Отборочный этап 2025/26

Задачи олимпиады: Математика 11 класс (2 попытка)

Задача 1

Задача 1 #1 ID 5022

Пусть для некоторого α уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня $x_1 = \cos\alpha$ и $x_2 = \sin\alpha$. Какое наименьшее значение может принимать b, если $a + 2c = \dfrac{9}{a}$?

Задача 1 #2 ID 5023

Пусть для некоторого α уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня $x_1 = \cos\alpha$ и $x_2 = \sin\alpha$. Какое наименьшее значение может принимать b, если $a + 2c = \dfrac{16}{a}$?

Задача 1 #3 ID 5024

Пусть для некоторого α уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня $x_1 = \cos\alpha$ и $x_2 = \sin\alpha$. Какое наименьшее значение может принимать b, если $a + 2c = \dfrac{25}{a}$?

Задача 1 #4 ID 5025

Пусть для некоторого α уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня $x_1 = \cos\alpha$ и $x_2 = \sin\alpha$. Какое наименьшее значение может принимать b, если $a + 2c = \dfrac{36}{a}$?

Задача 2

Задача 2 #5 ID 5026

Петя нарисовал на плоскости прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB=\sqrt{3}$, $AC=4$. Вася последовательно передвигает сначала точку A вдоль прямой, параллельной BC, затем точку B вдоль прямой, параллельной (новой) AC, а затем C вдоль прямой, параллельной (новой) прямой AB. Обозначим полученный Васей треугольник $A'B'C'$. Он обнаружил, что $\angle A'B'C'=120^\circ$, а $A'B'=5$. Найдите $B'C'$.

999976295026

Задача 2 #6 ID 5027

Петя нарисовал на плоскости прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB=\sqrt{2}$, $AC=3$. Вася последовательно передвигает сначала точку A вдоль прямой, параллельной BC, затем точку B вдоль прямой, параллельной (новой) AC, а затем C вдоль прямой, параллельной (новой) прямой AB. Обозначим полученный Васей треугольник $A'B'C'$. Он обнаружил, что $\angle A'B'C'=135^\circ$, а $A'B'=4$. Найдите $B'C'$.

999976295027

Задача 2 #7 ID 5028

Петя нарисовал на плоскости прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB=\sqrt{7}$, $AC=5$. Вася последовательно передвигает сначала точку A вдоль прямой, параллельной BC, затем точку B вдоль прямой, параллельной (новой) AC, а затем C вдоль прямой, параллельной (новой) прямой AB. Обозначим полученный Васей треугольник $A'B'C'$. Он обнаружил, что $\angle A'B'C'=150^\circ$, а $A'B'=4\sqrt{7}$. Найдите $B'C'$.

999976295028

Задача 2 #8 ID 5029

Петя нарисовал на плоскости прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB=3$, $AC=\sqrt{15}$. Вася последовательно передвигает сначала точку A вдоль прямой, параллельной BC, затем точку B вдоль прямой, параллельной (новой) AC, а затем C вдоль прямой, параллельной (новой) прямой AB. Обозначим полученный Васей треугольник $A'B'C'$. Он обнаружил, что $\angle A'B'C'=60^\circ$, а $A'B'=\sqrt{5}$. Найдите $B'C'$.

999976295029

Задача 3

Задача 3 #9 ID 5030

Найдите минимальное значение параметра a, при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 3 - 4a \geq 0, \\ x - 2(a-1)y - 4 \leq 0, \\ ax - x - y + 3 \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

999976295030

Задача 3 #10 ID 5031

Найдите максимальное значение параметра a, при котором система

$$\begin{cases} (a+1)x + 2y - 4a - 10 \leq 0, \\ 2x - ay - 8 \leq 0, \\ ax + x - 2y + 6 \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

999976295031

Задача 3 #11 ID 5032

Найдите минимальное значение параметра a, при котором система

$$\begin{cases} (2a-1)x - y - 6a + 8 \geq 0, \\ x - 4(a-1)y + 8a - 11 \leq 0, \\ 2(a-1)x - y + 3 + 2a \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

999976295032

Задача 3 #12 ID 5033

Найдите максимальное значение параметра a, при котором система

$$\begin{cases} (a+2)x + 4y - 4a - 20 \leq 0, \\ 4x - ay - 16 \leq 0, \\ ax + 2x - 4y + 12 \leq 0 \end{cases}$$

