



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = \sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

1) Пусть стержни вхождема 3 и 7 в шина a, b и c —

a_3, b_3, c_3 и a_7, b_7 и c_7 , соответственно. \Rightarrow

из условия:

$$\begin{cases} a_3 + b_3 \geq 14 & (1) \\ a_7 + b_7 \geq 13 & (2) \\ b_3 + c_3 \geq 19 & (3) \\ b_7 + c_7 \geq 17 & (4) \\ a_3 + c_3 \geq 23 & (5) \\ a_7 + c_7 \geq 42 & (6) \end{cases}$$

Тогда $(abc)_{\min} \geq 3^{(a_3+b_3+c_3)} \cdot 7^{(a_7+b_7+c_7)}$

2.) $((1) + (3) + (5)) \mid : 2$

$$2 \cdot (a_3 + b_3 + c_3) \geq 56$$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 28$$

пример:

$$a_3 = 9$$

$$b_3 = 5$$

$$c_3 = 14$$

3.) $((2) + (4) + (6)) \mid : 2$

$$2 \cdot (a_7 + b_7 + c_7) \geq 72$$

$$a_7 + b_7 + c_7 \geq 36$$

пример:

$$a_7 = 21$$

$$b_7 = 0$$

$$c_7 = 15$$

но $a_7 + c_7 \geq 42$, а $a_3, b_3, c_3, a_7, b_7, c_7 \geq 0$. \Rightarrow

$\Rightarrow a_7 + b_7 + c_7 \geq 42$. пример: $a_7 = c_7 = 21, b_7 = 0$

4.) $(abc)_{\min} = 3^{(a_3+b_3+c_3)_{\min}} \cdot 7^{(a_7+b_7+c_7)_{\min}} =$

$$= 3^{28} \cdot 7^{42} \quad (\text{достигаема при } a = 3^9 \cdot 7^{21}$$

$$b = 3^5 \cdot 7^0$$

$$c = 3^{14} \cdot 7^{21}$$

Ответ: $3^{28} \cdot 7^{42}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2.)

$$\begin{cases} \frac{L}{v_m} - \frac{L}{v_8} = -1 \\ \frac{L}{v_{m+7}} - \frac{L}{v_{8+7}} = -0,6 \end{cases}$$

$$\frac{84}{28} = 3 - 4$$

$$\frac{21 \cdot 345}{27}$$

$$3,5 \cdot 21 + 49$$

$$27 \cdot 4,5$$

$$\frac{1}{v_m} - \frac{1}{v_8} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{84}{35} - \frac{84}{38} = \frac{1}{v_{8+7}} \quad 21 \cdot 3 + 49$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 3,5 \\ \hline 105 \\ + 63 \\ \hline 73,5 \end{array}$$

$$2,4 - 3 = \frac{v_8 - v_m}{v_m v_8} = \frac{(v_{m+7})(v_{8+7})}{v_m v_8} = \frac{5}{3}$$

$$(v_{m+7})(v_{8+7})$$

$$\frac{12}{5} = 2,4$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 2,7 \\ \hline 45 \\ + 135 \\ \hline 108 \\ \hline 121,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 735 \\ + 49 \\ \hline 1225 \end{array}$$

$$3 \cdot 21 + 49$$

$$40 \cdot 28$$

$$5 v_m v_8 = 3 v_m v_8 + 21 v_m + 21 v_8 + 147$$

$$2 v_m v_8 = 21 v_m + 21 v_8 + 147$$

$$\begin{array}{r} 63 \\ + 49 \\ \hline 112 \\ \hline 27 \quad 21 \end{array}$$

$$\frac{84}{242} = \begin{array}{r} 13 \\ \times 4,5 \\ \hline 27 \\ \hline 315 \\ + 48 \\ \hline 1215 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 4 \\ \hline 112 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3,5 \\ \times 21 \\ \hline 70 \\ + 35 \\ \hline 73,5 \end{array}$$

$$v_m = 49 - v_8$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 3 \\ \hline 84 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3,5 \\ + 73,5 \\ \hline 77 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$\frac{a}{b} - \text{несократимое} \Rightarrow (a, b) = 1.$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} \text{ сократили на } m \Rightarrow \begin{matrix} a+b : m \\ a^2 - 9ab + b^2 : m \end{matrix}$$

