

1 9 класс

1. (а) Фишка покрашена в два цвета. Одна сторона — в красный, другая — в синий. На стол положили красной стороной вверх 100 фишек. Вася перевернул 55 фишек, затем Коля перевернул 68 фишек, наконец, Петя перевернул 77 фишек. Оказалось, что теперь все фишки лежат синей стороной вверх. Сколько фишек переворачивали все трое ребят?

Ответ: 50.

Решение. Поскольку все фишки в итоге лежат синей стороной вверх, то каждую из них переворачивали либо 1 раз, либо 3 раза. Всего было сделано 170 переворачиваний: 100 из них потребовалось, чтобы перевернуть каждую фишку 1 раз; остальные 70 — чтобы какие-то фишки перевернуть еще по 2 раза. Поэтому все трое ребят перевернули 35 фишек.

- (б) Фишка покрашена в два цвета. Одна сторона — в красный, другая — в синий. На стол положили красной стороной вверх 120 фишек. Вася перевернул 37 фишек, затем Коля перевернул 98 фишек, наконец, Петя перевернул 25 фишек. Оказалось, что теперь все фишки лежат синей стороной вверх. Сколько фишек переворачивали все трое ребят?

Ответ: 20.

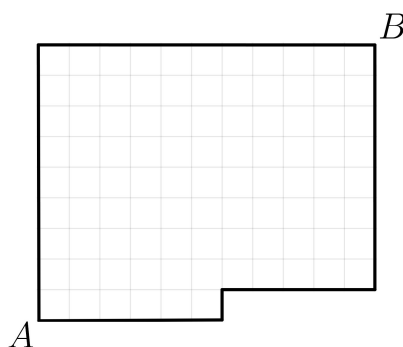
- (с) Фишка покрашена в два цвета. Одна сторона — в красный, другая — в синий. На стол положили красной стороной вверх 140 фишек. Вася перевернул 80 фишек, затем Коля перевернул 37 фишек, наконец, Петя перевернул 55 фишек. Оказалось, что теперь все фишки лежат синей стороной вверх. Сколько фишек переворачивали все трое ребят?

Ответ: 16.

- (д) Фишка покрашена в два цвета. Одна сторона — в красный, другая — в синий. На стол положили красной стороной вверх 160 фишек. Вася перевернул 126 фишек, затем Коля перевернул 77 фишек, наконец, Петя перевернул 45 фишек. Оказалось, что теперь все фишки лежат синей стороной вверх. Сколько фишек переворачивали все трое ребят?

Ответ: 44.

2. (а) Сколькими способами можно добраться от точки A до точки B по линиям сетки, расположенным внутри или на границе представленной на рисунке фигуры, если разрешено двигаться только вправо или вверх?

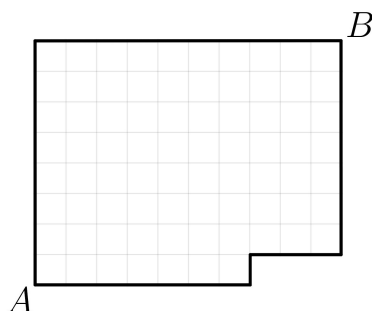


Ответ: $C_{20}^9 - C_{13}^9 = 167245$.

Решение. Фигура представляет собой прямоугольник 9×11 с диагональю AB (назовём его P), из которого удалён «угловой прямоугольник» 1×5 (назовём его Q). Вычислим искомое количество путей как общее число путей из A в B внутри P за вычетом тех путей из A в B , что проходят хотя бы через один узел внутри Q . Общее число путей внутри P равно C_{11+9}^9 (из всех $11 + 9$ шагов выбираются шаги «вверх»). Путей, попадающих в Q , всего C_{4+9}^4 — это те и только те пути,

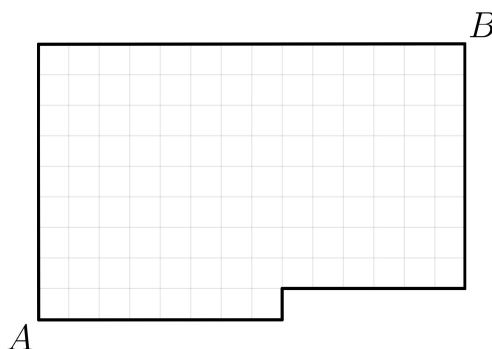
в которых первые 7 шагов совершаются вправо. В итоге получаем $C_{20}^9 - C_{13}^4 = 167245$ путей, удовлетворяющих условию.