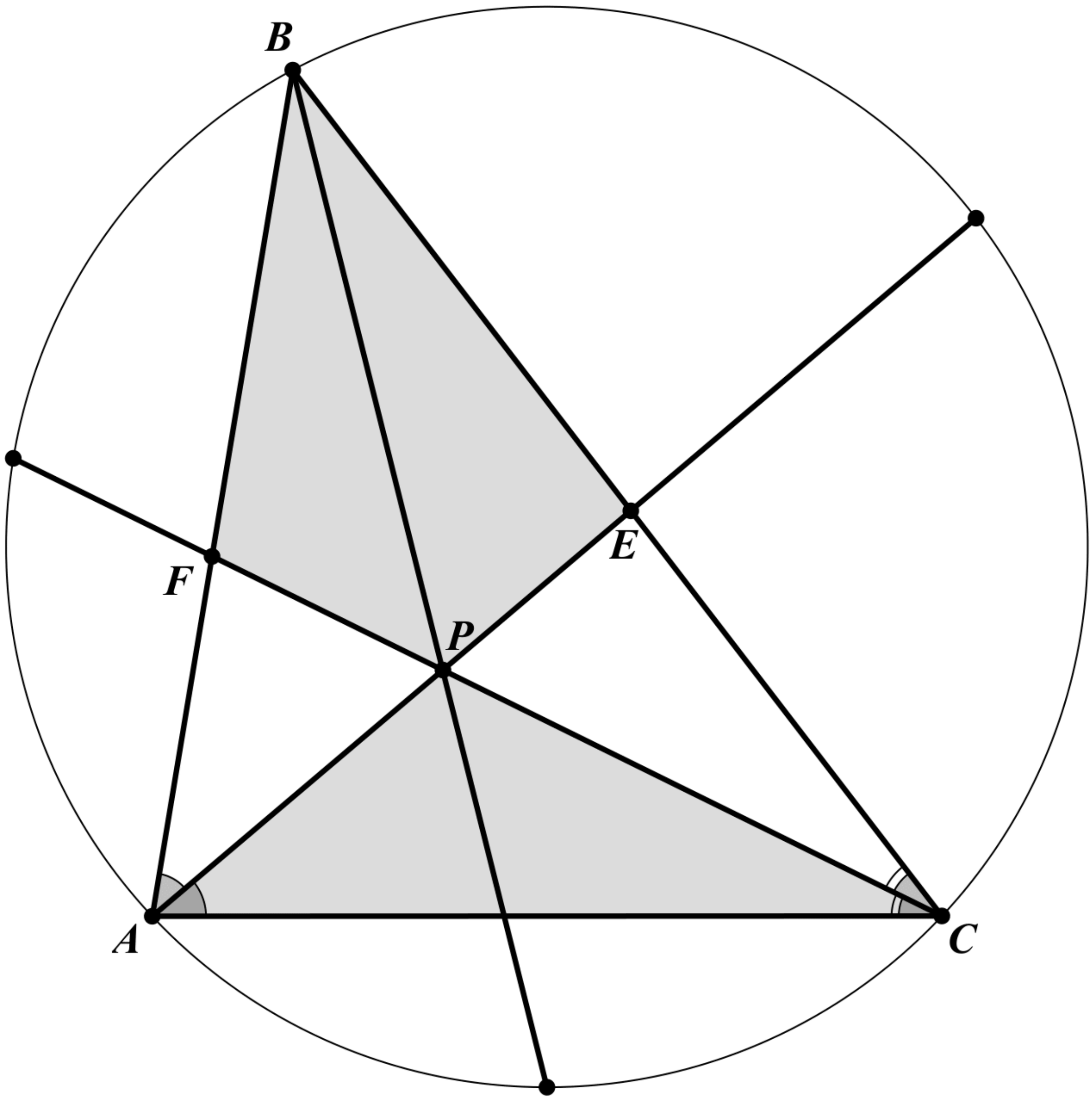
имеет единственное решение.

999976295033

Задача 4

Задача 4 #13 ID 5034

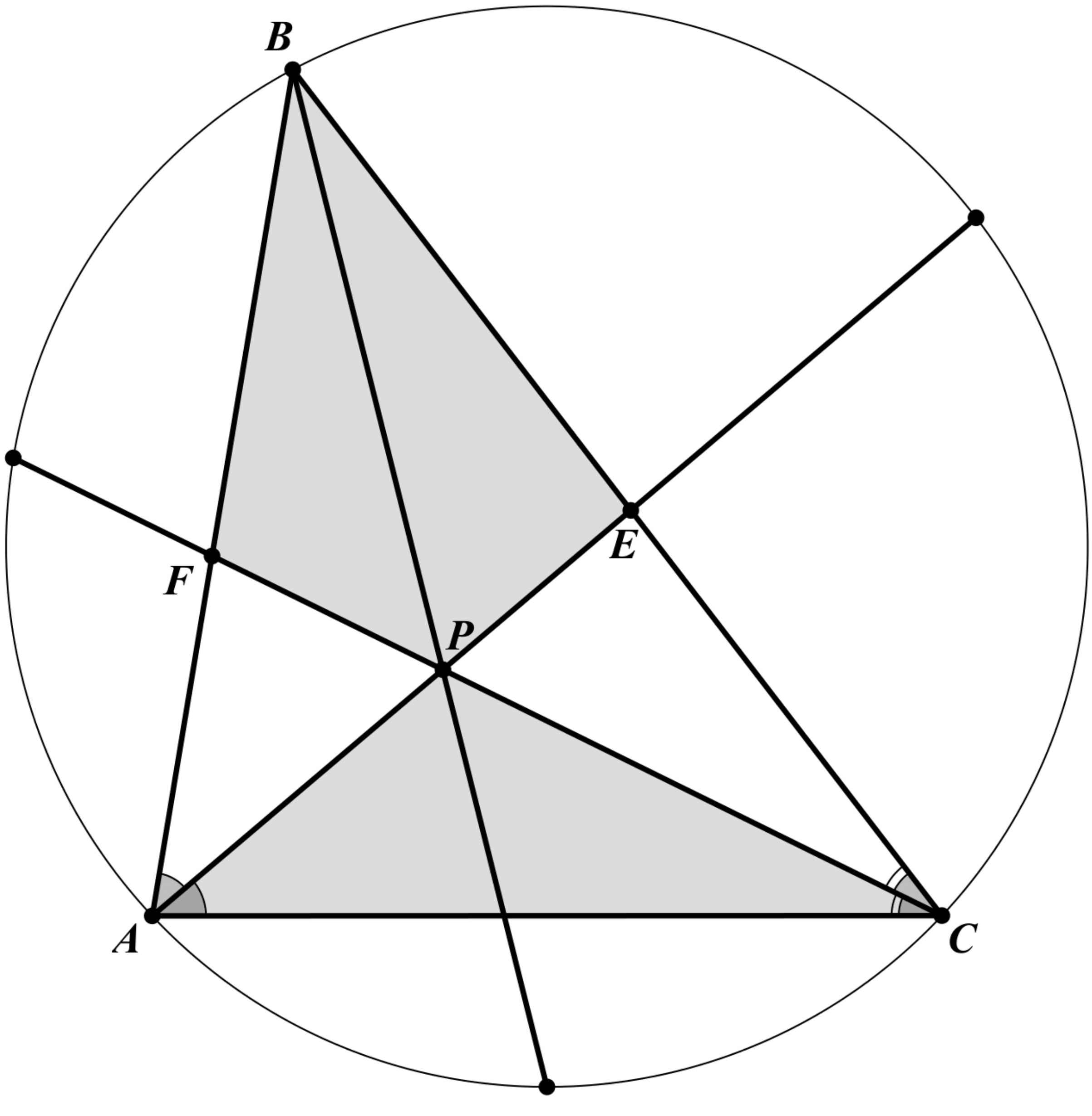
Треугольник ABC вписан в окружность радиуса $20\sqrt{2}$, а P – точка пересечения его биссектрис. Известно, что площадь треугольника APC и площадь четырехугольника $PFBE$ равны (см. рисунок). Найдите наибольшее значение произведения $AB \cdot BC$, если $\angle ABC = \arcsin\dfrac{1}{8}$.



