11 КЛАСС. Вариант 5

1. [4 балла] Решите уравнение $3\operatorname{tg}2x+1=\operatorname{tg}\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Решение. Рассмотрим два случая.

1) $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Тогда справедливы формулы $\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}$ и $\operatorname{tg}\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}}=\frac{\operatorname{tg}x-1}{1+\operatorname{tg}x}$. (Отметим, что при $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ правые части формул не определены – именно поэтому этот случай необходимо рассмотреть отдельно.) Подставляем полученные величины в исходное уравнение и решаем его:

$$\frac{6\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}+1=\frac{\operatorname{tg}x-1}{1+\operatorname{tg}x}\Leftrightarrow\frac{4\operatorname{tg}x+2}{\operatorname{tg}^2x-1}=0\Leftrightarrow\operatorname{tg}x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Подстановкой убеждаемся, что эти значения являются решениями уравнения.

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a;b;c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150}\cdot3^{150}$?

Ответ: 20 402.

Решение. 1) Найдём сначала количество троек натуральных чисел. Пусть $a=2^{x_1}3^{y_1}$, $b=2^{x_2}3^{y_2}$, $c=2^{x_3}3^{y_3}$, где x_i, y_i – целые неотрицательные числа. Тогда $x_1+x_2+x_3=150$ и $y_1+y_2+y_3=150$. Числа a, b, c составляют в указанном порядке геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $b^2=ac$, откуда $2x_2=x_1+x_3$ и $2y_2=y_1+y_3$. Из полученных уравнений $x_2=y_2=50$, $x_1+x_3=100$, $y_1+y_3=100$. Посчитаем количество решений этой системы. Есть 101 способ выбрать пару чисел $(x_1;x_3)$ – действительно, x_1 можно взять любым целым числом из отрезка $[0;100]$, после чего x_3 определяется однозначно. Аналогично, пару $(y_1;y_3)$ можно выбрать 101 способом. Перемножая, получаем $101^2=10\,201$ способ.

2) Если рассматривать также отрицательные значения переменных, то можно заметить, что подходят все тройки чисел вида $(-a;b;-c)$, где a, b, c положительны и составляют геометрическую прогрессию. Таких троек ровно столько, сколько и в первом случае, поэтому окончательно имеем 20 402 тройки.

3. [5 баллов] Решите неравенство $\ln^2x-(x-1)\ln(2x)+(\ln2)\ln x\geqslant0$.

Ответ: $x\in\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup\{1\}$.

Решение. Преобразуем левую часть неравенства:

$$\ln^2x-(x-1)\ln(2x)+(\ln2)\ln x=\ln^2x-(x-1)\ln2-(x-1)\ln x+(\ln2)\ln x=$$
$$=(\ln2)(\ln x-x+1)+(\ln x)(\ln x-x+1)=(\ln x-(x-1))(\ln x+\ln2)=(\ln x-x+1)\ln(2x).$$

Заметим, что $\ln x-x+1\leqslant0$ при всех $x>0$, причём равенство достигается только при $x=1$. Для этого рассмотрим функцию $\psi(x)=\ln x-x+1$. Она определена при $x>0$, а её производная равна $\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$. На интервале $(0;1)$ производная положительна и функция возрастает, а на луче $(1;+\infty)$ производная отрицательна и функция убывает. Так как $\psi(1)=0$, то отсюда следует, что $\psi(x)<0$ при $x>0$, $x\neq1$.

Таким образом, неравенство равносильно следующему:

$$\left[\begin{array}{l}\ln x-x+1=0,\\ \ln(2x)\leqslant0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\ 0<2x\leqslant1\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup\{1\}.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -4x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

Ответ: $a = \frac{257}{60}$, $S = \frac{289}{30}$.

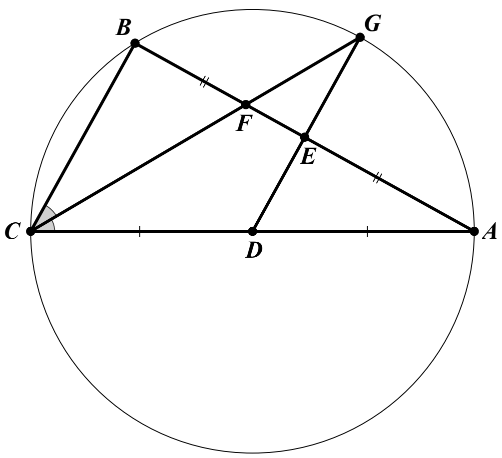
Решение. Пусть A и B – вершины квадрата, лежащие в первой и четвёртой четвертях соответственно; O – начало координат.
По условию, точка B лежит на прямой $y = -4x$. Если x_0 – абсцисса точки B, то $x_0 > 0$, а координаты точки B – это $(x_0; -4x_0)$. Так как точка A получается из B поворотом на $90°$ против часовой стрелки, то её координаты есть $(4x_0; x_0)$. Поскольку обе точки лежат на графике $y = x^3 - ax$, получаем и решаем систему уравнений (учитываем, что $x_0 \neq 0$)

$$\begin{cases} -4x_0 = x_0^3 - ax_0, \\ x_0 = 64x_0^3 - 4ax_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x_0^2 + 4, \\ 4a = 64x_0^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x_0^2 + 4, \\ 4x_0^2 + 16 = 64x_0^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = \frac{17}{60}, \\ a = \frac{289}{60}. \end{cases}$$

Пусть $OA = d$ – половина диагонали квадрата. Тогда $OA^2 = (4x_0)^2 + x_0^2 = 17x_0^2$, а площадь квадрата S равна полупроизведению его диагоналей, т.е. $S = \frac{1}{2} \cdot 2d \cdot 2d = 2d^2 = \frac{289}{30}$.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC. Лучи DE и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $\frac{CF}{DF} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\angle B = 90°$, $\angle C = \arccos \frac{1}{7}$, $\angle A = \arcsin \frac{1}{7}$.



Решение. CG – биссектриса угла ACB, поэтому дуги AG и GB равны, а также равны одноимённые им хорды. Значит, треугольник AGB равнобедренный, и его медиана GE является также и высотой. DE – средняя линия треугольника ABC, поэтому $DE \parallel BC$ и $\angle ABC = \angle AED = 90°$ как соответственные. Пусть $CB = 2a$, $\angle ACB = 2\alpha$. Тогда $CF = \frac{2a}{\cos\alpha}$, $AC = \frac{2a}{\cos 2\alpha}$, $CD = \frac{a}{\cos 2\alpha}$, $DF = 2CF = \frac{4a}{\cos\alpha}$. По теореме косинусов для треугольника CDF имеем $DF^2 = CF^2 + CD^2 - 2CF \cdot CD \cos\alpha$. Подставляя сюда выражения для сторон, найденные выше, получаем уравнение

$$\frac{16a^2}{\cos^2\alpha} = \frac{4a^2}{\cos^2\alpha} + \frac{a^2}{\cos^2 2\alpha} - 2\frac{2a}{\cos\alpha} \cdot \frac{a}{\cos 2\alpha}\cos\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{12}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2 2\alpha} + \frac{4}{\cos 2\alpha} = 0.$$

Умножая обе части уравнения на $2\cos^2 2\alpha \cos^2\alpha$, имеем

$$24\cos^2 2\alpha - 2\cos^2\alpha + 8\cos 2\alpha\cos^2\alpha = 0 \Leftrightarrow 24\cos^2 2\alpha - (1 + \cos 2\alpha) + 4\cos 2\alpha(1 + \cos 2\alpha) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 28\cos^2 2\alpha + 3\cos 2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2\alpha = -\frac{1}{4}, \\ \cos 2\alpha = \frac{1}{7}. \end{array}\right.$$

Так как 2α – острый угол прямоугольного треугольника, то $\cos 2\alpha > 0$, поэтому $2\alpha = \arccos\frac{1}{7}$. Тогда угол A треугольника равен $\arcsin\frac{1}{7}$.

