



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. Заметим, что abc^2 кратно $2^{51} \cdot 7^{27}$, при этом $ac = 2^{20} \cdot 7^{57}$,
а $a^2 b^2 c^2 = (abc)^2$ кратно $2^{51} \cdot 7^{64}$.

Пусть $ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot m$; $bc = 2^{12} \cdot 7^{12} \cdot k$; $ac = 2^{20} \cdot 7^{57} \cdot n$; $m, k, n \in \mathbb{N}$.

Тогда $abc^2 = 2^{51} \cdot 7^{27} \cdot mn$. При этом минимальное значение

$mn = 7^{10} \cdot 2$. Если $mn < 7^{10}$, $ac > abc^2$, однако $b \in \mathbb{N}$. Если

$mn \geq 2$ то $b \geq 2^{11}$ и $\geq 2^{12} \Rightarrow b$ - не натурально.

При $mn = 7^{10} \cdot 2$, $k = 1$ $(abc)^2 = 2^{51} \cdot 7^{64} \cdot mnk = 2^{52} \cdot 7^{74}$.

Отсюда $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$ - минимальное значение.

Оно возможно при $a = 2^8 \cdot 7^{10}$; $b = 2^{12} \cdot 7^{27}$; $c = 2^6$.

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2. Дробь $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$ можно представить в виде $\frac{a+b}{a^2+2ab+b^2+3ab}$
или $\frac{a+b}{(a+b)^2-3ab}$ ①

Если дробь ① сократить, то сократима и обратная ей
дробь $\frac{(a+b)^2-3ab}{a+b}$ ②, которую можно представить в виде

$a+b - \frac{3ab}{a+b}$, при этом числитель и знаменатель дроби $\frac{3ab}{a+b}$

тоже можно сократить на m , иначе либо $a+b$ не кратно

m , тогда числитель дроби ② нельзя сократить на m либо

$3ab$ не кратно m , тогда знаменатель не кратен m , либо

оба не кратны m , тогда числитель дроби ② тоже не кратен m .

Рассмотрим наибольшее возможное значение $m = \text{НОД}(3ab; a+b)$

П.к. $\frac{a}{b}$ несократима, $\text{НОД}(a; b) = 1$, значит, $\text{НОД}(a+b; a) = 1$ и НОД

$(a+b; b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b; ab) = 1$. Таким образом, максимальное

m достигается, если $a+b : 3$, и оно равно 3.

Ответ: 3.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

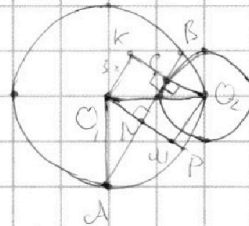
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3. Проведём серединный перпендикуляр O_1N
к AB равной O_1I ($O_1N \parallel O_2C$, т.к. O_2C -
касательная)
Продлим O_2C за C и проведём к



O_2C перпендикуляр AC т. O_1 . Проведём $O_2M \perp O_1P$.

Пусть $BC = x$, тогда $AC = 2x$; $AB = 5x$; $AN = 4x \Rightarrow CN = KN - BC = 3x$.

O_1KCN - прямоугольник; $O_1K = 3x$

O_2MNC - прямоугольник; $O_2C = MN = R(\omega) = 1$.

Из прямоугольного треугольника AO_1N $O_1N = \sqrt{AO_1^2 - AN^2}$.

$\Rightarrow \sqrt{R(5x)^2 - (4x)^2} = \sqrt{25 - 16x^2}$; $O_2M = O_1K = 3x$, т.к. O_1KO_2P - прямоуголь-
ник ($\angle KCN = \angle O_1NC = 90^\circ$, т.к. CO_2 - касательная; O_1P - сев. перпендикуляр

к AB ; $\angle O_1KC = 90^\circ \Rightarrow \angle KO_2M = 90^\circ$; $\angle O_1MO_2 = 90^\circ$).

