

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс, вариант 15

1. [3 балла] Вася строит башни из кубиков. Когда он построил N башен по 22 кубика, у него осталось 3 кубика. После чего он из всех своих кубиков построил $N - 1$ башню так, что во всех башнях кубиков оказалось поровну. Какое наибольшее количество кубиков могло быть у Васи, если известно, что их меньше 300?

2. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^2 + 7x + 12| + |x^2 + 2x - 8| \leq |5x + 20|.$$

3. [4 балла] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 3x + 3 = 6^y.$$

4. [5 баллов] Вокруг равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) описана окружность Ω . Прямая, содержащая биссектрису AD треугольника ABC , пересекает повторно Ω в точке E . Найдите периметр четырёхугольника $ABEC$, если известно что площади треугольников BED и CED равны 5 и 6 соответственно.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых существует значение параметра b такое, что уравнение $5x^2 + (2a + 9)x + 7a - 10b = 0$ имеет два корня x_1 и x_2 таких, что $5 \leq x_1 \leq 10$ и $14 \leq x_2 \leq 15$.

6. [5 баллов] Кузнечик прыгает по целочисленным узлам координатной сетки. За один шаг он может либо переместиться на одну клетку вверх или вправо, если при этом он попадает в точку, в которой не был раньше; либо вернуться на один шаг назад по уже пройденному пути – соответственно, вниз или влево. Сколько существует различных путей с началом в точке $O(0; 0)$ и концом в точке $A(3; 5)$ таких, что в точку A кузнечик попадает не более чем за 10 шагов? (Достигая точки A , кузнечик останавливается.)

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 7,5$, $XY = 15$.

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс, вариант 16

1. [3 балла] Вася строит башни из кубиков. Когда он построил N башен по 19 кубиков, у него осталось 6 кубиков. После чего он из всех своих кубиков построил $N - 1$ башню так, что во всех башнях кубиков оказалось поровну. Какое наименьшее количество кубиков могло быть у Васи, если известно, что их больше 100?

2. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^2 - 7x + 6| + |x^2 - 3x - 18| \leq |4x - 24|.$$

3. [4 балла] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 5x - 5 = 8^y.$$

4. [5 баллов] Вокруг равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) описана окружность Ω . Прямая, содержащая биссектрису AD треугольника ABC , пересекает повторно Ω в точке E . Найдите периметр четырёхугольника $ABEC$, если известно что площади треугольников BED и CED равны 5 и 8 соответственно.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых существует значение параметра b такое, что уравнение $2x^2 + (3a - 7)x - 11a + 13b = 0$ имеет два корня x_1 и x_2 таких, что $-11 \leq x_1 \leq -9$ и $-5 \leq x_2 \leq -4$.

6. [5 баллов] Кузнечик прыгает по целочисленным узлам координатной сетки. За один шаг он может либо переместиться на одну клетку вниз или вправо, если при этом он попадает в точку, в которой не был раньше; либо вернуться на один шаг назад по уже пройденному пути – соответственно, вверх или влево. Сколько существует различных путей с началом в точке $O(0; 0)$ и концом в точке $A(4; -3)$ таких, что в точку A кузнечик попадает не более чем за 9 шагов? (Достигая точки A , кузнечик останавливается.)

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 36$, $XY = 69$.