6. [5 баллов] Числа x, y и z не все равны между собой, и при этом $x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 + \frac{7}{z^3} = z^3 + \frac{7}{x^3}$. Найдите минимально возможное значение произведения xyz.

Ответ: -2.

Решение. Перепишем исходную цепочку равенств в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = \frac{7}{z^3} - \frac{7}{y^3}, \\ y^3 - z^3 = \frac{7}{x^3} - \frac{7}{z^3}, \\ z^3 - x^3 = \frac{7}{y^3} - \frac{7}{x^3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = \frac{7\left(y^3 - z^3\right)}{y^3 z^3}, \\ y^3 - z^3 = \frac{7\left(z^3 - x^3\right)}{x^3 z^3}, \\ z^3 - x^3 = \frac{7\left(x^3 - y^3\right)}{x^3 y^3}. \end{cases}$$

Заметим, что числа x, y, z попарно различны. Действительно, если, к примеру, $z = x$, то третье уравнение системы принимает вид $0 = \frac{7\left(x^3 - y^3\right)}{x^3 y^3}$, поэтому $x = y$ и все три числа совпадают, что противоречит условию. Перемножая все уравнения этой системы, имеем

$$\left(x^3 - y^3\right)\left(y^3 - z^3\right)\left(z^3 - x^3\right) = \frac{343\left(x^3 - y^3\right)\left(y^3 - z^3\right)\left(z^3 - x^3\right)}{x^6 y^6 z^6}.$$

Так как числа попарно различны, то $(xyz)^6 = 343$, то есть $xyz = \pm\sqrt{7}$.
Покажем, что у исходной системы существует решение $(x_0; y_0; z_0)$ такое, что $x_0 y_0 z_0 = -\sqrt{7}$. (Строго говоря, выше мы получили, что если система имеет решения, то для этих решений либо $xyz = \sqrt{7}$, либо $xyz = -\sqrt{7}$. Может оказаться так, что у системы решений нет вовсе или так, что для любого решения системы произведение xyz равно $\sqrt{7}$.)
Возьмём, например, $y_0 = -\sqrt[6]{7}$ и оставим только первые два уравнения системы (третье уравнение является их следствием). Она принимает вид

$$\begin{cases} x^3 + \sqrt{7} = \frac{7}{z^3} + \sqrt{7}, \\ -\sqrt{7} - z^3 = \frac{7}{x^3} - \frac{7}{z^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = \frac{7}{z^3}, \\ 2z^6 + \sqrt{7}z^3 - 7 = 0. \end{cases}$$

У этой системы есть решение $z_0 = \sqrt[6]{\frac{7}{4}}$, $x_0 = \sqrt[6]{28}$. Итак, для тройки чисел $\left(\sqrt[6]{28}; -\sqrt[6]{7}; \sqrt[6]{\frac{7}{4}}\right)$ выражение xyz достигает минимального значения $-\sqrt{7}$.

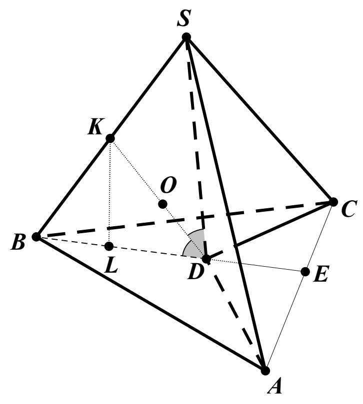
7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{5}$, $AD = DC = \sqrt{2}$, $AC = 2$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2 + \sqrt{5}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB, SBC и ребра SD.

Ответ: а) $\frac{1}{\sqrt{3}}$, б) $\frac{\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}$.

Решение. а) Предположим, что четырёхугольник $ABCD$ – выпуклый, а E – точка пересечения его диагоналей. Тогда $BD = EB + ED = \sqrt{AB^2 - \frac{AC^2}{4}} + \sqrt{AD^2 - \frac{AC^2}{4}} = 2 + 1 = 3$, значит, $DA + DB = 3 + \sqrt{2} > 2 + \sqrt{5} = SA + SB$. Однако $SA > DA$ и $SB > DB$ (наклонная длиннее проекции), то есть $SA + SB > DA + DB$ – противоречие. Следовательно, четырёхугольник $ABCD$ – невыпуклый, а так как треугольники ABC и ADC равнобедренные с общим основанием AC и $AD < AB$, то точка D лежит внутри треугольника ABC.



Далее имеем $BD = EB - ED = 2 - 1 = 1$, откуда $SA + SB = \sqrt{SD^2 + AD^2} + \sqrt{SD^2 + DB^2} = \sqrt{SD^2 + 2} + \sqrt{SD^2 + 1} = 2 + \sqrt{5}$.
Решая это уравнение, находим, что $SD = \sqrt{3}$ (можно подобрать корень, а для доказательства его единственности воспользоваться монотонностью левой части при $SD > 0$) и тогда $SB = 2$, $SA = SC = \sqrt{5}$. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, поэтому его

площадь равна половине их произведения: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = 1$. Следовательно, объём пирамиды есть $V_{SACBD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SD = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

б) Существует единственный такой шар, причём в силу симметрии пирамиды относительно плоскости SBD центр шара лежит в этой плоскости. Так как шар касается граней пирамиды, то его центр O лежит внутри треугольника SBD, а он касается отрезков SD и BD. Отсюда следует, что точка O лежит на биссектрисе DK треугольника SBD.

Пусть L – проекция точки K на плоскость основания пирамиды. Тогда из подобия треугольников BKL и BSD имеем $KL = SD \cdot \frac{BK}{BS} = SD \cdot \frac{BK}{BK+KS}$, а по свойству биссектрисы треугольника $\frac{BK}{BK+KS} = \frac{BD}{BD+DS} = \frac{1}{1+\sqrt{3}}$, поэтому $KL = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$. Значит, расстояние от точки O до прямой BD (т.е. радиус шара) равно $KL \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{OD}{KD}$.

С другой стороны, радиус шара равен расстоянию от точки O до плоскости SBC. Чтобы выразить это расстояние, сначала найдём высоту DM в треугольной пирамиде $SBCD$. Объём этой пирамиды равен $V_{SBCD} = \frac{1}{2} V_{SABCD} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Так как $SC = BC = \sqrt{5}$, а $SB = 2$, то $S_{SBC} = 2$. Тогда $V_{SBCD} = \frac{1}{3} \cdot DM \cdot S_{SBC}$, откуда $DM = \frac{3V_{SBCD}}{S_{SBC}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Тогда расстояние от точки O до плоскости SBC равно $DM \cdot \frac{OK}{KD} = DM\left(1 - \frac{OD}{KD}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 - \frac{OD}{KD}\right)$. Теперь приравняем два полученных выражения для радиуса шара:

$$\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 - \frac{OD}{KD}\right) \Leftrightarrow \frac{OD}{KD} = \frac{1+\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}.$$

Итак, радиус шара равен $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}$.

11 КЛАСС. Вариант 6

1. [4 балла] Решите уравнение $4\operatorname{tg}2x+1+\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Решение. Рассмотрим два случая.

1) $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. Тогда справедливы формулы $\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}$ и $\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}$. (Отметим, что при $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ правые части формул не определены – именно поэтому этот случай необходимо рассмотреть отдельно.) Подставляем полученные величины в исходное уравнение и решаем его:

$$\frac{8\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}+1+\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}\Leftrightarrow\frac{6\operatorname{tg}x+2}{\operatorname{tg}^2x-1}=0\Leftrightarrow\operatorname{tg}x=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. Подстановкой убеждаемся, что эти значения являются решениями уравнения.