999976295034

Задача 4 #14 ID 5035

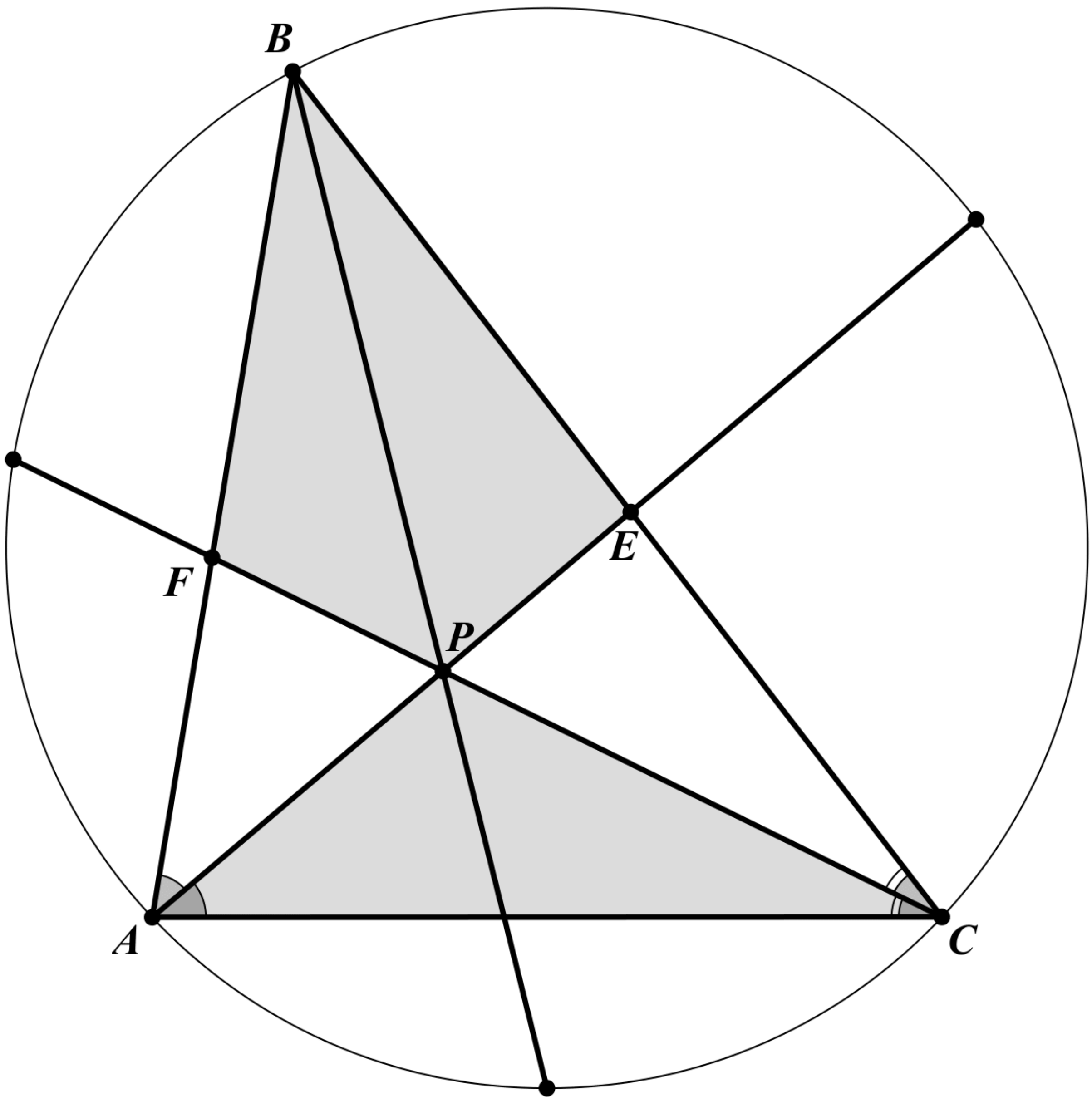
Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 30, а P – точка пересечения его биссектрис. Известно, что площадь треугольника APC и площадь четырехугольника $PFBE$ равны (см. рисунок). Найдите наибольшее значение произведения $AB \cdot BC$, если $\angle ABC = \arcsin \dfrac{1}{4}$.



