

3 11 класс

1. (а) Пусть для некоторого α уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня $x_1 = \cos \alpha$ и $x_2 = \sin \alpha$. Какое наименьшее значение может принимать b , если $a + 2c = \frac{9}{a}$?

Ответ: -3 .

Решение. По условию, $a^2 + 2ac = 9$. Докажем, что $b^2 = a^2 + 2ac$. Из теоремы Виета получаем $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{c}{a}$ и $\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{b}{a}$. Так как $a \neq 0$, то разделим равенство $b^2 = a^2 + 2ac$ на a^2 . Нам нужно доказать равенство $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 + 2\frac{c}{a}$. Получаем $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + 2\frac{c}{a}$, что и требовалось. Значит, $b^2 = 9$, откуда $b = \pm 3$. Искомое наименьшее значение равно -3 . (По условию такой трехчлен $ax^2 + bx + c$ существует. Но тогда и трехчлен $(-ax^2 - bx - c)$ также удовлетворяет условию.)

- (b) Пусть для некоторого α уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня $x_1 = \cos \alpha$ и $x_2 = \sin \alpha$. Какое наименьшее значение может принимать b , если $a + 2c = \frac{16}{a}$?

Ответ: -4 .

- (c) Пусть для некоторого α уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня $x_1 = \cos \alpha$ и $x_2 = \sin \alpha$. Какое наименьшее значение может принимать b , если $a + 2c = \frac{25}{a}$?

Ответ: -5 .

- (d) Пусть для некоторого α уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня $x_1 = \cos \alpha$ и $x_2 = \sin \alpha$. Какое наименьшее значение может принимать b , если $a + 2c = \frac{36}{a}$?

Ответ: -6 .

2. (а) Петя нарисовал на плоскости прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = \sqrt{3}$, $AC = 4$. Вася последовательно передвигает сначала точку A вдоль прямой, параллельной BC , затем точку B вдоль прямой, параллельной (новой) AC , а затем C вдоль прямой, параллельной (новой) прямой AB . Обозначим полученный Васей треугольник $A'B'C'$. Он обнаружил, что $\angle A'B'C' = 120^\circ$, а $A'B' = 5$. Найдите $B'C'$.

Ответ: $1,6$.

Решение. При всех указанных перемещениях точек площадь треугольника остаётся неизменной, поэтому $AB \cdot AC = B'C' \cdot A'B' \cdot \sin \angle A'B'C'$, откуда $B'C' = 1,6$.

- (b) Петя нарисовал на плоскости прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = \sqrt{2}$, $AC = 3$. Вася последовательно передвигает сначала точку A вдоль прямой, параллельной BC , затем точку B вдоль прямой, параллельной (новой) AC , а затем C вдоль прямой, параллельной (новой) прямой AB . Обозначим полученный Васей треугольник $A'B'C'$. Он обнаружил, что $\angle A'B'C' = 135^\circ$, а $A'B' = 4$. Найдите $B'C'$.

Ответ: $1,5$.

- (c) Петя нарисовал на плоскости прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = \sqrt{7}$, $AC = 5$. Вася последовательно передвигает сначала точку A вдоль прямой, параллельной BC , затем точку B вдоль прямой, параллельной (новой) AC , а затем C вдоль прямой, параллельной (новой) прямой AB . Обозначим полученный Васей треугольник $A'B'C'$. Он обнаружил, что $\angle A'B'C' = 150^\circ$, а $A'B' = 4\sqrt{7}$. Найдите $B'C'$.

Ответ: $2,5$.

- (d) Петя нарисовал на плоскости прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 3$, $AC = \sqrt{15}$. Вася последовательно передвигает сначала точку A вдоль прямой, параллельной

BC , затем точку B вдоль прямой, параллельной (новой) AC , а затем C вдоль прямой, параллельной (новой) прямой AB . Обозначим полученный Васей треугольник $A'B'C'$. Он обнаружил, что $\angle A'B'C' = 60^\circ$, а $A'B' = \sqrt{5}$. Найдите $B'C'$.

Ответ: 6.

3. (а) Найдите минимальное значение параметра a , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 3 - 4a \geq 0, \\ x - 2(a - 1)y - 4 \leq 0, \\ ax - x - y + 3 \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: 0,5.

Решение. Исходная система неравенств при каждом фиксированном значении параметра a задает пересечение трех полуплоскостей, границами которых являются прямые l_1, l_2 и l_3 , заданные уравнениями $ax - y + 3 - 4a = 0, x - 2(a - 1)y - 4 = 0$ и $ax - x - y + 3 = 0$ соответственно.