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a;b;c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $3^{240}\cdot7^{240}$?

Ответ: 51 842.

Решение. 1) Найдём сначала количество троек натуральных чисел. Пусть $a=3^{x_1}7^{y_1}$, $b=3^{x_2}7^{y_2}$, $c=3^{x_3}7^{y_3}$, где x_i, y_i – целые неотрицательные числа. Тогда $x_1+x_2+x_3=240$ и $y_1+y_2+y_3=240$. Числа a, b, c составляют в указанном порядке геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $b^2=ac$, откуда $2x_2=x_1+x_3$ и $2y_2=y_1+y_3$. Из полученных уравнений $x_2=y_2=80$, $x_1+x_3=160$, $y_1+y_3=160$. Посчитаем количество решений этой системы. Есть 161 способ выбрать пару чисел $(x_1;x_3)$ – действительно, x_1 можно взять любым целым числом из отрезка $[0;160]$, после чего x_3 определяется однозначно. Аналогично, пару $(y_1;y_3)$ можно выбрать 161 способом. Перемножая, получаем $161^2=25\,921$ способ.
2) Если рассматривать также отрицательные значения переменных, то можно заметить, что подходят все тройки чисел вида $(-a;b;-c)$, где a, b, c положительны и составляют геометрическую прогрессию. Таких троек ровно столько, сколько и в первом случае, поэтому окончательно имеем 51 842 тройки.

3. [5 баллов] Решите неравенство $\ln^2(x+2)-(x+1)\ln(4x+8)+(\ln4)\ln(x+2)\geqslant0$.

Ответ: $x\in\left(-2;-\frac{7}{4}\right]\cup\{-1\}$.

Решение. Преобразуем левую часть неравенства:

$$\begin{aligned}\ln^2(x+2)-(x+1)\ln(4x+8)+(\ln4)\ln(x+2)&=\ln^2(x+2)-(x+1)\ln4-(x+1)\ln(x+2)+\\+(\ln4)\ln(x+2)&=(\ln4)(\ln(x+2)-x-1)+(\ln(x+2))(\ln(x+2)-x-1)=\\&=(\ln(x+2)-(x+1))(\ln(x+2)+\ln4)=(\ln(x+2)-x-1)\ln(4x+8).\end{aligned}$$

Заметим, что $\ln(x+2)-x-1\leqslant0$ при всех $x>-2$, причём равенство достигается только при $x=-1$. Для этого рассмотрим функцию $\psi(x)=\ln(x+2)-x-1$. Она определена при $x>-2$, а её производная равна $\frac{1}{x+2}-1=\frac{-1-x}{x+2}$. На интервале $(-2;-1)$ производная положительна и функция возрастает, а на луче $(-1;+\infty)$ производная отрицательна и функция убывает. Так как $\psi(-1)=0$, то отсюда следует, что $\psi(x)<0$ при $x>-2$, $x\neq-1$.
Таким образом, неравенство равносильно следующему:

$$\left[\begin{array}{l}\ln(x+2)-x-1=0,\\ \ln(4x+8)\leqslant0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1,\\ 0<4x+8\leqslant1\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\left(-2;-\frac{7}{4}\right]\cup\{1\}.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y=-2x^3-ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y=5x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

Ответ: $a=-\frac{313}{60}$, $S=\frac{169}{30}$.

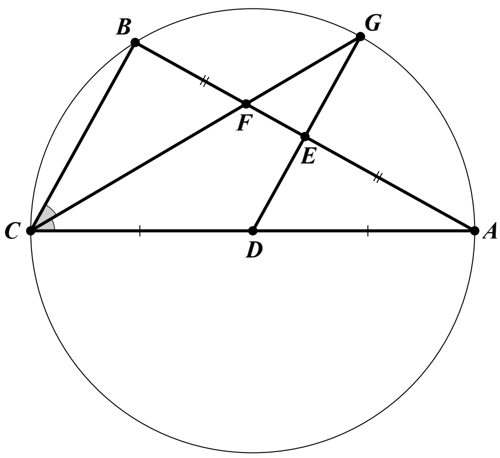
Решение. Пусть A и B – вершины квадрата, лежащие в первой и четвёртой четвертях соответственно; O – начало координат.
По условию, точка A лежит на прямой $y=5x$. Если x_0 – абсцисса точки A, то $x_0>0$, а координаты точки A – это $(x_0;5x_0)$. Так как точка B получается из A поворотом на 90° по часовой стрелке, то её координаты есть $(5x_0;-x_0)$. Поскольку обе точки лежат на графике $y=-2x^3-ax$, получаем и решаем систему уравнений (учитываем, что $x_0\neq 0$)

$$\begin{cases}5x_0=-2x_0^3-ax_0,\\ -x_0=-250x_0^3-5ax_0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2x_0^2-5,\\ 5a=1-250x_0^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2x_0^2-5,\\ -10x_0^2-25=1-250x_0^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2=\frac{13}{120},\\ a=-\frac{313}{60}.\end{cases}$$

Пусть $OA=d$ – половина диагонали квадрата. Тогда $OA^2=(5x_0)^2+x_0^2=26x_0^2$, а площадь квадрата S равна полупроизведению его диагоналей, т.е. $S=\frac{1}{2}\cdot 2d\cdot 2d=2d^2=\frac{169}{30}$.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC. Лучи DE и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $\frac{CF}{DF}=\sqrt{\frac{2}{11}}$.

Ответ: $\angle B=90^\circ$, $\angle C=\arccos\frac{1}{8}$, $\angle A=\arcsin\frac{1}{8}$.



Решение. CG – биссектриса угла ACB, поэтому дуги AG и GB равны, а также равны одноимённые им хорды. Значит, треугольник AGB равнобедренный, и его медиана GE является также и высотой. DE – средняя линия треугольника ABC, поэтому $DE\parallel BC$ и $\angle ABC=\angle AED=90^\circ$ как соответственные. Пусть $CB=2a$, $\angle ACB=2\alpha$. Тогда $CF=\frac{2a}{\cos\alpha}$, $AC=\frac{2a}{\cos 2\alpha}$, $CD=\frac{a}{\cos 2\alpha}$, $DF=\sqrt{\frac{11}{2}}CF=\frac{\sqrt{22}a}{\cos\alpha}$. По теореме косинусов для треугольника CDF имеем $DF^2=CF^2+CD^2-2CF\cdot CD\cos\alpha$. Подставляя сюда выражения для сторон, найденные выше, получаем уравнение

$$\frac{22a^2}{\cos^2\alpha}=\frac{4a^2}{\cos^2\alpha}+\frac{a^2}{\cos^2 2\alpha}-2\frac{2a}{\cos\alpha}\cdot\frac{a}{\cos 2\alpha}\cos\alpha\Leftrightarrow\frac{18}{\cos^2\alpha}-\frac{1}{\cos^2 2\alpha}+\frac{4}{\cos 2\alpha}=0.$$

Умножая обе части уравнения на $2\cos^2 2\alpha\cos^2\alpha$, имеем

$$36\cos^2 2\alpha-2\cos^2\alpha+8\cos 2\alpha\cos^2\alpha=0\Leftrightarrow 36\cos^2 2\alpha-(1+\cos 2\alpha)+4\cos 2\alpha(1+\cos 2\alpha)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 40\cos^2 2\alpha+3\cos 2\alpha-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2\alpha=-\frac{1}{5},\\ \cos 2\alpha=\frac{1}{8}.\end{array}\right.$$

Так как 2α – острый угол прямоугольного треугольника, то $\cos 2\alpha>0$, поэтому $2\alpha=\arccos\frac{1}{8}$. Тогда угол A треугольника равен $\arcsin\frac{1}{8}$.

