



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Введем обозначения: $\text{ord}_n a = k \Leftrightarrow \begin{cases} a : n^k \\ a \not: n^{k+1} \end{cases}$
Пусть $x_2 = \text{ord}_2 a$; $x_7 = \text{ord}_7 a$; $y_2 = \text{ord}_2 b$;
 $y_7 = \text{ord}_7 b$; $z_2 = \text{ord}_2 c$; $z_7 = \text{ord}_7 c$.

Из условий получаем 2 системы:

$$\begin{cases} x_2 + y_2 \geq 15 \\ y_2 + z_2 \geq 17 \Rightarrow 2(x_2 + y_2 + z_2) \geq 55 \Rightarrow x_2 + y_2 + z_2 \geq 28 \\ x_2 + z_2 \geq 23 \end{cases} \quad (\text{т.к. } x_2 + y_2 + z_2 \in \mathbb{N})$$

$$\begin{cases} x_7 + y_7 \geq 11 \\ y_7 + z_7 \geq 18 \Rightarrow 2(x_7 + y_7 + z_7) \geq 68 \Rightarrow x_7 + y_7 + z_7 \geq 34 \\ x_7 + z_7 \geq 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 + y_2 + z_2 \geq 39 \\ x_2 + y_2 + z_2 \geq 28 \end{cases} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{34}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим $\text{НОД}(a; b) = (a; b)$.

Дробь $\frac{a}{b}$ несократима $\Leftrightarrow (a; b) = 1$ (1)

Если m - наибольшее число, на которое можно со-

кратить дробь $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$, то $(a+b; a^2-7ab+b^2) = m$.

Т.к. $(a; b) \neq (x; y) = (x-y; y)$, то $(a+b; a^2-7ab+b^2) = (a+b; (a+b)^2-9ab) = (a+b; -9ab)$.

Предположим, что существует простое p :

$$\Rightarrow \begin{cases} p|a \\ p|b \\ p|(a+b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p|a \\ p|b \end{cases} \Rightarrow (a; b) \neq 1, \text{ что про-} \begin{cases} p|ab \\ p|(a+b) \end{cases}$$

тиворечит (1), поэтому $(a+b; -9ab) \leq 9$ и равенство достигается, если выбрать значения простых a и b таких, что $a+b \equiv 9$ (на-
пример $a=4; b=5$).

Ответ: при $m=9$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

003:

Далее мы обе части ур-я на

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x^2-6x+2 \geq 0 \\ 3x^2+3x+1 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} > 0.$$

$$3x^2+3x+1 \geq 0$$

$$3x^2-6x+2 - 3x^2-3x-1 = (1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$3x^2-6x+2 \geq 0$$

найдем корни ф.:
 $\frac{D}{4} = 3$

$$(1-9x) = (1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$(1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} - 1) = 0$$

$$x \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$x = \frac{1}{9} \text{ (проверяем 003.)}$$

$$x \in [\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \quad (2)$$

$$3x^2+3x+1 \geq 0.$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$$

Найдём вершины параболы $x_0 = -$

$$(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})^2 = 1$$

$$D = 9-12 < 0 \Rightarrow \Rightarrow 3x^2+3x+1 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$6x^2-3x+3+a=1, \text{ где } a=2\sqrt{3x^2-6x+2}\sqrt{3x^2+3x+1}$$

Найдём минимум $f(x) = 6x^2-3x+3$.

$$x_0 = \frac{1}{4}; y_0 = \min f(x) = f(x_0) = \frac{6}{16} - \frac{3}{4} + 3 = 3 - \frac{3}{8} >$$

> 1 .

$6x^2-3x+3+a > 1$, поэтому ур-е (2) не имеет решений.

Ответ: $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x_2 - 2x_1 + g_2 - g_1 = 14;$$

$$\text{Замени } \begin{cases} u = x_2 - x_1 \\ v = g_2 - g_1 \end{cases}$$

$$2u + v = 14; \begin{cases} 2u : 2 \\ 2u + v : 2 \end{cases} \rightarrow v : 2 \rightarrow v = 2k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} v = 2k \\ 2u + 2k = 14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 2k \\ u = 7 - k \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_2 - g_1 = 2k \\ x_2 - x_1 = 7 - k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}, k \leq 13 \quad (1)$$

Востроим параллелограмм $OPQR$ по правилу
уравновешивания A, B, R ; $A_1(-13; 0)$, $B_1(16; 26)$.