999976295035

Задача 4 #15 ID 5036

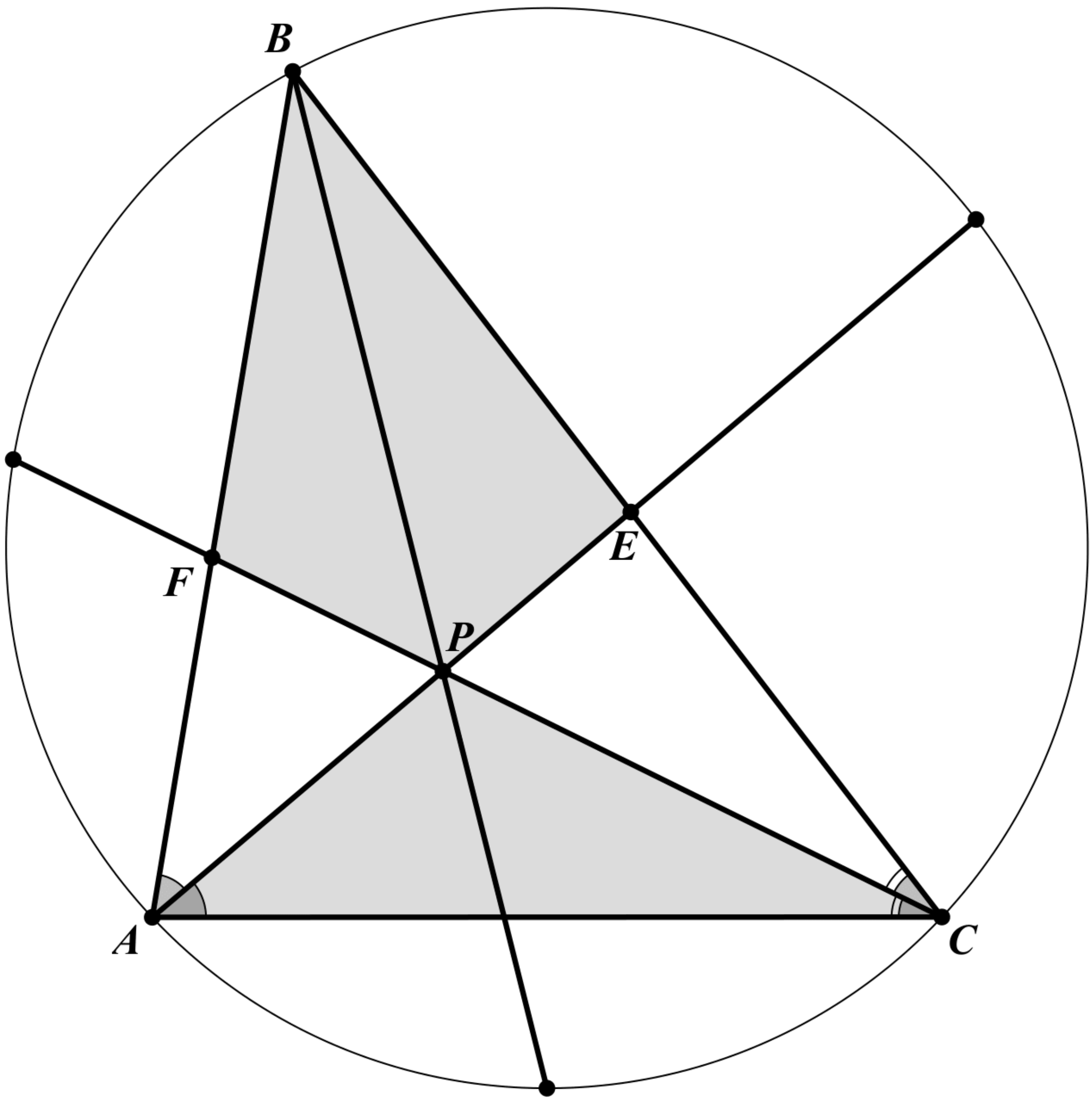
Треугольник ABC вписан в окружность радиуса $2\sqrt{3}$, а P – точка пересечения его биссектрис. Известно, что площадь треугольника APC и площадь четырехугольника $PFBE$ равны (см. рисунок). Найдите наибольшее значение произведения $AB \cdot BC$, если $\angle ABC = \arcsin \dfrac{3}{4}$.



999976295036

Задача 4 #16 ID 5037

Треугольник ABC вписан в окружность радиуса $7\sqrt{7}$, а P – точка пересечения его биссектрис. Известно, что площадь треугольника APC и площадь четырехугольника $PFBE$ равны (см. рисунок). Найдите наибольшее значение произведения $AB \cdot BC$, если $\angle ABC = \arcsin \dfrac{1}{7}$.



Задача 5

Задача 5 #17 ID 5038

Найдите количество пар таких натуральных чисел a и b, что a – трехзначное, b – четырехзначное, а их произведение делится на 35.

