МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс, вариант 5

1. [4 балла] Решите уравнение
$$3\operatorname{tg} 2x + 1 = \operatorname{tg}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right).$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{150}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство
$$\ln^2 x - (x-1)\ln(2x) + (\ln 2)\ln x \geqslant 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -4x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC. Лучи DE и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $\frac{CF}{DF} = \frac{1}{2}$.

6. [5 баллов] Числа x, y и z не все равны между собой, и при этом
$$x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 + \frac{7}{z^3} = z^3 + \frac{7}{x^3}.$$
Найдите минимально возможное значение произведения xyz.

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{5}$, $AD = DC = \sqrt{2}$, $AC = 2$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2 + \sqrt{5}$. Найдите:

   а) объём пирамиды;

   б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB, SBC и ребра SD.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс, вариант 6

1. [4 балла] Решите уравнение
$$4\operatorname{tg} 2x + 1 + \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $3^{240} \cdot 7^{240}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство
$$\ln^2(x+2) - (x+1)\ln(4x+8) + (\ln 4)\ln(x+2) \geqslant 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -2x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 5x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC. Лучи DE и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{11}}$.

6. [5 баллов] Числа x, y и z не все равны между собой, и при этом
$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} = z^3 + \frac{10}{x^3}.$$
Найдите максимально возможное значение произведения xyz.

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{10}$, $AD = DC = 2$, $AC = 2\sqrt{2}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB, SBC и ребра SD.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс, вариант 7

1. [4 балла] Решите уравнение
$$5\operatorname{tg} 2x - 1 = \operatorname{tg}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right).$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{90} \cdot 19^{90}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство
$$\ln^2(x+3) - (x+2)\ln(3x+9) + (\ln 3)\ln(x+3) \geqslant 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = \frac{x^3}{4} + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = \frac{2x}{5}$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC. Лучи DE и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $\frac{CF}{DF} = \frac{2}{11}$.

6. [5 баллов] Числа x, y и z не все равны между собой, и при этом
$$x^3 + \frac{6}{y^3} = y^3 + \frac{6}{z^3} = z^3 + \frac{6}{x^3}.$$
Найдите минимально возможное значение произведения xyz.

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = 5$, $AD = DC = \sqrt{10}$, $AC = 2\sqrt{5}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 5 + 2\sqrt{5}$. Найдите:

   а) объём пирамиды;

   б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB, SBC и ребра SD.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс, вариант 8

1. [4 балла] Решите уравнение
$$6\operatorname{tg} 2x - 1 + \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $13^{180} \cdot 17^{180}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство
$$\ln^2(x-1) - (x-2)\ln(3x-3) + (\ln 3)\ln(x-1) \geqslant 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -\frac{2x^3}{3} + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC. Лучи DE и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{23}}$.

6. [5 баллов] Числа x, y и z не все равны между собой, и при этом
$$x^3 + \frac{11}{y^3} = y^3 + \frac{11}{z^3} = z^3 + \frac{11}{x^3}.$$
Найдите максимально возможное значение произведения xyz.

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{15}$, $AD = DC = \sqrt{6}$, $AC = 2\sqrt{3}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2\sqrt{3} + \sqrt{15}$. Найдите:

   а) объём пирамиды;

   б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB, SBC и ребра SD.