Найдем в нем пар-во точек $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$,
удовлетворяющих системе (1) и вытекающую
него пар-во пар точек, в которых хотя бы 1
содержится в 1 из тр-ков $\triangle PA_1O$ или $\triangle RB_1Q$.
Каждое соседство выбрать отдельно точки
в A_1, B_1, R так, чтобы они их ординаты от-
личались на $2k$ равнялась $\begin{bmatrix} 26 \\ 2k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ k \end{bmatrix} + k$, а

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Каждый способ выбрать абсциссы, отстоя-
ющую на $7-k$ равняется $29-30-(7-k,1)=23k$.~~

~~По проблеме произведения получаем, что всего та-
ким образом в A, B, R можно выбрать~~

$$\sum_{n=1}^{13} \left[\frac{13}{n} \right] (23+n)$$

Каждый способ выбрать ординаты рав-
няется $\frac{C_{27}^2}{2}$, а абсциссу $7 \cdot 14 - (1+2+\dots+13) =$

$$= 7 \cdot 14 - \frac{1+13}{2} \cdot 13 = 7$$

Всего $\frac{7 C_{27}^2}{2}$ способов. При этом каждая
точка TP -ков будет брать в какой-либо
паре, всего их $13 \cdot 26$, причем каждая точка
попадет в парах в 28 парам, всего получаем $14 \cdot 13 \cdot 26$
способов. Тогда всего таких точек в парам
парам $\frac{7 C_{27}^2}{2} - 14 \cdot 13 \cdot 26$

Ответ: $\frac{7 C_{27}^2}{2} - 14 \cdot 13 \cdot 26$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

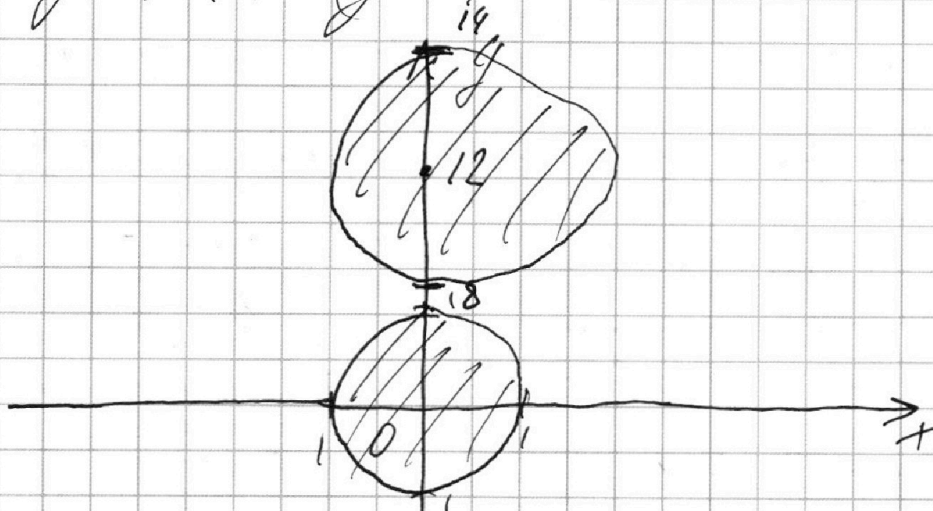
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 86 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

Упр-е $x^2 + y^2 - 1 = 0$ задает окружность с центром $(0; 0)$ и радиусом 1. Упр-е $x^2 + (y - 12)^2 - 16 = 0$ задает окружность с центром $(0; 12)$ и радиусом 4.

Изобразим левую часть, удовлетв. неравенству $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$:



Получаем:

$$\begin{cases} ax + y - 86 = 0 \\ \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 16 \end{cases} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \Rightarrow y = 8b - ax \\ x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + (8b - ax)^2 - 1 \leq 0; \end{cases}$$
$$x^2 + 64b^2 - 16axb + a^2x^2 - 1 \leq 0$$
$$(a^2 + 1)x^2 - 16axb + 64b^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{D}{4} = 64a^2b^2 - (a^2 + 1)(64b^2 - 1) \leq 0;$$

$$64a^2b^2 - 64a^2b^2 + a^2 - 64b^2 + 1 \leq 0;$$

$$a^2 + 1 \leq 64b^2. \text{ Для любого } a \in \mathbb{R} \exists b. a^2 + 1 \leq 64b^2$$

(например $b = \sqrt{\frac{a^2 + 1}{64}}$)

