое, что число $6400^{2001} - 16^{4002}$ делится на 4^k .

Ответ: 8005.

Решение. $4^{8004}(5^{4002} - 1) = 4^{8004}(5^{2001} - 1)(5^{2001} + 1)$. Заметим, что 5^{2k+1} при $k \geq 1$ заканчивается на 125, поэтому число в первой скобке заканчивается на 124 (и делится на 2^2 , но не на большую степень двойки), а число во второй скобке заканчивается на 126 и делится только на 2 в первой степени. Итого максимальная степень 4, на которую делится это число, есть $8004 + 1$.

- (b) Найдите наибольшее натуральное k такое, что число $30^{2034} - 6^{2034}$ делится на 4^k .

Ответ: 1018.

- (c) Найдите наибольшее натуральное k такое, что число $140^{10010} - 28^{10010}$ делится на 4^k .

Ответ: 10011.

- (d) Найдите наибольшее натуральное k такое, что число $3200^{2001} - 2^{14007}$ делится на 4^k .

Ответ: 7005.

7. (a) В окружности ω проведены три хорды AB, AC и AD так, что углы $\angle BAC$ и $\angle DAC$ равны между собой. Найдите хорду BD , если $AB = \sqrt{2}$, $AC = 3$, $AD = \frac{5}{\sqrt{2}}$. Ответ округлите до третьего знака после запятой.

Ответ: 3,300

Решение. Пусть $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$, $BC = x$, $\angle ADC = \alpha$. Биссектриса AC делит дугу BD пополам, поэтому

$$CD = BC = x. \quad (1)$$

По теореме косинусов для треугольников ABC и ADC

$$\begin{cases} b^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cos(\pi - \alpha), \\ b^2 = c^2 + x^2 - 2cx \cos \alpha \end{cases} \implies x = \sqrt{b^2 - ac}.$$

Отметим на луче AB за точку B точку K такую, что $BK = c$. Из вписанности четырёхугольника $ABCD$ следует, что углы KBC и ADC равны, из этого и из равенств (1) и $BK = AD = c$ следует, что равны треугольники KBC и ADC . Поэтому $KC = AC = b$, треугольник ACK равнобедренный и подобен треугольнику BCD . Отсюда

$$\frac{BD}{AK} = \frac{BC}{AC} \implies BD = \frac{(a+c)x}{b} = \frac{(a+c)\sqrt{b^2-ac}}{b} = \frac{7\sqrt{2}}{3}.$$

- (b) В окружности ω проведены три хорды AB , AC и AD так, что углы $\angle BAC$ и $\angle DAC$ равны между собой. Найдите хорду BD , если $AB = \sqrt{2}$, $AC = 2$, $AD = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Ответ округлите до третьего знака после запятой.

Ответ: 1,768

- (c) В окружности ω проведены три хорды AB , AC и AD так, что углы $\angle BAC$ и $\angle DAC$ равны между собой. Найдите хорду BD , если $AB = \sqrt{2}$, $AC = 4$, $AD = \frac{7}{\sqrt{2}}$. Ответ округлите до третьего знака после запятой.

Ответ: 4,773

- (d) В окружности ω проведены три хорды AB , AC и AD так, что углы $\angle BAC$ и $\angle DAC$ равны между собой. Найдите хорду BD , если $AB = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $AC = 5$, $AD = 3\sqrt{2}$. Ответ округлите до третьего знака после запятой.

Ответ: 5,091

8. (a) Петя записал на доске множество A всех натуральных чисел от 1 до 100. Затем Вася для всех непустых подмножеств множества A нашёл средние арифметические входящих в них чисел, после чего сообщил Пете число x — среднее арифметическое всех найденных им средних арифметических.

Затем Петя заменил в своем множестве A число 10 на число 1000, а Вася пересчитал ту же величину x для нового множества. На сколько увеличилось значение x ?

Ответ: 9,9.