6. [5 баллов] Числа x, y и z не все равны между собой, и при этом $x^3+\frac{10}{y^3}=y^3+\frac{10}{z^3}=z^3+\frac{10}{x^3}$. Найдите максимально возможное значение произведения xyz.

Ответ: $\sqrt{10}$.

Решение. Перепишем исходную цепочку равенств в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x^3-y^3=\frac{10}{z^3}-\frac{10}{y^3}, \\ y^3-z^3=\frac{10}{x^3}-\frac{10}{z^3}, \\ z^3-x^3=\frac{10}{y^3}-\frac{10}{x^3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-y^3=\frac{10\left(y^3-z^3\right)}{y^3z^3}, \\ y^3-z^3=\frac{10\left(z^3-x^3\right)}{x^3z^3}, \\ z^3-x^3=\frac{10\left(x^3-y^3\right)}{x^3y^3}. \end{cases}$$

Заметим, что числа x, y, z попарно различны. Действительно, если, к примеру, $z=x$, то третье уравнение системы принимает вид $0=\frac{10\left(x^3-y^3\right)}{x^3y^3}$, поэтому $x=y$ и все три числа совпадают, что противоречит условию. Перемножая все уравнения этой системы, имеем

$$\left(x^3-y^3\right)\left(y^3-z^3\right)\left(z^3-x^3\right)=\frac{1000\left(x^3-y^3\right)\left(y^3-z^3\right)\left(z^3-x^3\right)}{x^6y^6z^6}.$$

Так как числа попарно различны, то $(xyz)^6=1000$, то есть $xyz=\pm\sqrt{10}$.
Покажем, что у исходной системы существует решение $(x_0;y_0;z_0)$ такое, что $x_0y_0z_0=\sqrt{10}$. (Строго говоря, выше мы получили, что если система имеет решения, то для этих решений либо $xyz=\sqrt{10}$, либо $xyz=-\sqrt{10}$. Может оказаться так, что у системы решений нет вовсе или так, что для любого решения системы произведение xyz равно $-\sqrt{10}$.)
Возьмём, например, $y_0=\sqrt[6]{10}$ и оставим только первые два уравнения системы (третье уравнение является их следствием). Она принимает вид

$$\begin{cases} x^3-\sqrt{10}=\frac{10}{z^3}-\sqrt{10}, \\ \sqrt{10}-z^3=\frac{10}{x^3}-\frac{10}{z^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3=\frac{10}{z^3}, \\ 2z^6-\sqrt{10}z^3-10=0. \end{cases}$$

У этой системы есть решение $z_0=-\sqrt[6]{\frac{5}{2}}$, $x_0=-\sqrt[6]{40}$. Итак, для тройки чисел $\left(-\sqrt[6]{40};\sqrt[6]{10};-\sqrt[6]{\frac{5}{2}}\right)$ выражение xyz достигает максимального значения $\sqrt{10}$.

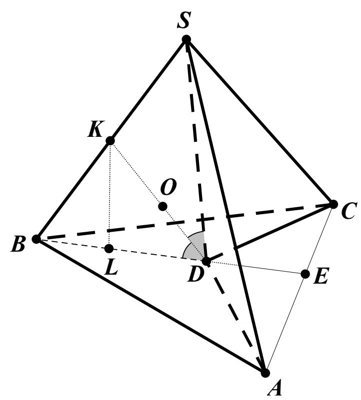
7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB=BC=\sqrt{10}$, $AD=DC=2$, $AC=2\sqrt{2}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA+SB=2\sqrt{2}+\sqrt{10}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB, SBC и ребра SD.

Ответ: а) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$, б) $\frac{\sqrt{6}}{5+\sqrt{3}}$.

Решение. а) Предположим, что четырёхугольник $ABCD$ – выпуклый, а E – точка пересечения его диагоналей. Тогда $BD=EB+ED=\sqrt{AB^2-\frac{AC^2}{4}}+\sqrt{AD^2-\frac{AC^2}{4}}=2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$, значит, $DA+DB=2+3\sqrt{2}>2\sqrt{2}+\sqrt{10}=SA+SB$. Однако $SA>DA$ и $SB>DB$ (наклонная длиннее проекции), то есть $SA+SB>DA+DB$ – противоречие. Следовательно, четырёхугольник $ABCD$ – невыпуклый, а так как треугольники ABC и ADC равнобедренные с общим основанием AC и $AD<AB$, то точка D лежит внутри треугольника ABC.



Далее имеем $BD=EB-ED=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$, откуда $SA+SB=\sqrt{SD^2+AD^2}+\sqrt{SD^2+DB^2}=\sqrt{SD^2+4}+\sqrt{SD^2+2}=2\sqrt{2}+\sqrt{10}$.
Решая это уравнение, находим, что $SD=\sqrt{6}$ (можно подобрать корень, а для доказательства его единственности воспользоваться монотонностью левой части при $SD>0$) и тогда $SB=\sqrt{2}$, $SA=SC=\sqrt{10}$. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, поэтому его

площадь равна половине их произведения: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = 2$. Следовательно, объём пирамиды есть $V_{SACBD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SD = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

б) Существует единственный такой шар, причём в силу симметрии пирамиды относительно плоскости SBD центр шара лежит в этой плоскости. Так как шар касается граней пирамиды, то его центр O лежит внутри треугольника SBD, а он касается отрезков SD и BD. Отсюда следует, что точка O лежит на биссектрисе DK треугольника SBD.

Пусть L – проекция точки K на плоскость основания пирамиды. Тогда из подобия треугольников BKL и BSD имеем $KL = SD \cdot \frac{BK}{BS} = SD \cdot \frac{BK}{BK+KS}$, а по свойству биссектрисы треугольника $\frac{BK}{BK+KS} = \frac{BD}{BD+DS} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{1}{1+\sqrt{3}}$, поэтому $KL = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1}$. Значит, расстояние от точки O до прямой BD (т.е. радиус шара) равно $KL \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{OD}{KD}$.

С другой стороны, радиус шара равен расстоянию от точки O до плоскости SBC. Чтобы выразить это расстояние, сначала найдём высоту DM в треугольной пирамиде $SBCD$. Объём этой пирамиды равен $V_{SBCD} = \frac{1}{2} V_{SABCD} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Так как $SC = BC = \sqrt{10}$, а $SB = 2\sqrt{2}$, то $S_{SBC} = 4$. Тогда $V_{SBCD} = \frac{1}{3} \cdot DM \cdot S_{SBC}$, откуда $DM = \frac{3V_{SBCD}}{S_{SBC}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. Тогда расстояние от точки O до плоскости SBC равно $DM \cdot \frac{OK}{KD} = DM\left(1 - \frac{OD}{KD}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \left(1 - \frac{OD}{KD}\right)$. Теперь приравняем два полученных выражения для радиуса шара:

$$\frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \left(1 - \frac{OD}{KD}\right) \Leftrightarrow \frac{OD}{KD} = \frac{1+\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}.$$

Итак, радиус шара равен $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{\sqrt{6}}{5+\sqrt{3}}$.

11 КЛАСС. Вариант 7

1. [4 балла] Решите уравнение $5\operatorname{tg} 2x - 1 = \operatorname{tg}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Рассмотрим два случая.

1) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда справедливы формулы $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$ и $\operatorname{tg}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}}{1+\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg} x+1}{1-\operatorname{tg} x}$. (Отметим, что при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ правые части формул не определены – именно поэтому этот случай необходимо рассмотреть отдельно.) Подставляем полученные величины в исходное уравнение и решаем его:

$$\frac{10\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} - 1 = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x} \Leftrightarrow \frac{8\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Подстановкой убеждаемся, что эти значения являются решениями уравнения.