999976295038

Задача 5 #18 ID 5039

Найдите количество пар таких натуральных чисел a и b, что a – трехзначное, b – четырехзначное, а их произведение делится на 21.

999976295039

Задача 5 #19 ID 5040

Найдите количество пар таких натуральных чисел a и b, что a – трехзначное, b – четырехзначное, а их произведение делится на 33.

999976295040

Задача 5 #20 ID 5041

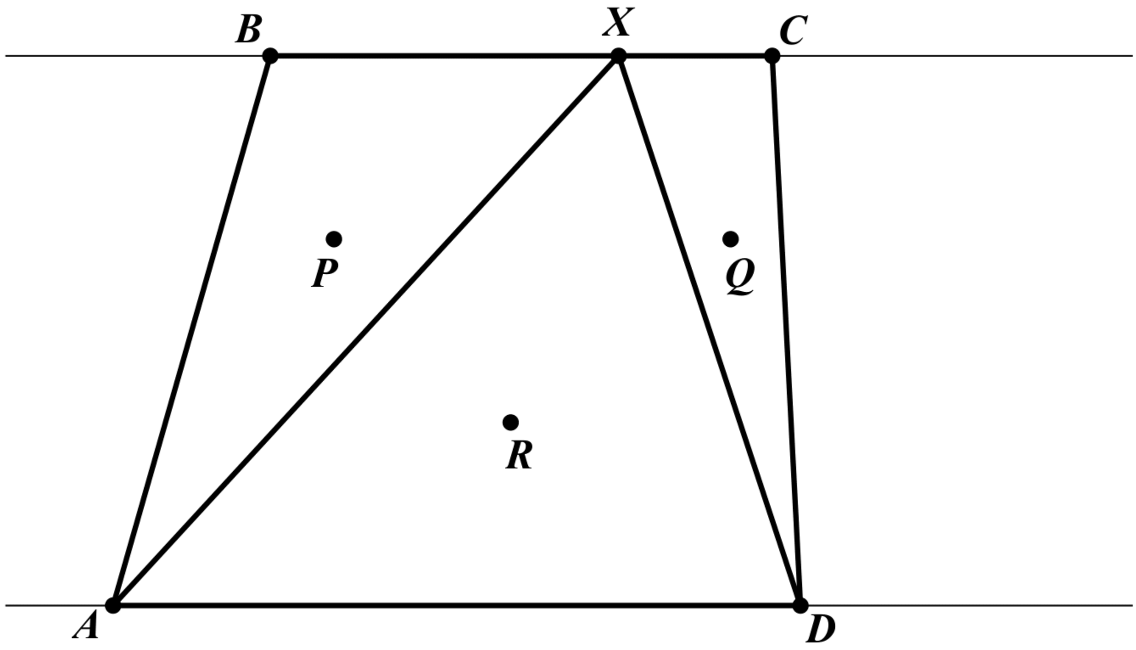
Найдите количество пар таких натуральных чисел a и b, что a – трехзначное, b – четырехзначное, а их произведение делится на 55.

999976295041

Задача 6

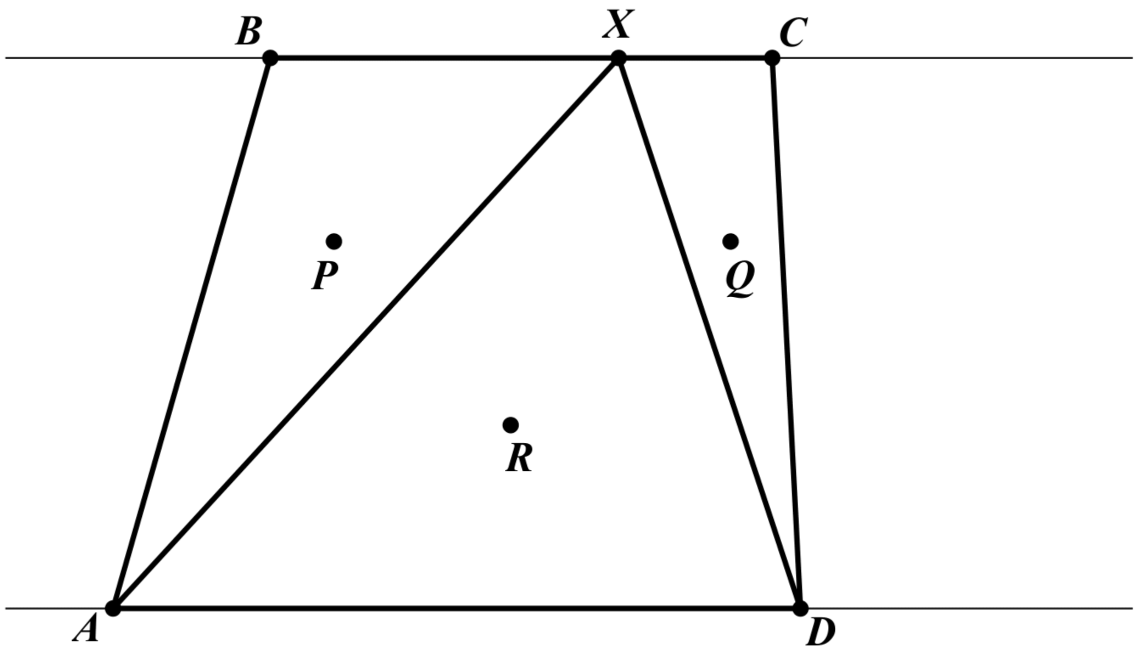
Задача 6 #21 ID 5042

На двух параллельных прямых взяты точки A, B, C, D, X, как показано на рисунке. Вася нашёл отношение $BC : AD = 1 : 5$, после чего отметил точки пересечения медиан P, Q, R соответственно треугольников BAX, CDX и AXD. Петя вычислил площадь треугольника PQR: она оказалась равна 100. Найдите площадь треугольника AXD.