Заметим, что если прямые l_1, l_2 и l_3 не проходят через одну точку, то такие значения параметра нам не подходят: в этом случае пересечение соответствующих полуплоскостей будет пустым множеством или будет состоять из бесконечного числа точек. Таким образом, необходимым условием для искомого значения параметра является существование общей точки для прямых l_1, l_2 и l_3 .

Найдем точку пересечения прямых l_1 и l_3 : ей будет точка $A(4a; 4a^2 - 4a + 3)$.

Запишем условие прохождения прямой l_2 через точку A : получим уравнение $4a^3 - 8a^2 + 5a - 1 = 0$. Легко проверить, что его корнями являются $a = 1, a = 2$ и $a = 0,5$. Остается проверить найденные значения параметра. Проверкой убеждаемся, что подходит лишь значение $a = 0,5$.

- (b) Найдите максимальное значение параметра a , при котором система

$$\begin{cases} (a + 1)x + 2y - 4a - 10 \leq 0, \\ 2x - ay - 8 \leq 0, \\ ax + x - 2y + 6 \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: -2.

- (c) Найдите минимальное значение параметра a , при котором система

$$\begin{cases} (2a - 1)x - y - 6a + 8 \geq 0, \\ x - 4(a - 1)y + 8a - 11 \leq 0, \\ 2(a - 1)x - y + 3 + 2a \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: 0,75.

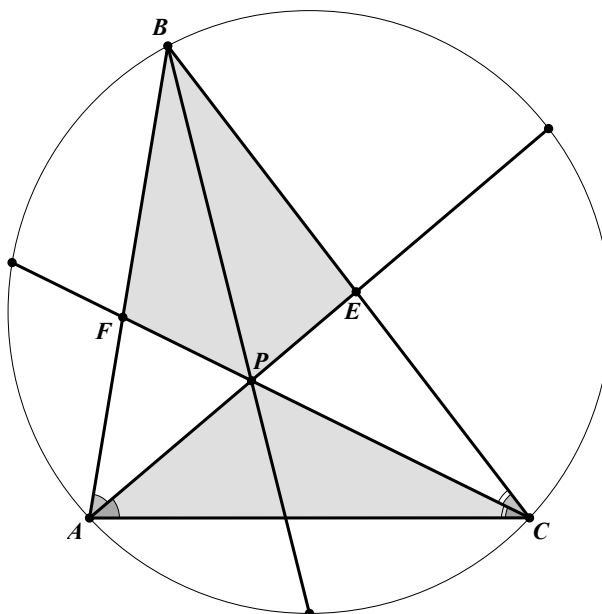
- (d) Найдите максимальное значение параметра a , при котором система

$$\begin{cases} (a + 2)x + 4y - 4a - 20 \leq 0, \\ 4x - ay - 16 \leq 0, \\ ax + 2x - 4y + 12 \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: -4.

4. (a) Треугольник ABC вписан в окружность радиуса R , а P — точка пересечения его биссектрис. Известно, что площадь треугольника APC и площадь четырехугольника $PFBE$ равны (см. рисунок). Найдите наибольшее значение произведения $AB \cdot BC$, если $\angle ABC = \beta$.



Ответ: $4R^2 \sin^2 \beta = AB \cdot BC$.

Решение. Обозначим $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Из условия следует, что $S_{ABE} = S_{ACF}$. Первая площадь составляет $\frac{c}{b+c}$ от площади ABC , а вторая — долю $\frac{b}{a+b}$ от той же площади. Значит, $\frac{c}{b+c} = \frac{b}{a+b}$, откуда $ac = b^2$. С помощью теоремы синусов получаем $ac = 4R^2 \sin^2 \beta$.

- (b) Треугольник ABC вписан в окружность радиуса $20\sqrt{2}$, а P — точка пересечения его биссектрис. Известно, что площадь треугольника APC и площадь четырехугольника $PFBE$ равны (см. рисунок). Найдите наибольшее значение произведения $AB \cdot BC$, если $\angle ABC = \arcsin \frac{1}{8}$.

Ответ: 50.

- (c) Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 30, а P — точка пересечения его биссектрис. Известно, что площадь треугольника APC и площадь четырехугольника $PFBE$ равны (см. рисунок). Найдите наибольшее значение произведения $AB \cdot BC$, если $\angle ABC = \arcsin \frac{1}{4}$.

Ответ: 225.