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \Rightarrow y = 8b - ax \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \leq 0 \\ x^2 + (8b - ax - 12)^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$$
$$x^2 + 64b^2 + a^2x^2 + 12^2 - 16 \cdot 12b - 16abx + 24ax - 16 \leq 0;$$
$$x^2(a^2 + 1) + 8ax(3 - 2b) + (64b^2 + 12^2 - 16 \cdot 12b - 16) \leq 0 \Rightarrow \frac{D}{4} = 16a^2(9 - 12b + 4b^2) - (a^2 + 1) \cdot (64b^2 + 12^2 - 16 \cdot 12b - 16) \leq 0;$$
$$9 \cdot 16a^2 - 12 \cdot 16a^2b + 4 \cdot 16a^2b^2 - 64a^2b^2 - 12^2a^2 + 16 \cdot 12a^2b + 16a^2 - 64b^2 - 12^2 + 16 \cdot 12b - 16 \leq 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$= (9 \cdot 16 - 12^2 + 16) a^2 - 64b^2 + 16 \cdot 12b + 1650;$$

$$16a^2 \leq 64b^2 - 16 \cdot 12b - 16;$$

$$a^2 \leq 4b^2 - 12b + 1$$

Т.к. решение должно быть ровно 2, то
прямая $ax + 15 - 8b = 0$ — общая касательная

к данным окружностям, т.е., каждый из
дискриминантов $\frac{D_1}{4} = a^2 + 1 - 64b^2$ и $\frac{D_2}{4} = 16a^2 - 64b^2 - 16 \cdot 12b - 16$
 ~~$+ 12b$~~ должен быть равен 0.

$$\begin{cases} a^2 + 1 = 64b^2 \\ a^2 = 4b^2 - 12b + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = 4b^2 - 12b + 1 \\ 60b^2 + 12b - 2 = 0; \end{cases}$$

$$30b^2 + 6b - 1 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 39$$

$$b_{1/2} = -3 \pm \sqrt{39}.$$

$$\begin{cases} a^2 + 1 = (3 + \sqrt{39})^2 \\ a^2 + 1 = (3 - \sqrt{39})^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \pm \sqrt{47 + 6\sqrt{39}} \\ a = \pm \sqrt{47 - 6\sqrt{39}} \end{cases}$$

Ответ: $\pm \sqrt{47 + 6\sqrt{39}}$;
 $\pm \sqrt{47 - 6\sqrt{39}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $ab: 2^{15} \cdot 7^{11}; bc: 2^{17} \cdot 7^{18}; ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$

$\min(abc)$; $x_2 = \text{ord}_2 a$; $x_7 = \text{ord}_7 a$

$\text{ord}_n a = \frac{a}{n^k}$ $\Rightarrow a: n^k$ $\Rightarrow a/n^k \in \mathbb{N}$

$y_2 = \text{ord}_2 b$; $y_7 = \text{ord}_7 b$

$z_2 = \text{ord}_2 c$; $z_7 = \text{ord}_7 c$

$$\begin{cases} x_2 + y_2 \geq 15 \\ x_7 + y_7 \geq 11 \\ y_2 + z_2 \geq 17 \\ y_7 + z_7 \geq 18 \\ x_2 + z_2 \geq 23 \\ x_7 + z_7 \geq 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + y_2 \geq 15 \\ y_2 + z_2 \geq 17 \\ x_2 + z_2 \geq 23 \end{cases} \Rightarrow 2(x_2 + y_2 + z_2) \geq 55$$

$$\begin{cases} y_7 + z_7 \geq 18 \\ x_7 + y_7 \geq 39 \\ x_7 + z_7 \geq 39 \end{cases} \Rightarrow 2(x_7 + y_7 + z_7) \geq 66$$

$140 - 91 = 49$

$\Rightarrow \min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{39} = 4746139$

2) $\frac{a}{b}$ -искомп $\Leftrightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$

$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$ - макс. комп. $\Rightarrow \text{НОД}(a+b, a^2 - 7ab + b^2) = m$

$\{ \begin{aligned} & | a+b; a^2 - 7ab + b^2 \} = m \\ & | a; b \} = 1 \end{aligned}$

$\text{НОД}(a; b) = \text{НОД}(b-a; b)$

$| a; b \} = 1 \mid \text{Если } m=9$

$a^2 - 7ab + b^2 = (a+b)^2 - 9ab$

$(a+b \cdot a^2 - 7ab + b^2) = (a+b) \cdot (a-b) - 9ab = (a+b; -9ab)$

Если $(a+b; -9ab) \neq 9$, то $\exists p \mid ab$ и $p \mid a-b \Rightarrow \text{НОД}(a; b) = p$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \quad | \cdot \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$(1 - 9x) = (1 - 9x)(\sqrt{\dots})$$

$$(1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) = 0$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{1}{9}$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{3}$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} > \frac{1}{9}$$