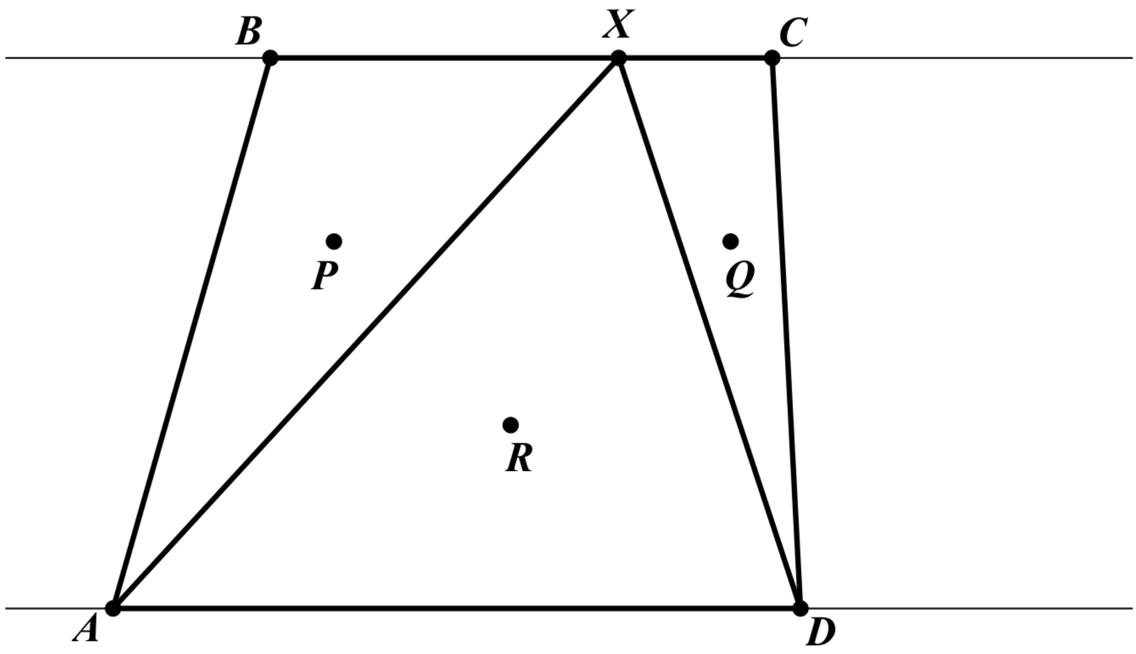
Задача 6 #22 ID 5043

На двух параллельных прямых взяты точки A, B, C, D, X, как показано на рисунке. Вася нашёл отношение $BC : AD = 1 : 4$, после чего отметил точки пересечения медиан P, Q, R соответственно треугольников BAX, CDX и AXD. Петя вычислил площадь треугольника PQR: она оказалась равна 90. Найдите площадь треугольника AXD.



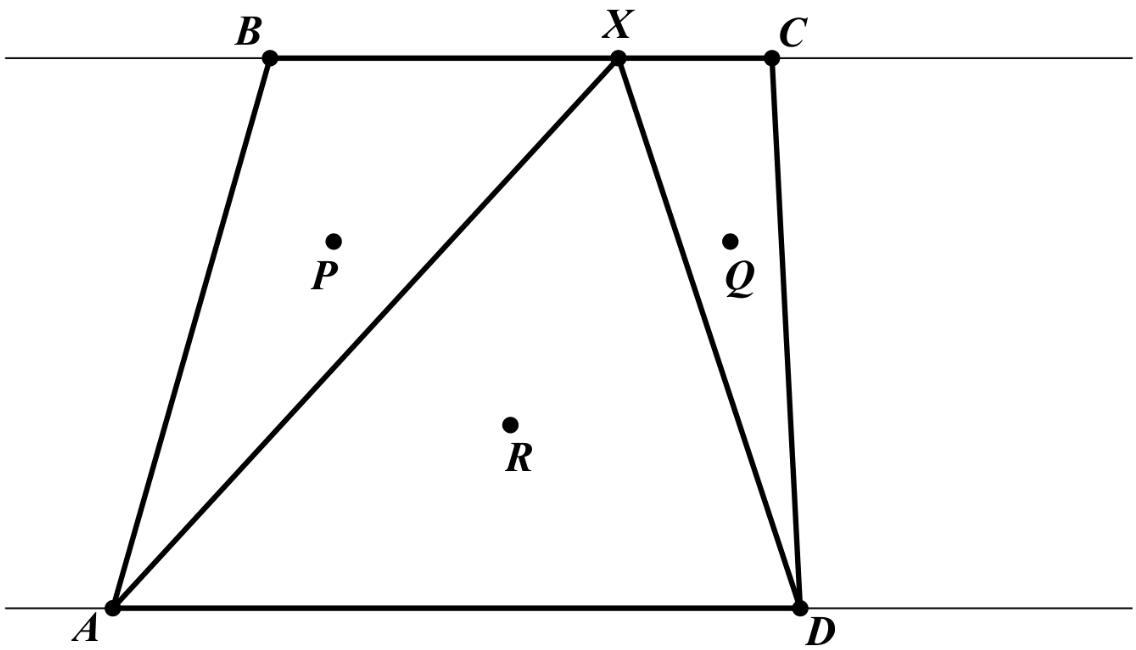
Задача 6 #23 ID 5044

На двух параллельных прямых взяты точки A, B, C, D, X, как показано на рисунке. Вася нашёл отношение $BC : AD = 1 : 3$, после чего отметил точки пересечения медиан P, Q, R соответственно треугольников BAX, CDX и AXD. Петя вычислил площадь треугольника PQR: она оказалась равна 80. Найдите площадь треугольника AXD.