1) Пусть $a \equiv_{m} v_1$; $b \equiv_{m} v_2$ ($v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$, иначе $(a, b) \neq 1$, т.к. $a+b : m$ и если, доо, $v_1=0$, то $v_2=0 \Rightarrow (a, b) \neq 0$..!!)

a) $a+b : m \Rightarrow v_1 + v_2 \equiv_{m} 0$

b.) $a^2 - 9ab + b^2 : m \Rightarrow v_1^2 - 9v_1v_2 + v_2^2 \equiv_{m} 0$

$$(v_1 + v_2)^2 - 11v_1v_2 \equiv_{m} 0$$

$$- 11v_1v_2 \equiv_{m} 0$$

$$((v_1 + v_2)^2 : m \text{ по н.а.})$$

b.) $v_1 + v_2 \equiv_{m} 0 \quad | \cdot v_1 \quad (v_1 \neq 0)$

$$v_1^2 + v_1v_2 \equiv_{m} 0$$

$$v_1v_2 \equiv_{m} -v_1^2 \Rightarrow 11v_1^2 \equiv_{m} 0$$

$$v_1 \neq 0 \Rightarrow 11 \equiv_{m} 0$$

$$11 = m$$



$$11 \geq m$$

2.) при $a=1, b=10$ тогда $\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} = \frac{11}{11}$

сократили на 11 $\Rightarrow m_{\max} = 11$.

Ответ: $m = 11$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 3

$$\text{Пусть } \begin{cases} 3x^2 + 5x + 1 = A \\ 5 - 6x = B \end{cases} \quad (A+B = 3x^2 - 5x + 6)$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

||)

$$\sqrt{A+B} - \sqrt{A} = B \quad (\text{возведем в квадраты по условию})$$

(A и A+B > 0)

$$A+B+A - 2\sqrt{(A+B)A} = B^2$$

$$(2A+B-B^2) = 2\sqrt{(A+B)A}$$

$$4A^2 + 2AB - 2AB^2 - 2AB - 2AB^2 + B^2 - B^3 - B^3 + B^4 = 4A^2 + 4AB \quad (\text{слева возведем в кв-ю})$$

$$B^4 - 2B^3 + B^2 - 4AB = 0$$

$$B^2(B^2 - 2B + 1 - 4A) = 0$$

||)

1.) $B^2 = 0 \Rightarrow B = 0$

$$5 - 6x = 0$$

$$6x = 5$$

$$x = \frac{5}{6}$$

$$B = 0; A > 0, \text{ т.к. } x > 0$$

||)

т.е. угад.

2.) $B^2 - 2B + 1 - 4A = 0$

$$(5 - 6x)^2 - 2(5 - 6x) + 1 = 4(3x^2 + x + 1)$$

$$36x^2 + 25 - 60x - 10 + 12x + 1 = 12x^2 + 4x + 4$$

$$24x^2 - 52x + 12 = 0$$

$$12x^2 - 26x + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$(B-1)^2 - 4A = 0$$

$$36x^2 - 48x + 16 = 12x^2 + 4x + 4$$

$$24x^2 - 52x + 12 = 0$$

$$12x^2 - 26x + 6 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 3 (продолжение)

$$X = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 126}}{24} = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 288}}{24}$$
$$= \frac{26 \pm \sqrt{676 - 288}}{24} = \frac{26 \pm \sqrt{388}}{24}$$
$$= \frac{13 \pm \sqrt{97}}{12}$$

a.) $x = \frac{13 + \sqrt{97}}{12}$

$$12 > x > 11$$

⇓

$$A > 0, \text{ т.к. } x > 0.$$

$$A+B = 3x^2 - 5x + 6 =$$

$$= x(3x-5) + 6 > 0,$$

$$\text{т.к. } x \text{ и } 3x-5 > 0.$$

⇓
усп. уел.

b.) $x = \frac{13 - \sqrt{97}}{12}$

$$\frac{2}{6} > x > \frac{1}{6}$$

⇓

$$A > 0, \text{ т.к. } x > 0$$

$$A+B = 3x^2 - 5x + 6 = x(3x-5) + 6 > 0$$

$$\text{т.к. } x(3x-5) > -\frac{6}{3}, 5$$

(постановка пределов
по лемме)
 $\frac{2}{6} \left(\frac{3}{6} - 5 \right)$

⇓

усп. уел.