- (b) Сколькими способами можно добраться от точки A до точки B по линиям сетки, расположенным внутри или на границе представленной на рисунке фигуры, если разрешено двигаться только вправо или вверх?



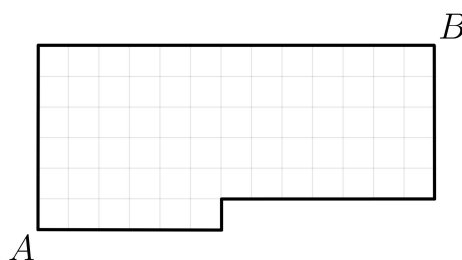
Ответ: $C_{18}^8 - C_{10}^8 = 43713$.

- (c) Сколькими способами можно добраться от точки A до точки B по линиям сетки, расположенным внутри или на границе представленной на рисунке фигуры, если разрешено двигаться только вправо или вверх?



Ответ: $C_{23}^9 - C_{14}^9 = 815188$.

- (d) Сколькими способами можно добраться от точки A до точки B по линиям сетки, расположенным внутри или на границе представленной на рисунке фигуры, если разрешено двигаться только вправо или вверх?



Ответ: $C_{19}^6 - C_{12}^6 = 26208$.

3. (a) Найдите количество пар таких натуральных чисел a и b , что a — трехзначное, b — четырехзначное, в своей записи они не содержат нулевых цифр, а их произведение делится на 15.

Ответ: 557685.

Решение. 1) a делится на 15 (таких a — 27), b — любое (таких b — 6561). $S_1 = 177147$.

2) a делится на 5, но не делится на 3 (таких $a — 54$), b делится на 3, но не делится на 5 (таких $b — 1944$). $S_2 = 104976$.

3) a делится на 3, но не делится на 5 (таких $a — 216$), b делится на 5, но не делится на 3 (таких $b — 486$). $S_3 = 104976$.

4) $a —$ любое (таких $a — 729$), b делится на 15 (таких $b — 243$). $S_4 = 177147$.

5) a делится на 15 (таких $a — 27$), b делится на 15 (таких $b — 243$). $S_5 = 6561$.

Общее количество пар: $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 557685$.

- (b) Найдите количество пар таких натуральных чисел a и b , что $a —$ трехзначное, $b —$ шестизначное, в своей записи они не содержат нулевых цифр, а их произведение делится на 15.

Ответ: 45172485.

- (c) Найдите количество пар таких натуральных чисел a и b , что $a —$ четырехзначное, $b —$ пятизначное, в своей записи они не содержат нулевых цифр, а их произведение делится на 15.

Ответ: 45172485.

- (d) Найдите количество пар таких натуральных чисел a и b , что $a —$ трехзначное, $b —$ пятизначное, в своей записи они не содержат нулевых цифр, а их произведение делится на 15.

Ответ: 5019165.

4. (a) Вася записал в тетрадь 40 ненулевых чисел (среди которых могут быть равные), а затем дописал к ним ещё 40 чисел, вычтя из квадрата каждого исходного числа сумму остальных исходных чисел. Какое наибольшее число отрицательных чисел среди всех 80 выписанных чисел могло получиться у Васи?

Ответ: 78.

Решение. Если все исходные числа отрицательные, то все дописанные будут положительными.

Если среди исходных чисел есть ровно 1 положительное и 39 отрицательных, то среди дописанных будет положительное число (из квадрата положительного вычли сумму оставшихся отрицательных). Тогда отрицательных не больше 78.

Если же среди исходных чисел хотя бы 2 положительных, то отрицательных будет не больше 78.

Таким образом, отрицательных чисел будет не больше 78.

78 отрицательных чисел могло получиться, например, если одно из исходных чисел равно 1000, а остальные числа равны -1 .