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{90} \cdot 19^{90}$?

Ответ: 7 442.

Решение. 1) Найдём сначала количество троек натуральных чисел. Пусть $a = 2^{x_1}19^{y_1}$, $b = 2^{x_2}19^{y_2}$, $c = 2^{x_3}19^{y_3}$, где x_i, y_i – целые неотрицательные числа. Тогда $x_1 + x_2 + x_3 = 90$ и $y_1 + y_2 + y_3 = 90$. Числа a, b, c составляют в указанном порядке геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $b^2 = ac$, откуда $2x_2 = x_1 + x_3$ и $2y_2 = y_1 + y_3$. Из полученных уравнений $x_2 = y_2 = 30$, $x_1 + x_3 = 60$, $y_1 + y_3 = 60$. Посчитаем количество решений этой системы. Есть 61 способ выбрать пару чисел $(x_1; x_3)$ – действительно, x_1 можно взять любым целым числом из отрезка $[0; 60]$, после чего x_3 определяется однозначно. Аналогично, пару $(y_1; y_3)$ можно выбрать 61 способом. Перемножая, получаем $61^2 = 3\,721$ способ.
2) Если рассматривать также отрицательные значения переменных, то можно заметить, что подходят все тройки чисел вида $(-a; b; -c)$, где a, b, c положительны и составляют геометрическую прогрессию. Таких троек ровно столько, сколько и в первом случае, поэтому окончательно имеем 7 442 тройки.

3. [5 баллов] Решите неравенство $\ln^2(x+3) - (x+2)\ln(3x+9) + (\ln 3)\ln(x+3) \geqslant 0$.

Ответ: $x \in \left(-3; -\frac{8}{3}\right] \cup \{-2\}$.

Решение. Преобразуем левую часть неравенства:

$$\begin{aligned}\ln^2(x+3) - (x+2)\ln(3x+9) + (\ln 3)\ln(x+3) = \ln^2(x+3) - (x+2)\ln 3 - (x+2)\ln(x+3) +\\ + (\ln 3)\ln(x+3) = (\ln 3)(\ln(x+3) - x - 2) + (\ln(x+3))(\ln(x+3) - x - 2) =\\ = (\ln(x+2) - (x+1))(\ln(x+3) + \ln 3) = (\ln(x+3) - x - 2)\ln(3x+9).\end{aligned}$$

Заметим, что $\ln(x+3) - x - 2 \leqslant 0$ при всех $x > -3$, причём равенство достигается только при $x = -2$. Для этого рассмотрим функцию $\psi(x) = \ln(x+3) - x - 2$. Она определена при $x > -3$, а её производная равна $\frac{1}{x+3} - 1 = \frac{-2-x}{x+3}$. На интервале $(-3; -2)$ производная положительна и функция возрастает, а на луче $(-2; +\infty)$ производная отрицательна и функция убывает. Так как $\psi(-2) = 0$, то отсюда следует, что $\psi(x) < 0$ при $x > -3$, $x \neq -2$.
Таким образом, неравенство равносильно следующему:

$$\left[\begin{array}{l}\ln(x+3) - x - 2 = 0,\\ \ln(3x+9) \leqslant 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -2,\\ 0 < 3x + 9 \leqslant 1\end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(-3; -\frac{8}{3}\right] \cup \{1\}.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y=\frac{x^3}{4}+ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y=\frac{2x}{5}$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

Ответ: $a=-\frac{641}{210}$, $S=\frac{3364}{105}$.

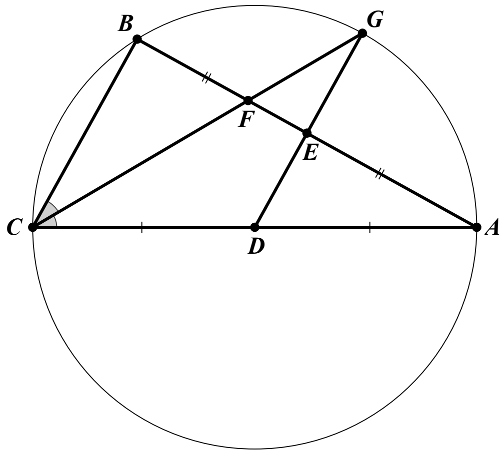
Решение. Пусть A и B – вершины квадрата, лежащие в первой и четвёртой четвертях соответственно; O – начало координат.
По условию, точка A лежит на прямой $y=\frac{2x}{5}$. Если $5x_0$ – абсцисса точки A, то $x_0>0$, а координаты точки A – это $(5x_0;2x_0)$. Так как точка B получается из A поворотом на 90° по часовой стрелке, то её координаты есть $(2x_0;-5x_0)$. Поскольку обе точки лежат на графике $y=\frac{x^3}{4}+ax$, получаем и решаем систему уравнений (учитываем, что $x_0\neq 0$)

$$\begin{cases}2x_0=\frac{125x_0^3}{4}+5ax_0,\\ -5x_0=2x_0^3+2ax_0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{2}{5}-\frac{25x_0^2}{4},\\ a=-\frac{5}{2}-x_0^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{5}{2}-x_0^2,\\ \frac{2}{5}-\frac{25x_0^2}{4}=-\frac{5}{2}-x_0^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2=\frac{58}{105},\\ a=-\frac{641}{210}.\end{cases}$$

Пусть $OA=d$ – половина диагонали квадрата. Тогда $OA^2=(5x_0)^2+(2x_0)^2=29x_0^2$, а площадь квадрата S равна полупроизведению его диагоналей, т.е. $S=\frac{1}{2}\cdot 2d\cdot 2d=2d^2=\frac{3364}{105}$.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC. Лучи DE и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $\frac{CF}{DF}=\frac{2}{11}$.

Ответ: $\angle B=90^\circ$, $\angle C=\arccos\frac{1}{17}$, $\angle A=\arcsin\frac{1}{17}$.



Решение. CG – биссектриса угла ACB, поэтому дуги AG и GB равны, а также равны одноимённые им хорды. Значит, треугольник AGB равнобедренный, и его медиана GE является также и высотой. DE – средняя линия треугольника ABC, поэтому $DE\parallel BC$ и $\angle ABC=\angle AED=90^\circ$ как соответственные. Пусть $CB=2a$, $\angle ACB=2\alpha$. Тогда $CF=\frac{2a}{\cos\alpha}$, $AC=\frac{2a}{\cos 2\alpha}$, $CD=\frac{a}{\cos 2\alpha}$, $DF=\frac{11}{2}CF=\frac{11a}{\cos\alpha}$. По теореме косинусов для треугольника CDF имеем $DF^2=CF^2+CD^2-2CF\cdot CD\cos\alpha$. Подставляя сюда выражения для сторон, найденные выше, получаем уравнение

$$\frac{121a^2}{\cos^2\alpha}=\frac{4a^2}{\cos^2\alpha}+\frac{a^2}{\cos^2 2\alpha}-2\frac{2a}{\cos\alpha}\cdot\frac{a}{\cos 2\alpha}\cos\alpha\Leftrightarrow\frac{117}{\cos^2\alpha}-\frac{1}{\cos^2 2\alpha}+\frac{4}{\cos 2\alpha}=0.$$

Умножая обе части уравнения на $2\cos^2 2\alpha\cos^2\alpha$, имеем

$$234\cos^2 2\alpha-2\cos^2\alpha+8\cos 2\alpha\cos^2\alpha=0\Leftrightarrow 234\cos^2 2\alpha-(1+\cos 2\alpha)+4\cos 2\alpha(1+\cos 2\alpha)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 238\cos^2 2\alpha+3\cos 2\alpha-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2\alpha=-\frac{1}{14},\\ \cos 2\alpha=\frac{1}{17}.\end{array}\right.$$

Так как 2α – острый угол прямоугольного треугольника, то $\cos 2\alpha>0$, поэтому $2\alpha=\arccos\frac{1}{17}$. Тогда угол A треугольника равен $\arcsin\frac{1}{17}$.