Ответ: $x = \frac{5}{6}, x = \frac{13 \pm \sqrt{97}}{12}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 5

$$1.) 5x - y = 3z$$

$$5x = 3z + y \Rightarrow a.) 25x^2 = 9z^2 + y^2 + 6yz$$

$$b.) x = \frac{3z + y}{5}$$

$$2.) \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \quad | \cdot xyz$$

$$\frac{8yz}{15y - z} = x = \frac{3z + y}{5}$$

$$40yz = 45yz - 3z^2 + 15y^2 - yz$$

$$3z^2 - 4yz - 15y^2 = 0$$

$$z_1 = 3y$$

$$z_2 = -\frac{5}{3}y$$

Дробь из уравнения: $A = \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6yz}{y^2 + 3z^2}$

$$1.) z = 3y \Rightarrow A_1 = \frac{8 \cdot 9y^2 + 18y^2}{y^2 + 3 \cdot 9y^2} = \frac{45}{74}$$

$$2.) z = -\frac{5}{3}y \Rightarrow A_2 = \frac{55}{42}$$

$A_2 < A_1$, A_2 достигается при

$$y = 3; z = -5; x = -2,4$$

Ответ: $\frac{55}{42}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6

Пусть $AB = L$, скорости велосипедиста и мотоциклиста —
 v_B и v_M , соответственно. (v [км/ч], t [ч.])

Запишем уравнение из условия:

$$\begin{cases} 1.) \frac{L}{v_M} + 1 = \frac{L}{v_B} \\ 2.) v_B \cdot \frac{L}{v_M} + 49 = v_M \cdot \frac{L}{v_B} \\ 3.) \frac{L}{v_M + 7} + \frac{36}{v_B} = \frac{L}{v_B + 7} \end{cases}$$

$$\frac{L}{v_M + 7} + 0,8 = \frac{L}{v_B + 7}$$

$$\begin{cases} 1.) \frac{L}{v_M} - \frac{L}{v_B} = -1 & (1) \\ \frac{v_B L}{v_M} - \frac{v_M L}{v_B} = -49 & (2) \end{cases}$$

(1) · (2)

$$\frac{\frac{1}{v_M} - \frac{1}{v_B}}{\frac{v_B}{v_M} - \frac{v_M}{v_B}} = \frac{1}{49}$$

$$\frac{v_B - v_M}{v_M v_B} = \frac{1}{49}$$
$$\frac{v_B^2 - v_M^2}{v_M v_B}$$

$$\frac{v_B - v_M}{(v_B - v_M)(v_B + v_M)} = \frac{1}{49}$$

$$v_B + v_M = 49$$

$$v_M = 49 - v_B$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 (Продолжение)

$$2.) \begin{cases} \frac{L}{v_m} - \frac{L}{v_0} = -1 & (1) \\ \frac{L}{v_{m+2}} - \frac{L}{v_{0+2}} = -0,6 & (3) \end{cases} \quad \text{разделим (1) на (3)}$$

$$\frac{\frac{1}{v_m} - \frac{1}{v_0}}{\frac{1}{v_{m+2}} - \frac{1}{v_{0+2}}} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{\frac{v_0 - v_m}{v_0 v_m}}{\frac{v_0 - v_m}{(v_{0+2}) (v_{m+2})}} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{(v_{0+2}) (v_{m+2})}{v_0 v_m} = \frac{5}{3}$$

подставим $v_m = 49 - v_0$ из п.1.

$$3 (v_{0+2}) (56 - v_0) = 5 v_0 (49 - v_0)$$

$$168 v_0 - 3 v_0^2 + 1176 - 21 v_0 = 245 v_0 - 5 v_0^2$$

$$2 v_0^2 - 98 v_0 + 1176 = 0$$

$$v_0^2 - 49 v_0 + 588 = 0$$

по т. Виета:

$$v_0 = 28 \frac{\text{км}}{\text{ч}}; \quad v_0 = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