Отв: $\frac{1}{9}$

$$D = 3$$

$$x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$x = -3$$

ООЗ:

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 > 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 1 = x_0 = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$= \frac{3 - 6 + 4}{4} = \frac{1}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 1 =$$

$$= -\frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + 1 =$$

$$= \frac{3}{4} + 1 > 1$$

$$\frac{3}{4} - \frac{6}{4} + 1 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

ООЗ: $(-\infty; \frac{3 - \sqrt{3}}{3})$

$$\cup [\frac{3 + \sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{3} < 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

5) $O(0; 0)$; $P(-13; 26)$; $Q(3; 10)$

$R(16; 0)$

код-во $A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2) \in \mathbb{C}^2$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$$2x + y = 14$$

$$y = 2k \quad \begin{cases} y = 2k \\ x = 7 - k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2x + 2k = 14$$

$$x = 7 - k$$

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 1 =$$

$$= \frac{3 - 6 + 4}{4} = \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{6}{4} + \frac{3}{4} =$$

$$1 - \frac{8}{9}$$

$$1 - \frac{8}{9}$$

$$1 +$$

$$\begin{cases} y_2 - y_1 = 2k \\ x_2 - x_1 = 7 - k \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

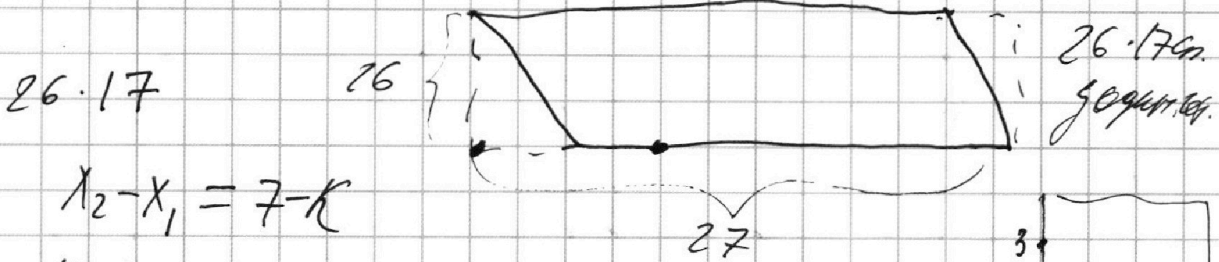
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y_2 - y_1 = 2k \\ x_2 - x_1 = 7 - k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \text{Значение } y \rightarrow 26 \text{ см.}$$

y такой же же $\rightarrow \frac{26}{2} - 1 = 12$



Но $x_2 - x_1 = 7 - k$
по условию:

$$6) \begin{cases} ax + y - 86 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 12)^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$$

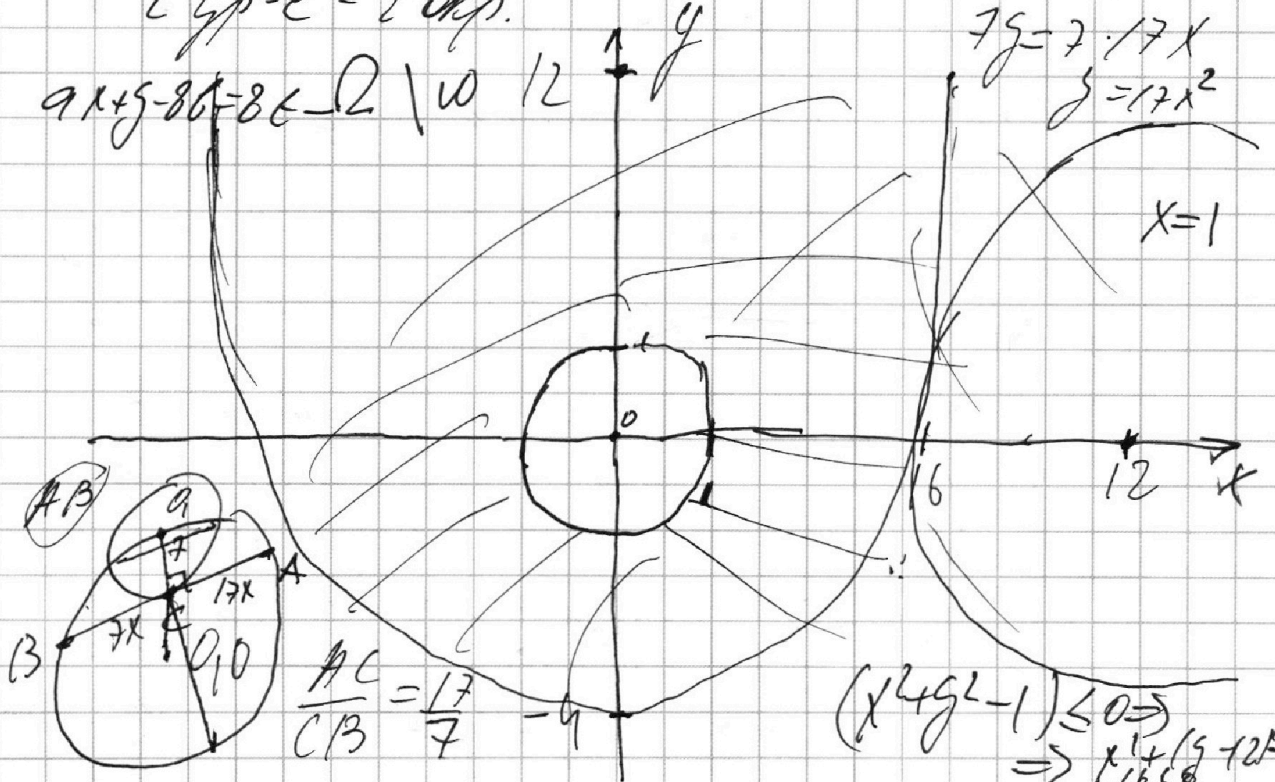
$a: \exists 6$: ровно 2 реш.