- (d) Треугольник ABC вписан в окружность радиуса $2\sqrt{3}$, а P — точка пересечения его биссектрис. Известно, что площадь треугольника APC и площадь четырехугольника $PFBE$ равны (см. рисунок). Найдите наибольшее значение произведения $AB \cdot BC$, если $\angle ABC = \arcsin \frac{3}{4}$.

Ответ: 27.

- (e) Треугольник ABC вписан в окружность радиуса $7\sqrt{7}$, а P — точка пересечения его биссектрис. Известно, что площадь треугольника APC и площадь четырехугольника $PFBE$ равны (см. рисунок). Найдите наибольшее значение произведения $AB \cdot BC$, если $\angle ABC =$

$$\arcsin \frac{1}{7}.$$

Ответ: 28.

5. (a) Найдите количество пар таких натуральных чисел a и b , что a — трехзначное, b — четырехзначное, а их произведение делится на 35.

Ответ: 774470.

Решение. 1) a делится на 35 (таких a — 26), b — любое (таких b — 9000). $S_1 = 234000$.

2) a делится на 5, но не делится на 7 (таких a — 154), b делится на 7, но не делится на 5 (таких b — 1029). $S_2 = 158466$.

3) a делится на 7, но не делится на 5 (таких a — 102), b делится на 5, но не делится на 7 (таких b — 1543). $S_3 = 157386$.

4) a — любое (таких a — 900), b делится на 35 (таких b — 257). $S_4 = 231300$.

5) a делится на 35 (таких a — 26), b делится на 35 (таких b — 257). $S_5 = 6682$.

Общее количество пар: $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 774470$.

- (b) Найдите количество пар таких натуральных чисел a и b , что a — трехзначное, b — четырехзначное, а их произведение делится на 21.

Ответ: 1193437.

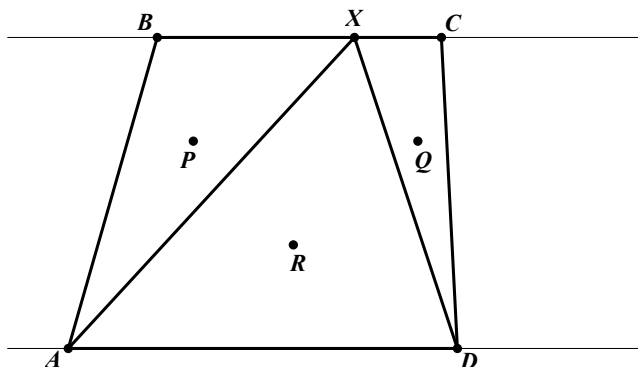
- (c) Найдите количество пар таких натуральных чисел a и b , что a — трехзначное, b — четырехзначное, а их произведение делится на 33.

Ответ: 777645.

- (d) Найдите количество пар таких натуральных чисел a и b , что a — трехзначное, b — четырехзначное, а их произведение делится на 55.

Ответ: 508625.

6. (a) На двух параллельных прямых взяты точки A, B, C, D, X , как показано на рисунке. Вася нашёл отношение $BC : AD = x$, после чего отметил точки пересечения медиан P, Q, R соответственно треугольников BAX, CDX и AXD . Петя вычислил площадь треугольника PQR : она оказалась равна S . Найдите площадь треугольника AXD .



Ответ: $S_{AXD} = \frac{9}{1+x} S_{PQR}$.

Решение. Докажем, что $S_{ABCD} = 9S_{PQR}$. Поскольку точка пересечения медиан делит медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины, из теоремы Фалеса следует, что $PQ \parallel BC$, а расстояние от P или Q до прямой BC равно расстоянию от R до прямой AD и равно трети расстояния h между прямыми AD и BC . Значит, высота RH треугольника $R PQ$ втрое меньше

высоты трапеции $ABCD$. Вновь по теореме Фалеса находим, что часть прямой PQ , попавшая внутрь треугольника AHD , равна $\frac{AD}{3}$, а P и Q делят пополам отрезки этой прямой, попавшие внутрь треугольников ABX и CDX соответственно, и $PQ = (BX + CX + AD)/3$. Значит, $S_{PQR} = \frac{1}{2}PQ \cdot RH = \frac{1}{9} \cdot \frac{AD + BC}{2} \cdot h = \frac{1}{9}S_{ABCD}$. Теперь выразим S_{AXD} через площадь четырёхугольника $ABCD$: $S_{ABCD} = 9S_{PQR} = S_{AXD} + (S_{ABX} + S_{DCX}) = S_{AXD} + x \cdot S_{AXD} = (1 + x)S_{AXD}$.