но $v_0 = 28 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ не подходит, т.к. скорость $v_0 > v_m$

$$v_m = v_0, \quad \text{а при } v_0 = 21 \quad v_m = 21 < 28$$

$$v_0 = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6 (продолжение 2)

$$v_B = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \Rightarrow v_M = 28 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

$$(1): \quad \frac{L}{28} - \frac{L}{21} = -1.$$

$$L \left(\frac{1}{28} - \frac{1}{21} \right) = -1$$

$$L \left(\frac{21 - 28}{27 \cdot 21} \right)$$

$$L \left(\frac{3}{9 \cdot 3} \right)$$

$$L \left(\frac{-7}{7 \cdot 3} \right) = -1$$

$$L \left(\frac{-1}{3} \right) = -1$$

$$L = \frac{7 \cdot 3}{2} \text{ км}$$

$$L = 94,5 \text{ км.}$$

Ответ: 94,5 км.

$$L \left(\frac{3-4}{84} \right) = -1$$

$$L = 84 \text{ км}$$

Ответ: 84 км.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4

1.) $5x - y = 3z$

$5x = 3z + y \Rightarrow a) 25x^2 = 9z^2 + y^2 + 6yz.$

b.) $x = \frac{3z + y}{5}$

2.) $\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \mid \cdot xyz$

$8yz + xz = 15xy.$

$\frac{8yz}{15y - z} = x = \frac{3z + y}{5}$

$40yz = 45yz - 3z^2 + 15y^2 - yz$

$3z^2 - 4yz - 15y^2 = 0$

$z_1 = \frac{4yz \pm \sqrt{196y^2}}{6} = \frac{4yz \pm 14y}{6}$

$z_1 = 3y$

$z_2 = -\frac{10}{6}y = -\frac{5}{3}y. \Rightarrow \begin{cases} z = 3y \\ z = -\frac{5}{3}y \end{cases}$

Рассмотрим грады из условия A: $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} =$

$\frac{8yz + 6yz}{y^2 + 3z^2}$

1.) $z = 3y$
 $A_1 = \frac{8 \cdot 3y^2 + 18y^2}{y^2 + 3 \cdot 9y^2} = \frac{72 + 18}{1 + 27} = \frac{90}{28} = \frac{45}{14}$

Достигаем при:
 $y = 3; z = -5; x = -2,4.$

2.) $z = -\frac{5}{3}y$
 $A_2 = \frac{8 \cdot 25 \frac{y^2}{9} - 10y^2}{y^2 + \frac{25}{3}y^2} = \frac{110}{9} = \frac{28}{3}$
 $= \frac{110 \cdot 8}{3 \cdot 28} = \frac{110 \cdot \frac{53}{42}}{84} \Rightarrow A_2 < A_1$

Ответ: $\frac{55}{42}$



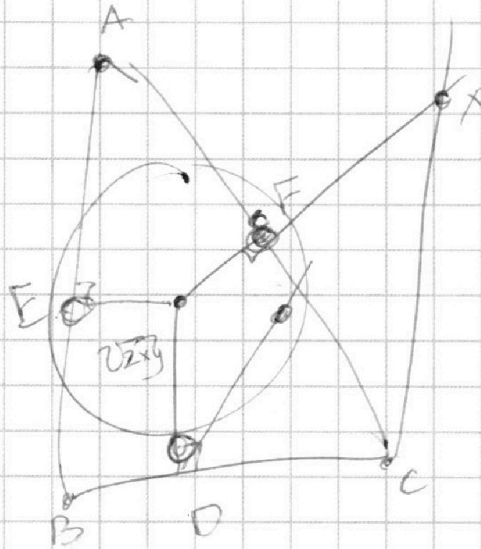
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$8y \cdot y^2 = 15xy$$

$$8 \cdot 3 \cdot (-5) + 12 \cdot 4 \cdot 5$$

$$x - y = 3z$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$8yz + xz = 15xy$$

$$8yz + xz = 3(3z+y)y$$

$$8yz + \frac{(3z+y)z}{5} = 3(3z+y)y$$

$$40yz + 3z^2 + yz = 45zy + 15y^2$$

$$41yz + 3z^2 = 45zy + 15y^2$$

$$0 = 4zy + 15y^2 - 3z^2$$

$$3z^2 + y^2 = 4zy + 16y^2$$

$$8z^2 + 6yz = \frac{4z^2 + 3yz}{8y^2 + 2zy}$$

$$25x^2 = 9z^2 + 6yz + y^2$$

$$x = \frac{3z+y}{5}$$

$$8y \cdot \left(-\frac{5}{3}y\right) = \frac{15y + \frac{5}{3}y}{3}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{8 \cdot 5}{3(3 + \frac{1}{3})}$$