2 вып-е - 2 окр.

Ω \cap \cup \cap \cup \cap \cup

$$7y = 7 \cdot 17x \\ y = 17x^2$$

$$x = 1$$



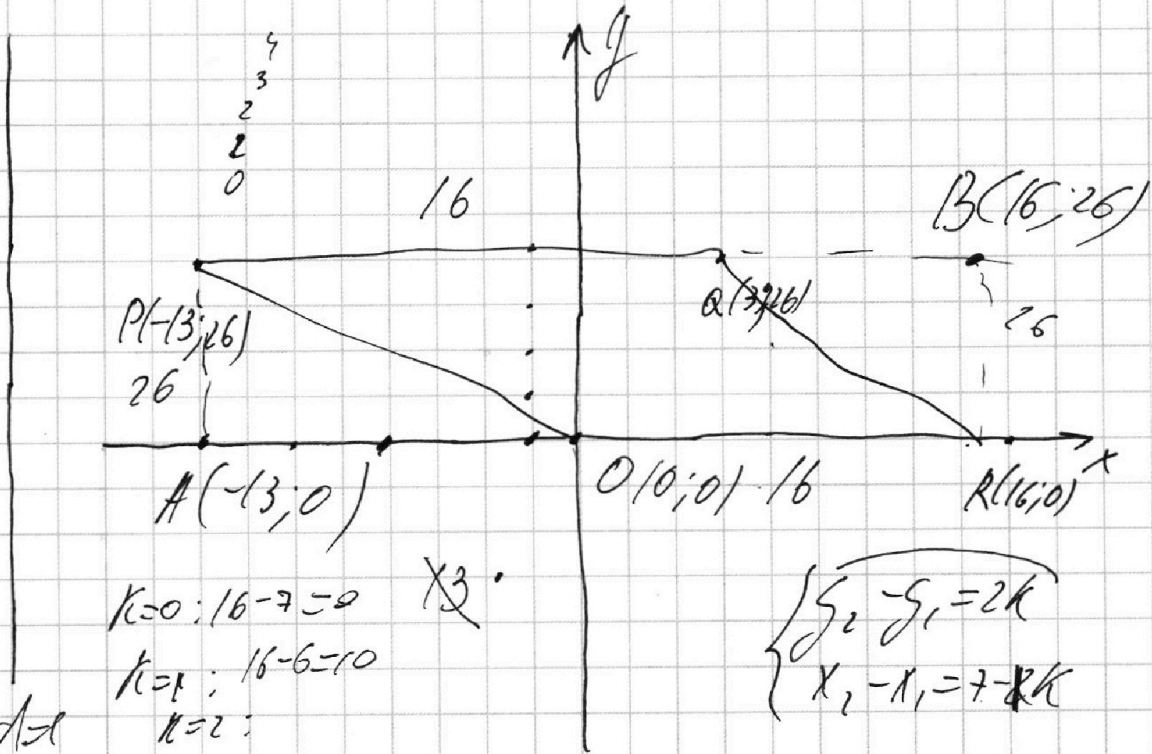
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$k=0: 16-7=9$$

$$k=1: 16-6=10$$

$$\begin{cases} y_2 - y_1 = 2k \\ x_2 - x_1 = 7 - k \end{cases}$$

$a_1 = 9$
 $a_2 = 10$
 $y_2 - y_1 = 2k, 0 \leq y_i \leq 26 \Rightarrow y_2 \equiv y_1 \pmod{26}$