6. [5 баллов] Числа x, y и z не все равны между собой, и при этом $x^3+\frac{6}{y^3}=y^3+\frac{6}{z^3}=z^3+\frac{6}{x^3}$. Найдите минимально возможное значение произведения xyz.

Ответ: $-\sqrt{6}$.

Решение. Перепишем исходную цепочку равенств в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x^3-y^3=\frac{6}{z^3}-\frac{6}{y^3},\\ y^3-z^3=\frac{6}{x^3}-\frac{6}{z^3},\\ z^3-x^3=\frac{6}{y^3}-\frac{6}{x^3}.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-y^3=\frac{6\left(y^3-z^3\right)}{y^3z^3},\\ y^3-z^3=\frac{6\left(z^3-x^3\right)}{x^3z^3},\\ z^3-x^3=\frac{6\left(x^3-y^3\right)}{x^3y^3}.\end{cases}$$

Заметим, что числа x, y, z попарно различны. Действительно, если, к примеру, $z=x$, то третье уравнение системы принимает вид $0=\frac{6\left(x^3-y^3\right)}{x^3y^3}$, поэтому $x=y$ и все три числа совпадают, что противоречит условию. Перемножая все уравнения этой системы, имеем

$$\left(x^3-y^3\right)\left(y^3-z^3\right)\left(z^3-x^3\right)=\frac{216\left(x^3-y^3\right)\left(y^3-z^3\right)\left(z^3-x^3\right)}{x^6y^6z^6}.$$

Так как числа попарно различны, то $(xyz)^6=216$, то есть $xyz=\pm\sqrt{6}$.
Покажем, что у исходной системы существует решение $(x_0;y_0;z_0)$ такое, что $x_0y_0z_0=-\sqrt{6}$. (Строго говоря, выше мы получили, что если система имеет решения, то для этих решений либо $xyz=\sqrt{6}$, либо $xyz=-\sqrt{6}$. Может оказаться так, что у системы решений нет вовсе или так, что для любого решения системы произведение xyz равно $\sqrt{6}$.)
Возьмём, например, $y_0=-\sqrt[6]{6}$ и оставим только первые два уравнения системы (третье уравнение является их следствием). Она принимает вид

$$\begin{cases} x^3+\sqrt{6}=\frac{6}{z^3}+\sqrt{6},\\ -\sqrt{6}-z^3=\frac{6}{x^3}-\frac{6}{z^3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3=\frac{6}{z^3},\\ 2z^6+\sqrt{6}z^3-6=0.\end{cases}$$

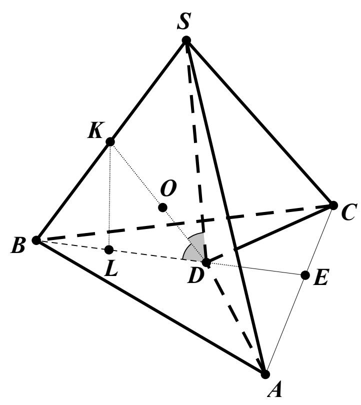
У этой системы есть решение $z_0=\sqrt[6]{\frac{3}{2}}$, $x_0=\sqrt[6]{24}$. Итак, для тройки чисел $\left(\sqrt[6]{24};-\sqrt[6]{6};\sqrt[6]{\frac{3}{2}}\right)$ выражение xyz достигает минимального значения $-\sqrt{6}$.

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB=BC=5$, $AD=DC=\sqrt{10}$, $AC=2\sqrt{5}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA+SB=5+2\sqrt{5}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB, SBC и ребра SD.

Ответ: а) $\frac{5\sqrt{15}}{3}$, б) $\frac{\sqrt{15}}{5+\sqrt{3}}$.



Решение. а) Предположим, что четырёхугольник $ABCD$ – выпуклый, а E – точка пересечения его диагоналей. Тогда $BD=EB+ED=\sqrt{AB^2-\frac{AC^2}{4}}+\sqrt{AD^2-\frac{AC^2}{4}}=2\sqrt{5}+\sqrt{5}=3\sqrt{5}$, значит, $DA+DB=3\sqrt{5}+\sqrt{10}>2\sqrt{5}+5=SA+SB$. Однако $SA>DA$ и $SB>DB$ (наклонная длиннее проекции), то есть $SA+SB>DA+DB$ – противоречие. Следовательно, четырёхугольник $ABCD$ – невыпуклый, а так как треугольники ABC и ADC равнобедренные с общим основанием AC и $AD<AB$, то точка D лежит внутри треугольника ABC.
Далее имеем $BD=EB-ED=2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$, откуда $SA+SB=\sqrt{SD^2+AD^2}+\sqrt{SD^2+DB^2}=\sqrt{SD^2+10}+\sqrt{SD^2+5}=2\sqrt{5}+5$.
Решая это уравнение, находим, что $SD=\sqrt{15}$ (можно подобрать корень, а для доказательства его единственности воспользоваться монотонностью левой части при $SD>0$) и тогда $SB=2\sqrt{5}$, $SA=SC=5$. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, поэтому его площадь равна половине их произведения: $S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD=5$. Следовательно,

объём пирамиды есть $V_{SACBD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SD = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.
б) Существует единственный такой шар, причём в силу симметрии пирамиды относительно плоскости SBD центр шара лежит в этой плоскости. Так как шар касается граней пирамиды, то его центр O лежит внутри треугольника SBD, а он касается отрезков SD и BD. Отсюда следует, что точка O лежит на биссектрисе DK треугольника SBD.
Пусть L – проекция точки K на плоскость основания пирамиды. Тогда из подобия треугольников BKL и BSD имеем $KL = SD \cdot \frac{BK}{BS} = SD \cdot \frac{BK}{BK+KS}$, а по свойству биссектрисы треугольника $\frac{BK}{BK+KS} = \frac{BD}{BD+DS} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{15}} = \frac{1}{1+\sqrt{3}}$, поэтому $KL = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}+1}$. Значит, расстояние от точки O до прямой BD (т.е. радиус шара) равно $KL \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{\sqrt{15}}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{OD}{KD}$.
С другой стороны, радиус шара равен расстоянию от точки O до плоскости SBC. Чтобы выразить это расстояние, сначала найдём высоту DM в треугольной пирамиде $SBCD$. Объём этой пирамиды равен $V_{SBCD} = \frac{1}{2} V_{SABCD} = \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$. Так как $SC = BC = 5$, а $SB = 2\sqrt{5}$, то $S_{SBC} = 10$. Тогда $V_{SBCD} = \frac{1}{3} \cdot DM \cdot S_{SBC}$, откуда $DM = \frac{3V_{SBCD}}{S_{SBC}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Тогда расстояние от точки O до плоскости SBC равно $DM \cdot \frac{OK}{KD} = DM\left(1 - \frac{OD}{KD}\right) = \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \left(1 - \frac{OD}{KD}\right)$. Теперь приравняем два полученных выражения для радиуса шара:

$$\frac{\sqrt{15}}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \left(1 - \frac{OD}{KD}\right) \Leftrightarrow \frac{OD}{KD} = \frac{1+\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}.$$

Итак, радиус шара равен $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{\sqrt{15}}{5+\sqrt{3}}$.

11 КЛАСС. Вариант 8

1. [4 балла] Решите уравнение $6\operatorname{tg}2x-1+\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Решение. Рассмотрим два случая.