$$4 = \frac{40}{10}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



24

$$8yz + xz = 15yx$$

$$z = \frac{15yx}{8y+x}$$

$$5x - y = \frac{45yx}{8y+x}$$

$$(5x-y)(8y+x) = 45yx$$

$$40xy + 25x^2 - 8y^2 - yx = 45yx$$

$$25x^2 - 8y^2 = 6yx$$

$$8yz + xz = 15yx$$

$$x = \frac{8yz}{15y-z}$$

$$\frac{3z+y}{5} = \frac{8yz}{15y-z}$$

$$40yz = 45yz + 15y^2 - 3z^2 - zy$$

$$3z^2 = 4yz + 15y^2$$

$$3z^2 - 4yz = 15y^2$$

$$3z^2 - 4yz - 15y^2 = 0$$

$$4y = \sqrt{16y^2 + 180y^2}$$

$$4y = 14y$$

$$z = \frac{14y}{6}$$

$$z = \frac{7y}{3}$$

$$z^2 = \frac{49y^2}{9}$$

$$\frac{200}{9} - 10 = \frac{100}{9}$$

$$\frac{12}{5} = -24$$

$$2z^2 + 6yz$$

$$y^2 + 3z^2$$

$$\frac{55}{42} = 1 \frac{13}{42}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



112

12

13

14

15

16

17

ал-геб. легко

полная

полная

полная

легко

не знаю

Решил ТУ

ТУ

АлГ

Геом

АлГ

Физ

Геом

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

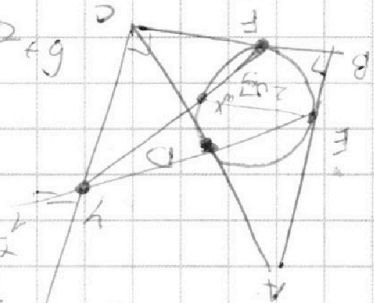
$$3x^2 - 5x + 6 + 3x^2 + x + 1 - 2\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)} = 36x^2 + 25 - 60x$$

$$6x^2 - 4x + 7 - 2\sqrt{y_{max}} = 36x^2 + 25 - 60x$$

$$56x - 2\sqrt{y_{max}} = 30x^2 + 18$$

$$28x - \sqrt{y_{max}} = 15x^2 + 9$$

$$y_{max} = (3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)$$



$$= 9x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 15x^3 - 5x^2 - 5x + 18x^2 + 6x + 6 = 9x^4 - 12x^3 + 16x^2 + x + 6$$

$$20 + 12 = 32$$

все равно 4+4+5+4+4+5+7

$$100 - 30 + 1889 = \dots$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\dots = 1 - 99 + 121 = (\frac{1}{2} - 0)7 = \frac{7}{2} - 0 = \frac{7}{2}$$

$$\dots = 1 - 30 + 100$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1

$$\begin{cases} a_3 + b_3 \geq 14 \\ c_3 + b_3 \geq 19 \\ c_3 + a_3 \geq 23 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 90,5 \quad | \quad 27 \\ \hline 57 \\ 13,5 \\ 10,5 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 74 \\ \hline 19 \\ 56 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ 3,5 \\ 9,5 \quad | \quad 27 \\ \hline 84 \\ 20,5 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{cases} a_7 + b_7 \geq 13 \\ b_7 + c_7 \geq 14 \\ a_7 + c_7 \geq 42 \end{cases}$$

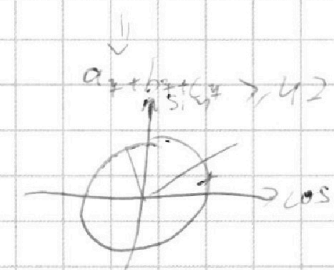
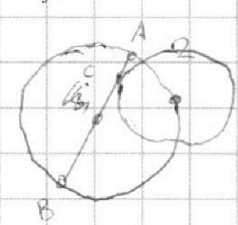
$$A = P_w \cos \alpha$$

$$A^2 = P_w^2 \cos^2 \alpha$$

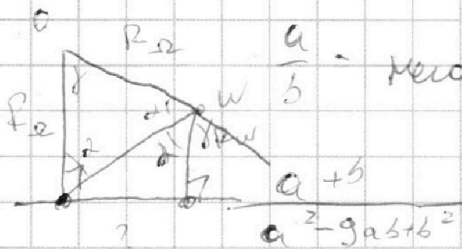
$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 28$$