- (b) Вася записал в тетрадь 60 ненулевых чисел (среди которых могут быть равные), а затем дописал к ним ещё 60 чисел, вычтя из квадрата каждого исходного числа сумму остальных исходных чисел. Какое наибольшее число отрицательных чисел среди всех 120 выписанных чисел могло получиться у Васи?

Ответ: 118.

- (c) Вася записал в тетрадь 80 ненулевых чисел (среди которых могут быть равные), а затем дописал к ним ещё 80 чисел, вычтя из квадрата каждого исходного числа сумму остальных исходных чисел. Какое наибольшее число отрицательных чисел среди всех 160 выписанных чисел могло получиться у Васи?

Ответ: 158.

- (d) Вася записал в тетрадь 100 ненулевых чисел (среди которых могут быть равные), а затем дописал к ним ещё 100 чисел, вычтя из квадрата каждого исходного числа сумму остальных исходных чисел. Какое наибольшее число отрицательных чисел среди всех 200 выписанных чисел могло получиться у Васи?

Ответ: 198.

5. (a) В параллелограмме $ABCD$ выполняется соотношение $BC = 3AB$. Биссектрисы углов BAD и ABC пересекают прямую CD в точках P и Q соответственно. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если $PQ = 5$.

Ответ: 8.

Решение.

Пусть $AB = CD = a$, тогда $BC = AD = 3a$. Углы BAP и PAD равны, так как AP — биссектриса угла BAD ; углы BAP и APD равны как накрест лежащие, следовательно, $\angle PAD = \angle APD$ и ADP — равнобедренный треугольник, где $DP = AD = 3a$. Аналогично доказывается, что треугольник BCQ является тоже равнобедренным и $CQ = BC = 3a$. В таком случае

$$PQ = CP + CD + DQ = 5a = 5 \implies a = 1.$$

Искомый периметр равен $8a = 8$.

- (b) В параллелограмме $ABCD$ выполняется соотношение $BC = 4AB$. Биссектрисы углов BAD и ABC пересекают прямую CD в точках P и Q соответственно. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если $PQ = 7$.

Ответ: 10.

- (c) В параллелограмме $ABCD$ выполняется соотношение $BC = 5AB$. Биссектрисы углов BAD и ABC пересекают прямую CD в точках P и Q соответственно. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если $PQ = 3$.

Ответ: 4.

- (d) В параллелограмме $ABCD$ выполняется соотношение $BC = 6AB$. Биссектрисы углов BAD и ABC пересекают прямую CD в точках P и Q соответственно. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если $PQ = 11$.

Ответ: 14.

6. (a) Найдите количество способов расставить 150 монет попарно различных номиналов в ряд так, чтобы нашлось не более двух пар монет (не обязательно соседних), для которых монета, стоящая правее, имеет больший номинал.

Ответ: 11324.

Решение. Две пары могут получиться либо когда найдутся ровно две монеты, справа от которых найдется ровно по одной монете большего номинала, либо когда найдется только одна монета, справа от которой ровно две монеты большего номинала, таких способов

$$C_{149}^2 + (150 - 2).$$

Одна пара может получиться $(150 - 1)$ способом, а ни одной пары — 1 способом. В итоге получаем

$$(150 - 2 + C_{149}^2) + (150 - 1) + 1 = 11\,324.$$

- (b) Найдите количество способов расставить 160 монет попарно различных номиналов в ряд так, чтобы нашлось не более двух пар монет (не обязательно соседних), для которых монета, стоящая правее, имеет больший номинал.

Ответ: 12879.

- (c) Найдите количество способов расставить 170 монет попарно различных номиналов в ряд так, чтобы нашлось не более двух пар монет (не обязательно соседних), для которых монета, стоящая правее, имеет больший номинал.

Ответ: 14534.

- (d) Найдите количество способов расставить 180 монет попарно различных номиналов в ряд так, чтобы нашлось не более двух пар монет (не обязательно соседних), для которых монета, стоящая правее, имеет больший номинал.

Ответ: 16289.