Вектор \vec{APBR} : $25 \cdot 13 + 15 \cdot 13 = 1415$ - *выбор* (y_2, y_1) . Пусть мы выбрали пару (y_2, y_1) :

$y_2 - y_1 = 2k$; Найдем *пот-во* (x_2, x_1) : $x_2 - x_1 = 7 - k$

$$|x_2 - x_1| = 7 - \frac{y_2 - y_1}{2} \leq 29$$

$$\begin{cases} |x_2 - x_1| = |7 - k| \leq 29 \\ |y_2 - y_1| = |2k| \leq 26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |7 - k| \leq 29 \\ |k| \leq 13 \\ k > 0 - \text{все} \\ k \leq 0 - \text{все} \end{cases}$$

$\begin{cases} x_2 - x_1 = 7 - k \\ y_2 - y_1 = 2k \end{cases}$

$16 - 7 = 9 = k = 0 - 16 + 9$
 $7 + 13 = 20 = k = 1 - 16 + 7 = 9$
 $7 + 13 = 20 = k = 13 - 16 + 7 = 9$

$\sum 16 - 7 - k = 9$
 $a_1 = 9$
 $a_2 = 10$
 $a_{17} = 9$
 $a_{17} = 10$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(a^2+1)x^2 + 8ax(3-2b) + (64b^2+12^2-20 \cdot 12b) \leq 0 \quad \frac{160}{144} \quad \frac{16}{16}$$

$$\Delta_{x,y} = 16a^2(3-2a)^2 - (a^2+1)(64b^2+12^2-20 \cdot 12b) =$$

$$= 16 \cdot 9a^2 - 16 \cdot 12a^2b + 16 \cdot 4a^2b^2 - 16 \cdot 4a^2b^2 - 12^2a^2 + 16 \cdot 12a^2b - 64b^2 - 12^2 - 20 \cdot 12b =$$

$$= 16 \cdot 9a^2 - 12^2a^2 - 64b^2 - 12^2 - 20 \cdot 12b \leq 0$$

$$(16 \cdot 9 - 12^2)a^2 - 64b^2 - 12^2 - 16 \cdot 12b \leq 0$$

$$64b^2 + 16 \cdot 12b + 12^2 \geq (16 \cdot 9 - 12^2)a^2$$

$$\exists a \Rightarrow (16 \cdot 9 - 12^2)a^2$$

$$ax + y - 8b = 0$$

$$y = 8b - ax$$

$$(x^2 + y - 12)^2 - 16 \leq 0$$

$$a: \exists b$$

$$16a^2 \leq 64b^2$$

$$1 + a^2 \leq 4b^2 \quad a \leq \min$$

$$x^2 + (8b - ax - 12)^2 - 16 = x^2 + 64b^2 + a^2x^2 + 12^2 -$$

$$= 166ax - 16 \cdot 12b + 24ax - 16 =$$

$$= (a^2+1)x^2 + 8ax(3-2b) + (12^2 + 64b^2 - 16 \cdot 12b - 16) \leq 0$$

$$\Delta_{x,y} = 16a^2(3-2a)^2 - (a^2+1)(12^2 + 64b^2 - 16 \cdot 12b - 16) =$$

$$= 36a^2 - 4 \cdot 12a^2b + 16b^2a^2 - 12^2a^2 - 64b^2a^2 +$$

$$+ 16 \cdot 12a^2b + 16a^2 = 16 \cdot 9a^2 - 16 \cdot 12a^2b + 16 \cdot 4a^2b^2 -$$