$$a_7 + b_7 + c_7 \geq 36 < 42$$

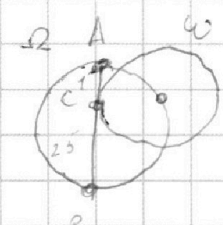
a_3
 b_3
 c_3



№2



Менорами $\Rightarrow d(a, b) = 1$



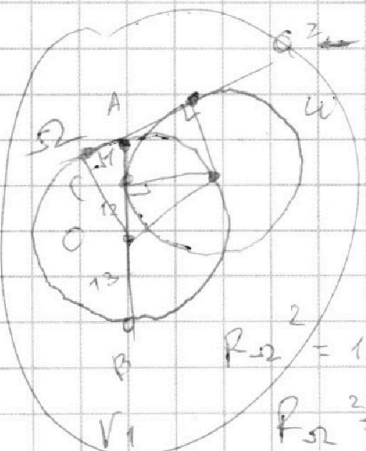
$$\begin{aligned} a &\equiv r_1 \\ b &\equiv r_2 \end{aligned}$$

№4 $a+b:m$

$$a^2 - gab + b^2 = m$$

$$\Rightarrow m/b$$

$$m/a$$



$$r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2 = m$$

$$r_1 + r_2 = 0$$

$$(r_1 + r_2)^2 - 4r_1r_2 = m$$

$$-4r_1r_2 = m$$

$$r_1r_2 + r_2^2 = 0$$

$$r_{\Omega}^2 = 144 + R_w^2$$

$$11r_2^2 = m$$

$$11r_1^2 = m$$

$$\frac{ab}{m} r_1r_2 = -r_2^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical work on grid paper. The main problem is solving the equation $2x^3 - 4x^2 + 7x - 20 = 0$. The student uses the Rational Root Theorem, testing roots $x=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. They find that $x=2$ is a root. They then perform polynomial division to factor the cubic into $(x-2)(2x^2 - 4x + 7) = 0$. The quadratic part is solved using the discriminant $D = 16 - 56 = -40$, leading to complex roots $x = 2 \pm i\sqrt{10}$. The final answer is $x = 2, 2 \pm i\sqrt{10}$.

Other calculations include:
 $2x^3 - 4x^2 + 7x - 20 = 0$
 $2x^3 - 4x^2 + 7x - 20 = (x-2)(2x^2 - 4x + 7)$
 $D = 16 - 56 = -40$
 $x = 2 \pm \frac{4 \pm \sqrt{-40}}{4} = 2 \pm i\sqrt{10}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2 5

$$15x - y = 3z$$

$$2.) \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$\frac{3}{15} \cdot 5$

$$\frac{3 \cdot 20}{4} = \frac{15}{4} \cdot 8yz + xz = 15xy$$

$$383 = 4 \cdot 9z \quad z = \frac{15xy}{8y+x}$$

$$\frac{13 - \sqrt{92}}{4}$$

$$\frac{13 - \sqrt{92}}{4}$$

$$4(5x - y)(8y + x) = 45xy$$

$$\sqrt{A+B} -$$

$$\sqrt{A+5-6x} -$$

$$\sqrt{A} = B$$

$$\sqrt{A+5-6x} - \sqrt{A} = 5-6x$$

$$5-6x = B$$

$\frac{1}{4}$

$\frac{5}{2}$

$$40xy + 5x^2 - 8y^2 - yx = 45xy$$

$$3x^2 - 5x \quad 5x^2 - 8y^2 = 6xy$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{(5x-y)(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$\frac{17}{16} + 6$$

$$\sqrt{A+3-25} = \frac{1}{15}$$

$$3x^2 - 2x + 95 = A$$

$$\frac{383}{28} \cdot 4$$

$$= 4A^2 + 2AB - 2AB^2 + 2AB + B^2 - B^3 - 2AB^2 - B^3 + B^3$$

$$(2A+B-B^2)(2A+B-B^2) =$$

$$= 4(A^2+AB)$$

$$A+B+A - 2\sqrt{(A+B)A} = B^2$$

$$2A+B-B^2 = 2\sqrt{A^2+AB}$$

$$(2A+B-B^2)$$

$$\frac{169}{64} = 105$$

$$\frac{169}{64} = 105$$