7. (a) Для некоторых различных чисел x и y выполняются равенства $x^2 - y^2 = 15(x - y)$ и $x^3 - y^3 = 225(x - y)$. При каком наибольшем k может выполняться равенство $x^7 - y^7 = k(x^4 - y^4)$?

Ответ: 3375.

Решение. Из условия следует, что $x + y = 15$ и $x^2 + xy + y^2 = 225 = 15^2$ (поскольку $x - y \neq 0$). Возведя первое равенство в квадрат и вычтя из него второе, получим, что $xy = 0$. Отсюда следует, что одно из чисел равно нулю, а другое равно 15. Без ограничения общности $x = 15$, $y = 0$. Тогда $x^7 - y^7 = 15^7 = 15^3 \cdot 15^4 = 15^3(x^4 - y^4)$. То есть k может принимать только одно значение $15^3 = 3375$.

- (b) Для некоторых различных чисел x и y выполняются равенства $x^2 - y^2 = 16(x - y)$ и $x^3 - y^3 = 256(x - y)$. При каком наибольшем k может выполняться равенство $x^7 - y^7 = k(x^4 - y^4)$?

Ответ: 4096.

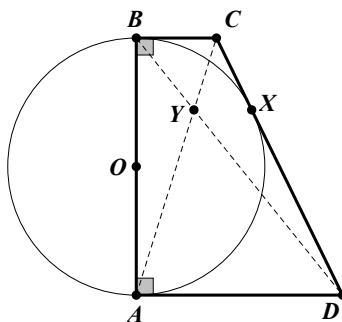
- (c) Для некоторых различных чисел x и y выполняются равенства $x^2 - y^2 = 17(x - y)$ и $x^3 - y^3 = 289(x - y)$. При каком наибольшем k может выполняться равенство $x^7 - y^7 = k(x^4 - y^4)$?

Ответ: 4913.

- (d) Для некоторых различных чисел x и y выполняются равенства $x^2 - y^2 = 18(x - y)$ и $x^3 - y^3 = 324(x - y)$. При каком наибольшем k может выполняться равенство $x^7 - y^7 = k(x^4 - y^4)$?

Ответ: 5832.

8. (a) На приведённом чертеже $ABCD$ — прямоугольная трапеция, основания BC и AD которой равны a и b соответственно, а O — центр окружности, касающейся стороны CD . Найдите расстояние между точками X и Y .



Ответ: $\frac{ab}{a+b}$.

Решение. По свойству касательных $CX = CB = a$ и $DX = DA = b$. Из подобия треугольников BCY и DAY следует, что $CY : AY = a : b$, с другой стороны $CX : XB = a : b$, поэтому $XY \parallel BC$. Значит, треугольники DXY и DCB подобны, и

$$XY = BC \cdot \frac{DX}{DC} = \frac{ab}{a+b}.$$

- (b) На приведённом чертеже $ABCD$ — прямоугольная трапеция, основания BC и AD которой равны 6 и 10 соответственно, а O — центр окружности, касающейся стороны CD . Найдите расстояние между точками X и Y .

Ответ: 3,75.

- (c) На приведённом чертеже $ABCD$ — прямоугольная трапеция, основания BC и AD которой равны 6 и 14 соответственно, а O — центр окружности, касающейся стороны CD . Найдите расстояние между точками X и Y .

Ответ: 4,2.

- (d) На приведённом чертеже $ABCD$ — прямоугольная трапеция, основания BC и AD которой равны 4 и 6 соответственно, а O — центр окружности, касающейся стороны CD . Найдите расстояние между точками X и Y .

Ответ: 2,4.

- (e) На приведённом чертеже $ABCD$ — прямоугольная трапеция, основания BC и AD которой равны 2 и 6 соответственно, а O — центр окружности, касающейся стороны CD . Найдите расстояние между точками X и Y .

Ответ: 1,5.

9. (a) Положительные числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и y удовлетворяют равенствам:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 517 - 256y + 96y^2 = 0$$

и

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} + 763 - 16y^3 + y^4 = 0.$$

Какое наибольшее значение может принимать y ?

Ответ: 4.