Решение. Заметим, что для множества чисел $\{a_1, \dots, a_{100}\}$ значение x есть сумма вида

$$k_1 \cdot a_1 + k_2 \cdot a_2 + \dots + k_{100} \cdot a_{100},$$

т. е. каждый элемент множества даёт линейный вклад в эту величину. При этом в силу симметрии все коэффициенты $k_1, \dots, k_{100}$ равны одному и тому же числу k . Вычислим k из условия, что для множества $\{1, \dots, 100\}$ среднее значение средних значений $x = \frac{101}{2}$ (см. решение задачи 9 класса):

$$k \cdot (1 + 2 + \dots + 100) = \frac{101}{2} \implies k = \frac{1}{100}.$$

После замены числа 10 на 1000 величина x изменилась на $k \cdot (1000 - 10) = \frac{1000 - 10}{100} = 9,9$.

- (b) Петя записал на доске множество A всех натуральных чисел от 1 до 100. Затем Вася для всех непустых подмножеств множества A нашёл средние арифметические входящих в них

чисел, после чего сообщил Пете число x — среднее арифметическое всех найденных им средних арифметических.

Затем Петя заменил в своем множестве A число 20 на число 2000, а Вася пересчитал ту же величину x для нового множества. На сколько увеличилось значение x ?

Ответ: 19,8.

- (с) Петя записал на доске множество A всех натуральных чисел от 1 до 100. Затем Вася для всех непустых подмножеств множества A нашёл средние арифметические входящих в них чисел, после чего сообщил Пете число x — среднее арифметическое всех найденных им средних арифметических.

Затем Петя заменил в своем множестве A число 30 на число 1500, а Вася пересчитал ту же величину x для нового множества. На сколько увеличилось значение x ?

Ответ: 14,7.

- (d) Петя записал на доске множество A всех натуральных чисел от 1 до 100. Затем Вася для всех непустых подмножеств множества A нашёл средние арифметические входящих в них чисел, после чего сообщил Пете число x — среднее арифметическое всех найденных им средних арифметических.

Затем Петя заменил в своем множестве A число 50 на число 5000, а Вася пересчитал ту же величину x для нового множества. На сколько увеличилось значение x ?

Ответ: 49,5.

9. (а) В пирамиду $SABC$ вписан прямой круговой цилиндр так, что одно основание (с центром O) лежит в треугольнике ABC , а другое касается граней SAB , SAC и SBC . Высота пирамиды SH вдвое больше высоты цилиндра. Пусть M — геометрическое место точек H , а N — геометрическое место точек O . Найдите площадь M , если площадь N равна S .

Ответ: $S_M = 4S_N$.

Решение. M содержит всевозможные проекции вершин S на плоскость ABC для всех пирамид, для которых вписание указанного цилиндра возможно. Для того, чтобы можно было вписать такой цилиндр в пирамиду, необходимо и достаточно, чтобы вершина S проектировалась во внутреннюю часть треугольника ABC , поэтому $S_M = S_{ABC}$. Далее заметим, что плоскость верхнего основания цилиндра переводится в плоскость ABC гомотетией с центром S и коэффициентом 2, причем верхнее основание цилиндра при указанной гомотетии переходит во вписанную окружность треугольника ABC , поэтому радиус цилиндра равен половине радиуса этой окружности. Множество N состоит из всевозможных проекций центров верхнего основания цилиндра на плоскость основания, когда S пробегает всевозможные точки, проектируемые во внутреннюю часть треугольника ABC . Точка лежит в N в том и только том случае, когда она лежит внутри треугольника ABC , а расстояние от неё до любой из сторон не меньше радиуса цилиндра. Тем самым N есть треугольник, подобный ABC с коэффициентом $\frac{1}{2}$, его площадь равна $\frac{1}{4}S_{ABC}$.