- (b) На двух параллельных прямых взяты точки A, B, C, D, X , как показано на рисунке. Вася нашёл отношение $BC : AD = 1 : 5$, после чего отметил точки пересечения медиан P, Q, R соответственно треугольников BAX, CDX и AHD . Петя вычислил площадь треугольника PQR : она оказалась равна 100. Найдите площадь треугольника AHD .

Ответ: 750.

- (c) На двух параллельных прямых взяты точки A, B, C, D, X , как показано на рисунке. Вася нашёл отношение $BC : AD = 1 : 4$, после чего отметил точки пересечения медиан P, Q, R соответственно треугольников BAX, CDX и AHD . Петя вычислил площадь треугольника PQR : она оказалась равна 90. Найдите площадь треугольника AHD .

Ответ: 648.

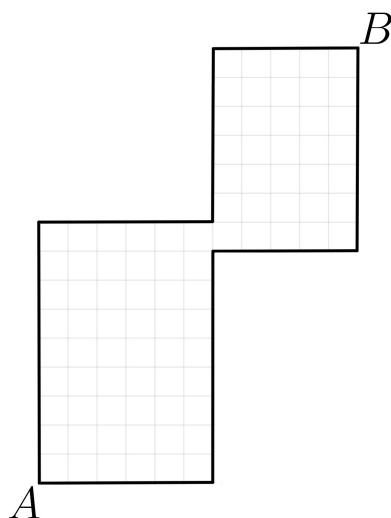
- (d) На двух параллельных прямых взяты точки A, B, C, D, X , как показано на рисунке. Вася нашёл отношение $BC : AD = 1 : 3$, после чего отметил точки пересечения медиан P, Q, R соответственно треугольников BAX, CDX и AHD . Петя вычислил площадь треугольника PQR : она оказалась равна 80. Найдите площадь треугольника AHD .

Ответ: 540.

- (e) На двух параллельных прямых взяты точки A, B, C, D, X , как показано на рисунке. Вася нашёл отношение $BC : AD = 1 : 7$, после чего отметил точки пересечения медиан P, Q, R соответственно треугольников BAX, CDX и AHD . Петя вычислил площадь треугольника PQR : она оказалась равна 280. Найдите площадь треугольника AHD .

Ответ: 2205.

7. (a) Сколькими способами можно добраться от точки A до точки B по линиям сетки, расположенным внутри или на границе представленной на рисунке фигуры, если разрешено двигаться только вправо или вверх?

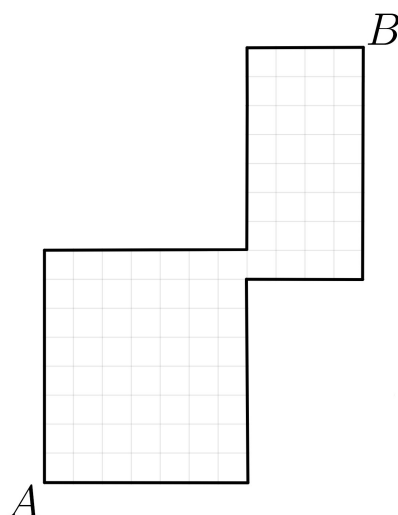


Ответ: $C_{6+8}^6 \cdot C_{4+7}^4 + C_{5+9}^5 \cdot C_{5+6}^5 + C_{6+8}^6 \cdot C_{5+6}^5 = 3303300$.

Решение. Фигура представляет собой объединение двух прямоугольников с углами A и B со-

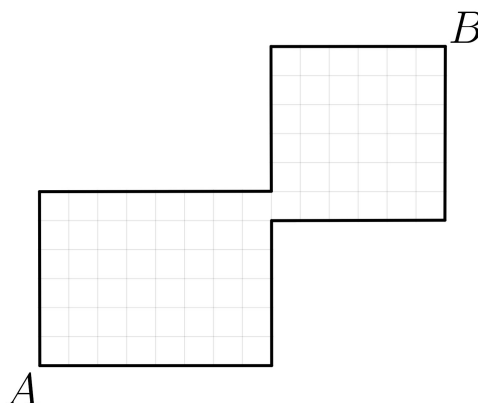
ответственно, пересекающихся лишь по отрезку XU длины 1, лежащему на границах обоих прямоугольников (пусть для определённости X находится ближе к A , чем U). Разобьём множество всех удовлетворяющих условию путей на три непересекающихся подмножества: пути из первого класса проходят через точку X , но не проходят через U , пути второго класса проходят через U , но не через X , а пути третьего класса проходят по отрезку XU . Подсчёт путей по трём данным классам приводит к ответу $C_{6+8}^6 \cdot C_{4+7}^4 + C_{5+9}^5 \cdot C_{5+6}^5 + C_{6+8}^6 \cdot C_{5+6}^5$.