$$- 12^2a^2 - 64a^2b^2 + 16 \cdot 12ba^2 + 16a^2 - 12^2 - 64b^2 + 16$$

$$+ 16 \cdot 12b + 16 = (16 \cdot 9 - 12^2)a^2 + 16a^2 - 64b^2 \leq 0$$

$$(16 \cdot 9 - 12^2)a^2 \leq 64b^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$(a^2+1)x^2 + 2x(988) + (646^2 - 166 \cdot 15) \leq 0$
 $\Rightarrow 0 \leq 0$
 $\frac{0}{4} = a^2(188)^2 - (a^2+1)(646^2 - 166 \cdot 15) = x^2 + 12^2 - 16^2 = 0$
 $\frac{0}{4} = a^2(1 - 166 + 646^2) - (a^2+1)(646^2 - 166 \cdot 15) = x^2 = 48$
 $x = 4\sqrt{3} \leq 646^2 - 166 \cdot 15$
 $\leq x \leq 16a^2$
 $a: \exists 6$
 $= 6a^2 - 646^2 + 166 + 15 \leq 0$
 $a: \exists 6: 16a^2 \leq 646^2 - 166 \cdot 15 = 16ax$
 $646^2 - 166ax + 9 - 88 = 0 \Rightarrow y = 86 - ax$
 $x^2 + 9^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 + (86 - ax)^2 \geq 1$
 $60 = 2 \cdot 646 \cdot 8$
 $x^2 + 646^2 - 1696ax + a^2x^2 \geq 1$
 $16a^2 \geq 1$
 $(a^2+1)x^2 - 1696ax + 646^2 - 1 \geq 0$
 $\frac{0}{4} = 64a^2b^2 - (a^2+1)(646^2 - 1) = 64a^2b^2 - 64a^2b^2 +$
 $+ a^2 - 646^2 + 1 = a^2 - 646^2 + 1 \geq 0$
 $a^2 \geq 646^2 - 1$
 $ax \quad y = 86 - ax$
 $(245 - 12)^2 - 16 \leq 0$
 $-1696ax + a^2x^2 - 16 \leq 0$
 $x^2 + (86 - ax - 1)^2 - 16 \leq 0$
 $x^2 + 646^2 + a^2x^2 + 1 = 166$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 6x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{\dots}$$

$$6x^2 - 3x + 3 = 0; \Delta = 9 - 160 = -149 < 0$$

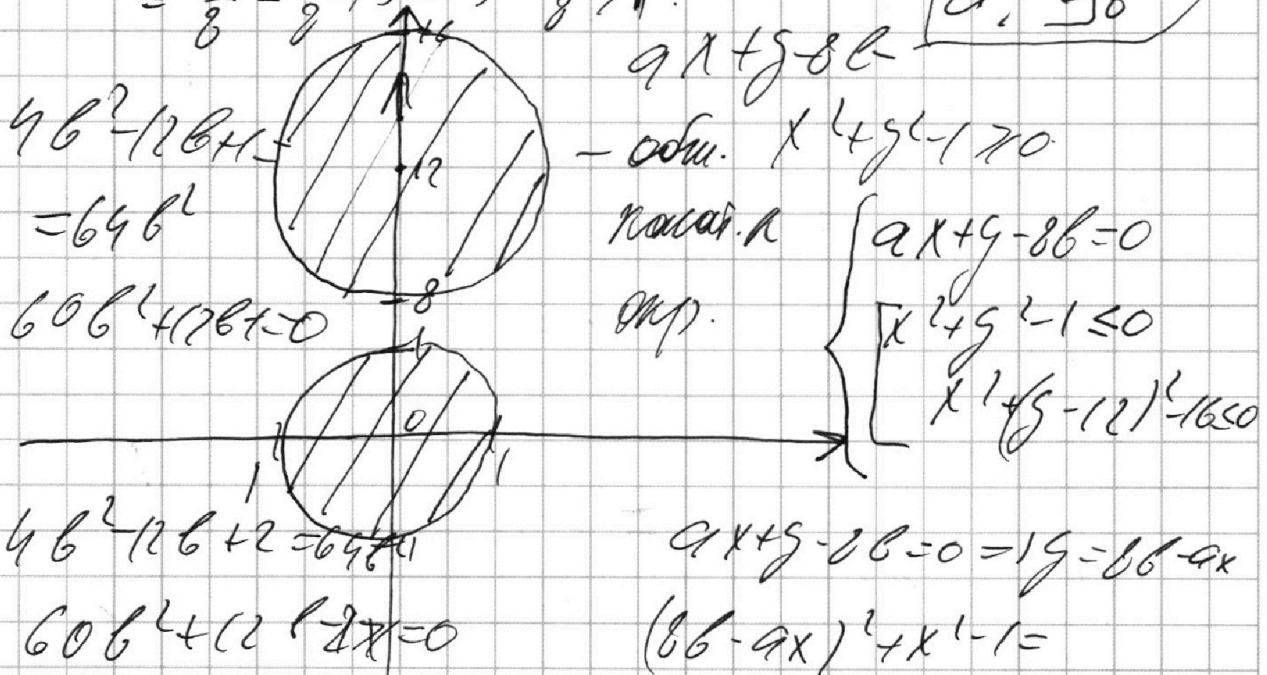
$$x_0 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$D = 39 \quad b_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{39}}{2}$$

$$2a + 6x^2 - 3x + 3 \geq 6 \cdot \frac{1}{16} - \frac{3}{16} + 3 = \frac{3}{8} - \frac{3}{16} + 3 =$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{6}{16} + 3 = 3 - \frac{3}{8} \geq 1$$