- (b) В пирамиду $SABC$ вписан прямой круговой цилиндр так, что одно основание (с центром O) лежит в треугольнике ABC , а другое касается граней SAB , SAC и SBC . Высота пирамиды SH вдвое больше высоты цилиндра. Пусть M — геометрическое место точек H , а N — геометрическое место точек O . Найдите площадь M , если площадь N равна 5.

Ответ: 20.

- (с) В пирамиду $SABC$ вписан прямой круговой цилиндр так, что одно основание (с центром O) лежит в треугольнике ABC , а другое касается граней SAB , SAC и SBC . Высота

пирамиды SH вдвое больше высоты цилиндра. Пусть M — геометрическое место точек H , а N — геометрическое место точек O . Найдите площадь N , если площадь M равна 10.

Ответ: 2,5.

- (d) В пирамиду $SABC$ вписан прямой круговой цилиндр так, что одно основание (с центром O) лежит в треугольнике ABC , а другое касается граней SAB , SAC и SBC . Высота пирамиды SH вдвое больше высоты цилиндра. Пусть M — геометрическое место точек H , а N — геометрическое место точек O . Найдите площадь M , если площадь N равна 10.

Ответ: 40.

- (e) В пирамиду $SABC$ вписан прямой круговой цилиндр так, что одно основание (с центром O) лежит в треугольнике ABC , а другое касается граней SAB , SAC и SBC . Высота пирамиды SH вдвое больше высоты цилиндра. Пусть M — геометрическое место точек H , а N — геометрическое место точек O . Найдите площадь N , если площадь M равна 16.

Ответ: 4.

10. (a) Вася задал последовательность x_n следующим образом: $x_0 = 2$, а для любого натурального n

$$x_n = (n^4 - 2n^2 + 2) \left(\frac{x_{n-1}}{n^4 - 4n^3 + 4n^2 + 1} + 2 \right).$$

Чему равно значение x_{100} ?

Ответ: $x_n = (2n + 1) \cdot (n^4 - 2n^2 + 2)$, $x_{100} = 20095980402$.

Решение. Заметим, что $n^4 - 2n^2 + 2 = (n^2 - 1)^2 + 1$, а $n^4 - 4n^3 + 4n^2 + 1 = ((n - 1)^2 - 1)^2 + 1$. Сделаем замену $y_n = \frac{x_n}{(n^2 - 1)^2 + 1}$ и получим для последовательности y_n рекуррентное соотношение $y_n = y_{n-1} + 2$ и начальное условие $y_0 = 1$. Решением этого рекуррентного соотношения является арифметическая прогрессия $y_n = 2n + 1$. Тогда $x_n = (2n + 1) \cdot (n^4 - 2n^2 + 2)$.

- (b) Вася задал последовательность x_n следующим образом: $x_0 = 5$, а для любого натурального n

$$x_n = (n^4 - 4n^2 + 5) \cdot \left(\frac{x_{n-1}}{n^4 - 4n^3 + 2n^2 + 4n + 2} + 1 \right).$$

Чему равно значение x_{50} ?

Ответ: $x_n = (n + 1)((n^2 - 2)^2 + 1)$, $x_{50} = 318240255$.

- (c) Вася задал последовательность x_n следующим образом: $x_0 = 10$, а для любого натурального n

$$x_n = (n^4 - 6n^2 + 10) \cdot \left(\frac{x_{n-1}}{n^4 - 4n^3 + 8n + 5} + 2 \right).$$

Чему равно значение x_{120} ?

Ответ: $x_n = (2n + 1)((n^2 - 3)^2 + 1)$, $x_{120} = 49952940010$.

- (d) Вася задал последовательность x_n следующим образом: $x_0 = 17$, а для любого натурального n

$$x_n = (n^4 - 8n^2 + 17) \cdot \left(\frac{x_{n-1}}{n^4 - 4n^3 - 2n^2 + 12n + 10} + 1 \right).$$

Чему равно значение x_{80} ?

Ответ: $x_n = (n + 1)((n^2 - 4)^2 + 1)$, $x_{80} = 3313614177$.