1) $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Тогда справедливы формулы $\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}$ и $\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{1+\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x-1}$. (Отметим, что при $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ правые части формул не определены – именно поэтому этот случай необходимо рассмотреть отдельно.) Подставляем полученные величины в исходное уравнение и решаем его:

$$\frac{12\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}-1+\frac{1+\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x-1}\Leftrightarrow\frac{10\operatorname{tg}x-2}{\operatorname{tg}^2x-1}=0\Leftrightarrow\operatorname{tg}x=\frac{1}{5}\Leftrightarrow x=\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Подстановкой убеждаемся, что эти значения являются решениями уравнения.

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a;b;c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $13^{180}\cdot17^{180}$?

Ответ: 29 282.

Решение. 1) Найдём сначала количество троек натуральных чисел. Пусть $a=13^{x_1}17^{y_1}$, $b=13^{x_2}17^{y_2}$, $c=13^{x_3}17^{y_3}$, где x_i, y_i – целые неотрицательные числа. Тогда $x_1+x_2+x_3=180$ и $y_1+y_2+y_3=180$. Числа a, b, c составляют в указанном порядке геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $b^2=ac$, откуда $2x_2=x_1+x_3$ и $2y_2=y_1+y_3$. Из полученных уравнений $x_2=y_2=60$, $x_1+x_3=120$, $y_1+y_3=120$. Посчитаем количество решений этой системы. Есть 121 способ выбрать пару чисел $(x_1;x_3)$ – действительно, x_1 можно взять любым целым числом из отрезка $[0;120]$, после чего x_3 определяется однозначно. Аналогично, пару $(y_1;y_3)$ можно выбрать 121 способом. Перемножая, получаем $121^2=14\,641$ способ.

2) Если рассматривать также отрицательные значения переменных, то можно заметить, что подходят все тройки чисел вида $(-a;b;-c)$, где a, b, c положительны и составляют геометрическую прогрессию. Таких троек ровно столько, сколько и в первом случае, поэтому окончательно имеем 29 282 тройки.

3. [5 баллов] Решите неравенство $\ln^2(x-1)-(x-2)\ln(3x-3)+(\ln3)\ln(x-1)\geqslant0$.

Ответ: $x\in\left(1;\frac{4}{3}\right]\cup\{2\}$.

Решение. Преобразуем левую часть неравенства:

$$\begin{aligned}\ln^2(x-1)-(x-2)\ln(3x-3)+(\ln3)\ln(x-1)&=\ln^2(x-1)-(x-2)\ln3-(x-2)\ln(x-1)+\\+(\ln3)\ln(x-1)&=(\ln3)(\ln(x-1)-x+2)+(\ln(x-1))(\ln(x-1)-x+2)=\\&=(\ln(x-1)-x+2)(\ln(x-1)+\ln3)=(\ln(x-1)-x+2)\ln(3x-3).\end{aligned}$$

Заметим, что $\ln(x-1)-x+2\leqslant0$ при всех $x>1$, причём равенство достигается только при $x=2$. Для этого рассмотрим функцию $\psi(x)=\ln(x-1)-x+2$. Она определена при $x>1$, а её производная равна $\frac{1}{x-1}-1=\frac{2-x}{x-1}$. На интервале $(1;2)$ производная положительна и функция возрастает, а на луче $(2;+\infty)$ производная отрицательна и функция убывает. Так как $\psi(2)=0$, то отсюда следует, что $\psi(x)<0$ при $x>1$, $x\neq2$.

Таким образом, неравенство равносильно следующему:

$$\left[\begin{array}{l}\ln(x-1)-x+2=0,\\ \ln(3x-3)\leqslant0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,\\ 0<3x-3\leqslant1\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\left(1;\frac{4}{3}\right]\cup\{1\}.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -\frac{2x^3}{3} + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

Ответ: $a = \frac{41}{12}$, $S = \frac{25}{2}$.

Решение. Пусть A и B – вершины квадрата, лежащие в первой и четвёртой четвертях соответственно; O – начало координат.
По условию, точка A лежит на прямой $y = 3x$. Если x_0 – абсцисса точки A, то $x_0 > 0$, а координаты точки A – это $(x_0; 3x_0)$. Так как точка B получается из A поворотом на 90° по часовой стрелке, то её координаты есть $(3x_0; -x_0)$. Поскольку обе точки лежат на графике $y = \frac{2x^3}{3} + ax$, получаем и решаем систему уравнений (учитываем, что $x_0 \neq 0$)

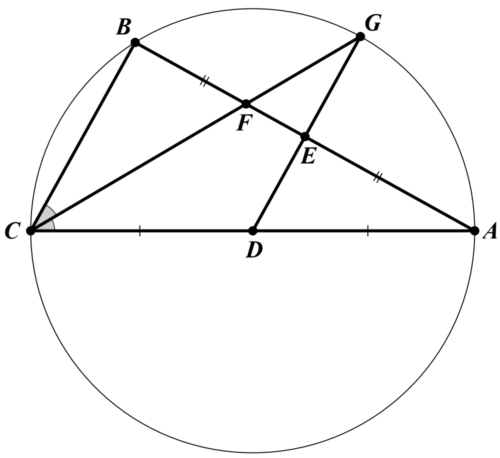
$$\begin{cases} 3x_0 = -\frac{2x_0^3}{3} + ax_0, \\ -x_0 = -18x_0^3 + 3ax_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 + \frac{2x_0^2}{3}, \\ 3a = -1 + 18x_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 + \frac{2x_0^2}{3}, \\ 9 + 2x_0^2 = -1 + 18x_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = \frac{5}{8}, \\ a = \frac{41}{12}. \end{cases}$$

Пусть $OA = d$ – половина диагонали квадрата. Тогда $OA^2 = (3x_0)^2 + x_0^2 = 10x_0^2$, а площадь квадрата S равна полупроизведению его диагоналей, т.е. $S = \frac{1}{2} \cdot 2d \cdot 2d = 2d^2 = \frac{25}{2}$.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC. Лучи DE и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{23}}$.

Ответ: $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = \arccos\frac{1}{11}$, $\angle A = \arcsin\frac{1}{11}$.

Решение. CG – биссектриса угла ACB, поэтому дуги AG и GB равны, а также равны одноимённые им хорды. Значит, треугольник AGB равнобедренный, и его медиана GE является также и высотой. DE – средняя линия треугольника ABC, поэтому $DE \parallel BC$ и $\angle ABC = \angle AED = 90^\circ$ как соответственные. Пусть $CB = 2a$, $\angle ACB = 2\alpha$. Тогда $CF = \frac{2a}{\cos\alpha}$, $AC = \frac{2a}{\cos 2\alpha}$, $CD = \frac{a}{\cos 2\alpha}$, $DF = \sqrt{\frac{23}{2}}CF = \frac{\sqrt{46}a}{\cos\alpha}$. По теореме косинусов для треугольника CDF имеем $DF^2 = CF^2 + CD^2 - 2CF \cdot CD\cos\alpha$. Подставляя сюда выражения для сторон, найденные выше, получаем уравнение



$$\frac{46a^2}{\cos^2\alpha} = \frac{4a^2}{\cos^2\alpha} + \frac{a^2}{\cos^2 2\alpha} - 2\frac{2a}{\cos\alpha} \cdot \frac{a}{\cos 2\alpha}\cos\alpha \Leftrightarrow \frac{42}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2 2\alpha} + \frac{4}{\cos 2\alpha} = 0.$$

Умножая обе части уравнения на $2\cos^2 2\alpha\cos^2\alpha$, имеем

$$84\cos^2 2\alpha - 2\cos^2\alpha + 8\cos 2\alpha\cos^2\alpha = 0 \Leftrightarrow 84\cos^2 2\alpha - (1 + \cos 2\alpha) + 4\cos 2\alpha(1 + \cos 2\alpha) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 88\cos^2 2\alpha + 3\cos 2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2\alpha = -\frac{1}{8}, \\ \cos 2\alpha = \frac{1}{11}. \end{array}\right.$$

Так как 2α – острый угол прямоугольного треугольника, то $\cos 2\alpha > 0$, поэтому $2\alpha = \arccos\frac{1}{11}$. Тогда угол A треугольника равен $\arcsin\frac{1}{11}$.