- (b) Сколькими способами можно добраться от точки A до точки B по линиям сетки, расположенным внутри или на границе представленной на рисунке фигуры, если разрешено двигаться только вправо или вверх?



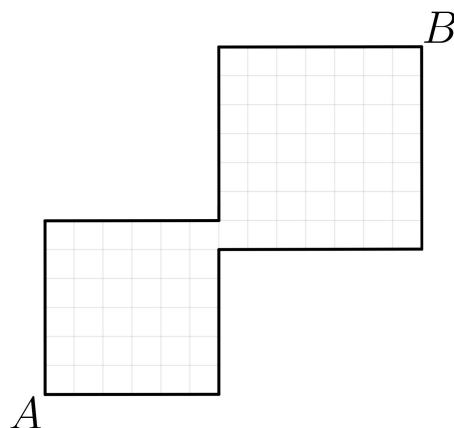
Ответ: $C_{7+7}^7 \cdot C_{3+8}^3 + C_{6+8}^6 \cdot C_{4+7}^4 + C_{7+7}^7 \cdot C_{4+7}^4 = 2689830$.

- (c) Сколькими способами можно добраться от точки A до точки B по линиям сетки, расположенным внутри или на границе представленной на рисунке фигуры, если разрешено двигаться только вправо или вверх?



Ответ: $C_{8+5}^8 \cdot C_{5+6}^5 + C_{7+6}^7 \cdot C_{6+5}^6 + C_{8+5}^8 \cdot C_{6+5}^6 = 1981980$.

- (d) Сколькими способами можно добраться от точки A до точки B по линиям сетки, расположенным внутри или на границе представленной на рисунке фигуры, если разрешено двигаться только вправо или вверх?



Ответ: $C_{6+5}^6 \cdot C_{6+7}^6 + C_{5+6}^5 \cdot C_{7+6}^7 + C_{6+5}^6 \cdot C_{7+6}^7 = 2378376$.

8. (a) Найдите количество всех пар натуральных чисел x, y , при которых является верным равенство $\sqrt[3]{10^x} + x^3 + 3x^2 + x + 5y = 10^{1001}$.

Ответ: 400.

Решение. Заметим, что число x должно делиться на 3. Также заметим, что если $x \leq 1000 \cdot 3$, то $\sqrt[3]{10^x} + x^3 + 3x^2 + x < 10^{1001}$, а если $x \geq 1001 \cdot 3$, то $\sqrt[3]{10^x} + x^3 + 3x^2 + x > 10^{1001}$. Поэтому если для натурального $x \leq 1000 \cdot 3$ выражение $\sqrt[3]{10^x} + x^3 + 3x^2 + x$ делится на 5, то найдется такое натуральное y , что требуемое равенство будет верным.

Выражение $\sqrt[3]{10^x}$ делится на 10, а выражение $x^3 + 3x^2 + x$ делится на 5 только в том случае, когда x имеет остаток 0 или 1 при делении на 5. Таким образом, нам подходят такие натуральные $x \leq 1000 \cdot 3$, которые делятся на 3 и имеют остаток 0 или 1 при делении на 5. То есть это числа вида $15t$ и $15t + 6$. Таких чисел от 1 до $1000 \cdot 3$ будет ровно 400, и для каждого из них найдется ровно одно натуральное y .

- (b) Найдите количество всех пар натуральных чисел x, y , при которых является верным равенство $\sqrt[3]{10^x} + x^3 - x^2 + 3x + 5y = 10^{2101}$.

Ответ: 1260.

- (c) Найдите количество всех пар натуральных чисел x, y , при которых является верным равенство $\sqrt[3]{10^x} + x^3 + 2x^2 - 3x + 5y = 10^{3201}$.

Ответ: 1920.

- (d) Найдите количество всех пар натуральных чисел x, y , при которых является верным равенство $\sqrt[3]{10^x} + x^3 - 2x^2 + x + 5y = 10^{4201}$.

Ответ: 1680.

9. (a) Каждый из участников школьного кружка, кроме Андрея, дружит с разным числом других участников. Андрей дружит с 9 из них. Каково наибольшее возможное число школьников в кружке?