Задача 6 #24 ID 5045

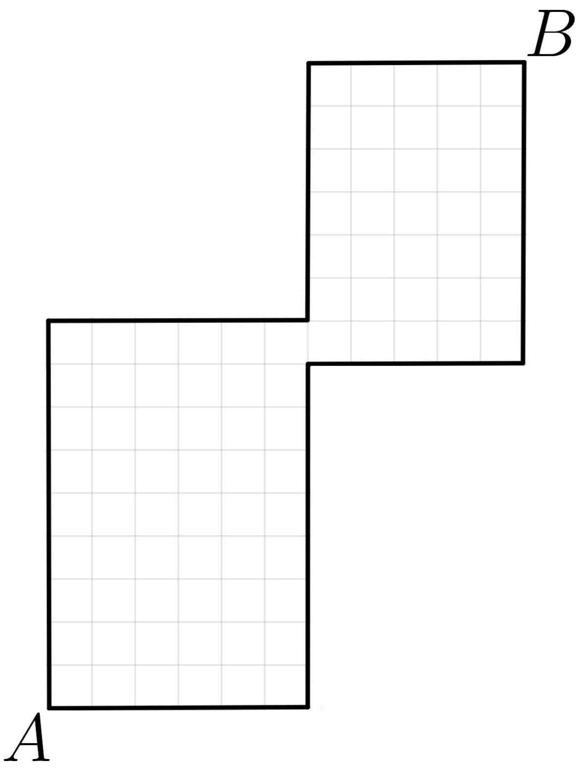
На двух параллельных прямых взяты точки A, B, C, D, X, как показано на рисунке. Вася нашёл отношение $BC : AD = 1 : 7$, после чего отметил точки пересечения медиан P, Q, R соответственно треугольников BAX, CDX и AXD. Петя вычислил площадь треугольника PQR: она оказалась равна 280. Найдите площадь треугольника AXD.



Задача 7

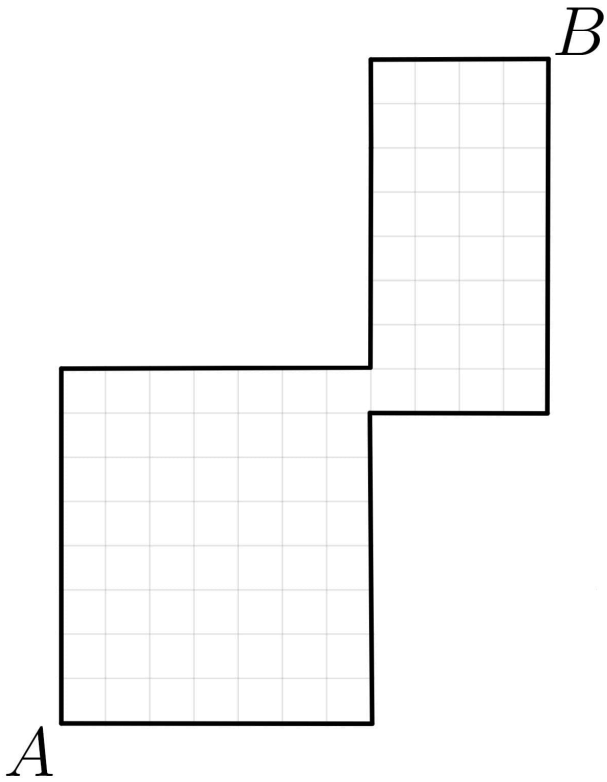
Задача 7 #25 ID 5046

Сколькими способами можно добраться от точки A до точки B по линиям сетки, расположенным внутри или на границе представленной на рисунке фигуры, если разрешено двигаться только вправо или вверх?



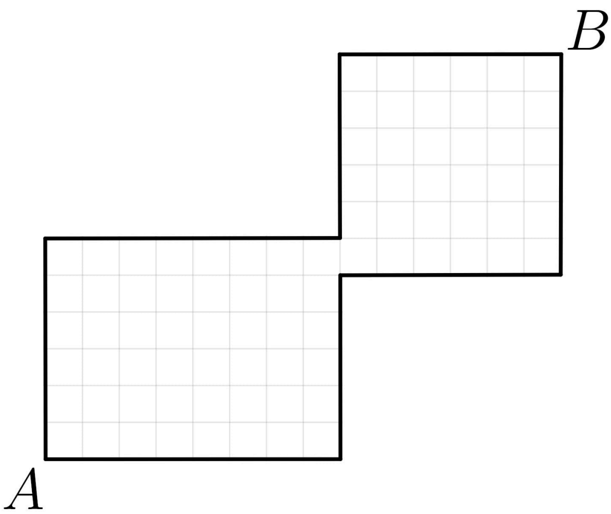
Задача 7 #26 ID 5047

Сколькими способами можно добраться от точки A до точки B по линиям сетки, расположенным внутри или на границе представленной на рисунке фигуры, если разрешено двигаться только вправо или вверх?