6. [5 баллов] Числа x, y и z не все равны между собой, и при этом $x^3 + \frac{11}{y^3} = y^3 + \frac{11}{z^3} = z^3 + \frac{11}{x^3}$. Найдите максимально возможное значение произведения xyz.

Ответ: $\sqrt{11}$.

Решение. Перепишем исходную цепочку равенств в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x^3-y^3=\frac{11}{z^3}-\frac{11}{y^3}, \\ y^3-z^3=\frac{11}{x^3}-\frac{11}{z^3}, \\ z^3-x^3=\frac{11}{y^3}-\frac{11}{x^3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-y^3=\frac{11\left(y^3-z^3\right)}{y^3z^3}, \\ y^3-z^3=\frac{11\left(z^3-x^3\right)}{x^3z^3}, \\ z^3-x^3=\frac{11\left(x^3-y^3\right)}{x^3y^3}. \end{cases}$$

Заметим, что числа x, y, z попарно различны. Действительно, если, к примеру, $z=x$, то третье уравнение системы принимает вид $0=\frac{11\left(x^3-y^3\right)}{x^3y^3}$, поэтому $x=y$ и все три числа совпадают, что противоречит условию. Перемножая все уравнения этой системы, имеем

$$\left(x^3-y^3\right)\left(y^3-z^3\right)\left(z^3-x^3\right)=\frac{1331\left(x^3-y^3\right)\left(y^3-z^3\right)\left(z^3-x^3\right)}{x^6y^6z^6}.$$

Так как числа попарно различны, то $(xyz)^6=1331$, то есть $xyz=\pm\sqrt{11}$.
Покажем, что у исходной системы существует решение $(x_0;y_0;z_0)$ такое, что $x_0y_0z_0=\sqrt{11}$. (Строго говоря, выше мы получили, что если система имеет решения, то для этих решений либо $xyz=\sqrt{11}$, либо $xyz=-\sqrt{11}$. Может оказаться так, что у системы решений нет вовсе или так, что для любого решения системы произведение xyz равно $-\sqrt{11}$.)
Возьмём, например, $y_0=\sqrt[6]{11}$ и оставим только первые два уравнения системы (третье уравнение является их следствием). Она принимает вид

$$\begin{cases} x^3-\sqrt{11}=\frac{11}{z^3}-\sqrt{11}, \\ \sqrt{11}-z^3=\frac{11}{x^3}-\frac{11}{z^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3=\frac{11}{z^3}, \\ 2z^6-\sqrt{11}z^3-10=0. \end{cases}$$

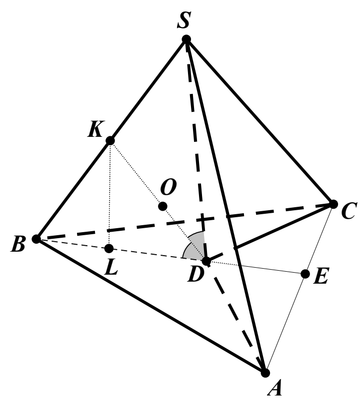
У этой системы есть решение $z_0=-\sqrt[6]{\frac{11}{4}}$, $x_0=-\sqrt[6]{44}$. Итак, для тройки чисел $\left(-\sqrt[6]{44};\sqrt[6]{11};-\sqrt[6]{\frac{11}{4}}\right)$ выражение xyz достигает максимального значения $\sqrt{11}$.

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB=BC=\sqrt{15}$, $AD=DC=\sqrt{6}$, $AC=2\sqrt{3}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA+SB=2\sqrt{3}+\sqrt{15}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB, SBC и ребра SD.

Ответ: а) 3, б) $\frac{3}{5+\sqrt{3}}$.



Решение. а) Предположим, что четырёхугольник $ABCD$ – выпуклый, а E – точка пересечения его диагоналей. Тогда $BD=EB+ED=\sqrt{AB^2-\frac{AC^2}{4}}+\sqrt{AD^2-\frac{AC^2}{4}}=2\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$, значит, $DA+DB=3\sqrt{3}+\sqrt{6}>2\sqrt{3}+\sqrt{15}=SA+SB$. Однако $SA>DA$ и $SB>DB$ (наклонная длиннее проекции), то есть $SA+SB>DA+DB$ – противоречие. Следовательно, четырёхугольник $ABCD$ – невыпуклый, а так как треугольники ABC и ADC равнобедренные с общим основанием AC и $AD<AB$, то точка D лежит внутри треугольника ABC.
Далее имеем $BD=EB-ED=2\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$, откуда $SA+SB=\sqrt{SD^2+AD^2}+\sqrt{SD^2+DB^2}=\sqrt{SD^2+2}+\sqrt{SD^2+1}=2\sqrt{3}+\sqrt{15}$.
Решая это уравнение, находим, что $SD=3$ (можно подобрать корень, а для доказательства его единственности воспользоваться монотонностью левой части при $SD>0$) и тогда $SB=2\sqrt{3}$, $SA=SC=\sqrt{15}$. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, поэтому его

площадь равна половине их произведения: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = 3$. Следовательно, объём пирамиды есть $V_{SACBD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SD = 3$.
б) Существует единственный такой шар, причём в силу симметрии пирамиды относительно плоскости SBD центр шара лежит в этой плоскости. Так как шар касается граней пирамиды, то его центр O лежит внутри треугольника SBD, а он касается отрезков SD и BD. Отсюда следует, что точка O лежит на биссектрисе DK треугольника SBD.
Пусть L – проекция точки K на плоскость основания пирамиды. Тогда из подобия треугольников BKL и BSD имеем $KL = SD \cdot \frac{BK}{BS} = SD \cdot \frac{BK}{BK+KS}$, а по свойству биссектрисы треугольника $\frac{BK}{BK+KS} = \frac{BD}{BD+DS} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3} = \frac{1}{1+\sqrt{3}}$, поэтому $KL = \frac{3}{\sqrt{3}+1}$. Значит, расстояние от точки O до прямой BD (т.е. радиус шара) равно $KL \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{3}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{OD}{KD}$.
С другой стороны, радиус шара равен расстоянию от точки O до плоскости SBC. Чтобы выразить это расстояние, сначала найдём высоту DM в треугольной пирамиде $SBCD$. Объём этой пирамиды равен $V_{SBCD} = \frac{1}{2}V_{SABCD} = \frac{3}{2}$. Так как $SC = BC = \sqrt{15}$, а $SB = 2\sqrt{3}$, то $S_{SBC} = 6$. Тогда $V_{SBCD} = \frac{1}{3} \cdot DM \cdot S_{SBC}$, откуда $DM = \frac{3V_{SBCD}}{S_{SBC}} = \frac{3}{4}$. Тогда расстояние от точки O до плоскости SBC равно $DM \cdot \frac{OK}{KD} = DM\left(1 - \frac{OD}{KD}\right) = \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{OD}{KD}\right)$. Теперь приравняем два полученных выражения для радиуса шара:

$$\frac{3}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{OD}{KD}\right) \Leftrightarrow \frac{OD}{KD} = \frac{1+\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}.$$

Итак, радиус шара равен $\frac{3}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{3}{5+\sqrt{3}}$.