Решение. Сложим уравнения и получим равенство

$$x_1 + \frac{1}{x_1} + x_2 + \frac{1}{x_2} + x_3 + \frac{1}{x_3} + x_4 + \frac{1}{x_4} + x_5 + \frac{1}{x_5} = 10 - (y - 4)^4.$$

Левая часть не меньше $2 \cdot 5 = 10$, а правая — не больше 10, поэтому единственная возможность выполнить равенства — это положить $y = 4$. Прямой проверкой можно убедиться, что при $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$ и $y = 4$ оба данных в условии равенства выполняются.

- (b) Положительные числа $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ и y удовлетворяют равенствам:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 318 - 108y = 0$$

и

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} + \frac{1}{x_6} - 249 + 54y^2 - 12y^3 + y^4 = 0.$$

Какое наибольшее значение может принимать y ?

Ответ: 3.

- (c) Положительные числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и y удовлетворяют равенствам:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 1019 - 256y = 0$$

и

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} - 773 + 96y^2 - 16y^3 + y^4 = 0.$$

Какое наибольшее значение может принимать y ?

Ответ: 4.

- (d) Положительные числа $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ и y удовлетворяют равенствам:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 - 492 + 54y^2 = 0$$

и

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} + \frac{1}{x_6} + 561 - 108y - 12y^3 + y^4 = 0.$$

Какое наибольшее значение может принимать y ?

Ответ: 3.

10. (a) Двести школьников собирают наклейки, среди которых есть наклейки редких видов. Оказалось, что у каждого школьника есть наклейки ровно двух редких видов, и для каждого редкого вида наклеек найдется школьник, у которого есть наклейка такого вида. Также известно, что каких бы 10 школьников ни взять, найдется редкий вид наклеек такой, что его нет ни у кого из этих 10 школьников. При каком наименьшем количестве редких видов наклеек такая ситуация возможна?

Ответ: 12.

Решение. Пусть редких видов не более 11. Выберем любого школьника. Пусть у него есть наклейки 1 и 2 редких видов. Теперь можно выбрать школьника, у которого есть наклейки 3 вида, затем школьника, у которого есть наклейки 4 вида и т. д. Всего мы выберем не более 10 школьников (некоторые из выбранных школьников могли совпасть). Дополнив их, если нужно, до группы из 10 человек, получим, что для этой группы нет редкого вида, которого нет ни у кого из этих 10 школьников. Противоречие. Покажем, что для 12 редких типов такая ситуация возможна. Пусть у каждого школьника есть наклейка 12-го типа и наклейка какого-то из первых 11 типов (при этом наклейка каждого из первых 11 типов есть у какого-то школьника.). Тогда у любой группы из 10 школьников есть наклейки не более 10 из первых 11 редких типов, поэтому у них какой-то редкий тип точно отсутствует.

- (b) Триста школьников собирают наклейки, среди которых есть наклейки редких видов. Оказалось, что у каждого школьника есть наклейки ровно двух редких видов, и для каждого редкого вида наклеек найдется школьник, у которого есть наклейка такого вида. Также известно, что каких бы 11 школьников ни взять, найдется редкий вид наклеек такой, что его нет ни у кого из этих 11 школьников. При каком наименьшем количестве редких видов наклеек такая ситуация возможна?

Ответ: 13.

- (c) Четыреста школьников собирают наклейки, среди которых есть наклейки редких видов. Оказалось, что у каждого школьника есть наклейки ровно двух редких видов, и для каждого редкого вида наклеек найдется школьник, у которого есть наклейка такого вида. Также известно, что каких бы 12 школьников ни взять, найдется редкий вид наклеек такой, что его нет ни у кого из этих 12 школьников. При каком наименьшем количестве редких видов наклеек такая ситуация возможна?

Ответ: 14.

- (d) Пятьсот школьников собирают наклейки, среди которых есть наклейки редких видов. Оказалось, что у каждого школьника есть наклейки ровно двух редких видов, и для каждого редкого вида наклеек найдется школьник, у которого есть наклейка такого вида. Также известно, что каких бы 13 школьников ни взять, найдется редкий вид наклеек такой, что его нет ни у кого из этих 13 школьников. При каком наименьшем количестве редких видов наклеек такая ситуация возможна?

Ответ: 15.