Ответ: 20.

Решение. Если среди всех остальных (без Андрея) есть кружковец B , который дружит со всеми, то каждый дружит по крайней мере с одним школьником, следовательно, в группе остальных дружбы распределены так: $1, 2, 3, \dots, n-1$, где n — количество кружковцев. Удалив из группы остальных участников двоих: B и того школьника, который дружит только с B (т. е. имеющего ровно 1 дружбу), получим аналогичную ситуацию, только вместо $n-1$ будет $n-3$. Так, попарно удаляя кружковцев, мы придем к ситуации, когда из группы остальных либо будут удалены все, либо останется один, который дружит с Андреем. При каждом удалении число друзей Андрея

уменьшается на 1. Значит, были удалены либо 18 человек, и тогда общее количество школьников равно 19, либо 16 человек, при этом один остался. В этом случае получаем 18 кружковцев. Если среди остальных (кроме Андрея) нет школьника, который дружит со всеми, то между ними дружбы распределены так: $0, 1, 2, \dots, n - 2$. В этом случае, если удалить того, кто ни с кем не дружит, то получится предыдущая ситуация – человек, имеющий $n - 2$ друзей, дружит со всеми оставшимися. Поэтому в этом случае число кружковцев равно 19 или 20.

- (b) Каждый из участников школьного кружка, кроме Андрея, дружит с разным числом других участников. Андрей дружит с 10 из них. Каково наибольшее возможное число школьников в кружке?

Ответ: 22.

- (c) Каждый из участников школьного кружка, кроме Андрея, дружит с разным числом других участников. Андрей дружит с 8 из них. Каково наибольшее возможное число школьников в кружке?

Ответ: 18.

- (d) Каждый из участников школьного кружка, кроме Андрея, дружит с разным числом других участников. Андрей дружит с 11 из них. Каково наибольшее возможное число школьников в кружке?

Ответ: 24.

10. (a) Вася придумал функцию $f(x)$ такую, что для любого действительного числа x и для некоторого фиксированного положительного числа k выполняется равенство $(\sqrt{3} - f(x))f(x + k) = \sqrt{3}f(x) + 1$. При каком наибольшем целом значении m из интервала $(30; 50)$ можно утверждать, что $f(x + mk) = f(x)$ при всех действительных x ?

Ответ: 48.

Решение. Преобразуем равенство к виду $f(x + k) = \frac{\sqrt{3}f(x) + 1}{\sqrt{3} - f(x)}$. Пусть $g(x) = \arctg(f(x))$. Тогда данное равенство переписывается в виде

$$\operatorname{tg}(g(x + k)) = \frac{\operatorname{tg}(g(x)) + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}{1 - \operatorname{tg}(g(x)) \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}} = \operatorname{tg}(g(x) + \frac{\pi}{6}).$$

Значит,

$$\operatorname{tg}(g(x + mk)) = \operatorname{tg}(g(x) + m \frac{\pi}{6}).$$

Тогда, в силу π -периодичности тангенса, задача сводится к нахождению наибольшего целого t из интервала $(30; 50)$, для которого найдётся такое целое n , что $t \frac{\pi}{6} = \pi n$, т. е. наибольшего t из этого интервала, кратного 6. Значит, $t = 48$.

- (b) Вася придумал функцию $f(x)$ такую, что для любого действительного числа x и для некоторого фиксированного положительного числа k выполняется равенство $(\sqrt{3} - f(x))f(x + k) = \sqrt{3}f(x) + 1$. При каком наибольшем целом значении m из интервала $(35; 55)$ можно утверждать, что $f(x + mk) = f(x)$ при всех действительных x ?

Ответ: 54.

- (c) Вася придумал функцию $f(x)$ такую, что для любого действительного числа x и для некоторого фиксированного положительного числа k выполняется равенство $(\sqrt{3} - f(x))f(x + k) = \sqrt{3}f(x) + 1$. При каком наибольшем целом значении m из интервала $(40; 65)$ можно утверждать, что $f(x + mk) = f(x)$ при всех действительных x ?

Ответ: 60.

- (d) Вася придумал функцию $f(x)$ такую, что для любого действительного числа x и для некоторого фиксированного положительного числа k выполняется равенство $(\sqrt{3} - f(x))f(x + k) = \sqrt{3}f(x) + 1$. При каком наибольшем целом значении m из интервала $(45; 70)$ можно утверждать, что $f(x + mk) = f(x)$ при всех действительных x ?

Ответ: 66.