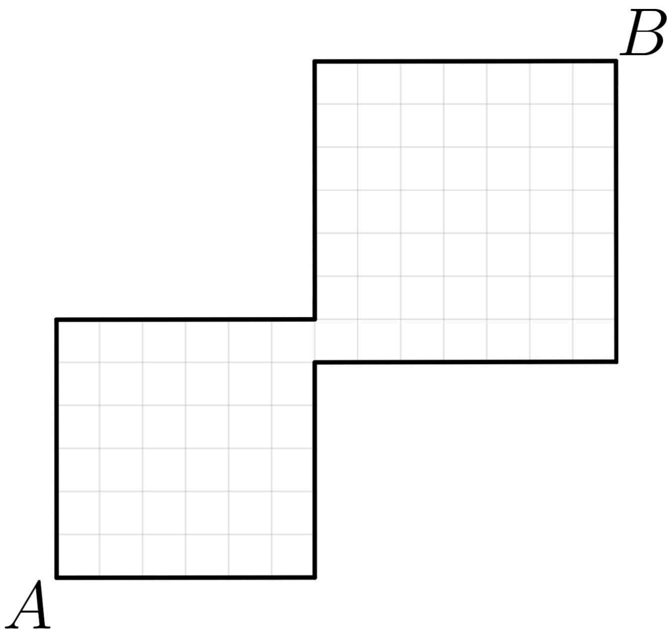
Задача 7 #27 ID 5048

Сколькими способами можно добраться от точки A до точки B по линиям сетки, расположенным внутри или на границе представленной на рисунке фигуры, если разрешено двигаться только вправо или вверх?



Задача 7 #28 ID 5049

Сколькими способами можно добраться от точки A до точки B по линиям сетки, расположенным внутри или на границе представленной на рисунке фигуры, если разрешено двигаться только вправо или вверх?



999976295049

Задача 8

Задача 8 #29 ID 5050

Найдите количество всех пар натуральных чисел x, y, при которых является верным равенство $\sqrt[3]{10^x} + x^3 + 3x^2 + x + 5y = 10^{1001}$.

999976295050

Задача 8 #30 ID 5051

Найдите количество всех пар натуральных чисел x, y, при которых является верным равенство $\sqrt[3]{10^x} + x^3 - x^2 + 3x + 5y = 10^{2101}$.

999976295051

Задача 8 #31 ID 5052

Найдите количество всех пар натуральных чисел x, y, при которых является верным равенство $\sqrt[3]{10^x} + x^3 + 2x^2 - 3x + 5y = 10^{3201}$.

999976295052

Задача 8 #32 ID 5053

> Найдите количество всех пар натуральных чисел x, y, при которых является верным равенство $\sqrt[3]{10^x} + x^3 - 2x^2 + x + 5y = 10^{4201}$.
>
>

Задача 9

Задача 9 #33 ID 5054

> Каждый из участников школьного кружка, кроме Андрея, дружит с разным числом других участников. Андрей дружит с 9 из них. Каково наибольшее возможное число школьников в кружке?
>
>

Задача 9 #34 ID 5055

> Каждый из участников школьного кружка, кроме Андрея, дружит с разным числом других участников. Андрей дружит с 10 из них. Каково наибольшее возможное число школьников в кружке?
>
>

Задача 9 #35 ID 5056

> Каждый из участников школьного кружка, кроме Андрея, дружит с разным числом других участников. Андрей дружит с 8 из них. Каково наибольшее возможное число школьников в кружке?
>
>

Задача 9 #36 ID 5057

> Каждый из участников школьного кружка, кроме Андрея, дружит с разным числом других участников. Андрей дружит с 11 из них. Каково наибольшее возможное число школьников в кружке?
>
>

Задача 10

Задача 10 #37 ID 5058

Вася придумал функцию $f(x)$ такую, что для любого действительного числа x и для некоторого фиксированного положительного числа k выполняется равенство $(\sqrt{3}-f(x))f(x+k)=\sqrt{3}f(x)+1$. При каком наибольшем целом значении m из интервала $(30;50)$ можно утверждать, что $f(x+mk)=f(x)$ при всех действительных x ?

999976295058

Задача 10 #38 ID 5059

Вася придумал функцию $f(x)$ такую, что для любого действительного числа x и для некоторого фиксированного положительного числа k выполняется равенство $(\sqrt{3}-f(x))f(x+k)=\sqrt{3}f(x)+1$. При каком наибольшем целом значении m из интервала $(35;55)$ можно утверждать, что $f(x+mk)=f(x)$ при всех действительных x ?

999976295059

Задача 10 #39 ID 5060

Вася придумал функцию $f(x)$ такую, что для любого действительного числа x и для некоторого фиксированного положительного числа k выполняется равенство $(\sqrt{3}-f(x))f(x+k)=\sqrt{3}f(x)+1$. При каком наибольшем целом значении m из интервала $(40;65)$ можно утверждать, что $f(x+mk)=f(x)$ при всех действительных x ?

999976295060

Задача 10 #40 ID 5061

Вася придумал функцию $f(x)$ такую, что для любого действительного числа x и для некоторого фиксированного положительного числа k выполняется равенство $(\sqrt{3}-f(x))f(x+k)=\sqrt{3}f(x)+1$. При каком наибольшем целом значении m из интервала $(45;70)$ можно утверждать, что $f(x+mk)=f(x)$ при всех действительных x ?

999976295061