$a \in [36]$



$$= ax^2 + 16axb + 64b^2 + x^2 - 1 = (a^2 + 1)x^2 -$$

$$- 16axb + 64b^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 0$$

$$64a^2b^2 - (a^2 + 1)(64b^2 + 1) = 64a^2b^2 - 64a^2b^2 - 64ab^2 + a^2 - 64b^2 + 1 = a^2 - 64b^2 + 1 > 0, \forall a \in \mathbb{R} \exists b = 0$$

$$x^2 + (86 - ax - 12)^2 - 16 = x^2 + 64b^2 + 161x^2 + 16x^2 -$$

$$- 2 \cdot 86 \cdot 12b - 1696x + 24ax = \frac{(a^2 + 1)x^2 + 8ax(3 - 2a)}{64b^2 + 12b - 1696}$$

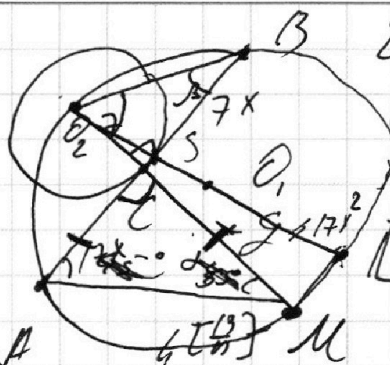
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

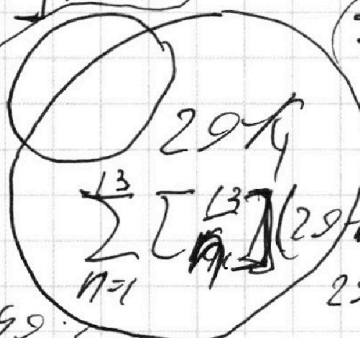


$29 \cdot 26 \cdot \text{Eqd} = \frac{1}{x}$
 $29 \cdot 26 \cdot (13 \cdot 26 + 1)$
 $k = 1:6$
 $O_2 T = 13 \cdot 0, 1; 2; \dots; 23$
 $O_2 S + ST = 13 \cdot k \cdot i / 13 - k, \text{m.} - x$
 $0; 1; \dots; 29 \cdot k$
 $k = 0 -$
 $29 \cdot k$
 $22 \cdot k$

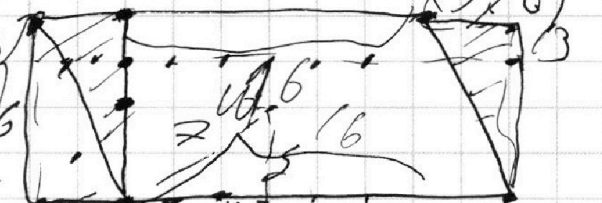
$\sum_{n=0} \left[\frac{26}{2n} \right] (10 - k) - 6 \square$

$(7 - k)(13 - 2)z = 7(7 + 17x^2)$

$\sqrt{x^2 + y^2} = 29 \cdot k$
 $= 7$
 $x^2 + y^2 = 99 \text{ is } = k$



$(y_i, y_j): (26 \cdot 12) \cdot 7; 8; 9; 10;$
 $11; 12; 13; 14; 15$
 $P(13; 16) 13 \times 26$
 $29 \cdot 25$
 $Q(3; 7)$



$5) \begin{cases} y_2 - y_1 = 2k \\ x_2 - x_1 = 7 - k \end{cases}$

$x^2 = 99 - 2k$
 $7 \cdot 9 = 7$
 $a_n = 29 \cdot 26 \cdot 13 - \text{выбр. } y \cdot 6 \square$
 $d = -1$

$x_2 - x_1 = 6$
 $13 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 13 \cdot 2$
 $7 \cdot 14 - \frac{(7+2+1+\dots+13)}{2} \cdot 13$
 $29 \cdot 26 \cdot (13 - 13) \cdot 26 = 13(2 \cdot 13 \cdot 26(29+3)) = 13 \cdot 26 \cdot 16$
 $- \text{выбр } y \cdot 6 \square$
 $K=0: y_2 = y_1 \Rightarrow 16 - 7 = 9$