Из прямоугол. $\triangle O_1O_2M$: $O_1O_2 = 5$; $O_1M = \sqrt{25 - 16x^2} + 1$; $O_2M = 3x$.

$$(\sqrt{25 - 16x^2} + 1)^2 + 9x^2 = 25; \quad 25 - 16x^2 + 1 + 2\sqrt{25 - 16x^2} + 9x^2 - 25 = 0$$

$$2\sqrt{25 - 16x^2} = 1 - x^2 - 1; \quad \sqrt{25 - 16x^2} = \frac{1 - x^2}{2}; \quad 16x^2 \leq 25;$$

$$25 - 16x^2 = \frac{49x^4 - 14x^2 + 1}{4}; \quad x^2 \leq \frac{25}{16}; \quad 0 < x \leq \frac{5}{4}$$

$$100 - 64x^2 - 49x^4 + 14x^2 + 1 = 0; \quad x^2 = t; \quad t \geq 0$$

$$D = 2500 + 4 \cdot 99 \cdot 49 = 2500 + 16204 = 18704$$

$$D = 6 \cdot 25 + 99 \cdot 49 = 5476 = 74^2$$

$$t_1 = \frac{-25 + 74}{49} = 1 \Rightarrow x^2 = 1;$$

$AB = 5x = 5$. Ответ: 5

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4. \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

ОДЗ:

$$2x^2 + 2x + 1 > 0 \quad \forall x$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 49x^2 - 28x + 4$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$x_1 = \frac{5+1}{4} = 1.5; \quad x_2 = 1$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup [1.5; +\infty)$$

$$4x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 49x^2 - 28x + 4$$

$$25x - 45x^2 = 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)}$$

$$4 \cdot (2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) = 25x^2(5x - 9x)^2$$

$$4 \cdot (4x^4 - 10x^3 + 6x^2 + 4x^3 - 10x^2 + 6x + 2x^2 - 5x + 3) = 25x^2(81x^2 - 90x + 25)$$

$$4 \cdot (4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3) = 25x^2(81x^2 - 90x + 25)$$

$$2025x^4 - 2250x^3 + 625x^2 = 16x^4 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 12$$

$$2009x^4 - 2226x^3 + 633x^2 - 4x - 12 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$6. \begin{cases} 100b^2 - 160ab + 64a^2 - 25b^2 = 0 \\ a^2 - 25b^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (10b - 8a)^2 - (5b)^2 = 0 \\ a^2 - 25b^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (5b - 8a)(15b - 8a) = 0 \\ a^2 - 25b^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad 1. \begin{cases} 5b = 8a \\ a^2 - 25b^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{5}{8}b \\ \frac{25}{64}b^2 - 25b^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{5}{8}b \\ 25 \cdot \frac{63}{64}b^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{5}{8}b \\ b = \frac{+8}{\pm 5\sqrt{63}} \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{5}{8}b = \frac{5}{8} \cdot \frac{+8}{\pm 5\sqrt{7}} = \pm \frac{\sqrt{7}}{7} \\ b = \pm \frac{8}{15\sqrt{7}} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} a = \frac{15}{8}b \\ \frac{225}{64}b^2 - 25b^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{15}{8}b \\ 25(1 - \frac{9}{64})b^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{15}{8}b \\ 25 \cdot \frac{55}{64}b^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{15}{8}b \\ b = \pm \frac{8}{5\sqrt{55}} \end{cases}$$

$$a = \frac{15}{8}b = \frac{15}{8} \cdot \frac{+8}{\pm 5\sqrt{55}} = \pm \frac{3}{\pm 5\sqrt{55}} = \pm \frac{\sqrt{55}}{275}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{\sqrt{7}}{21}; -\frac{\sqrt{7}}{21} \right); \left(\frac{3\sqrt{55}}{275}; -\frac{3\sqrt{55}}{275} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

ЛМФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = ax + 10b \\ (x^2 + 16x + 64 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) = 0 \quad \text{①} \end{cases}$$

Подставим значение y в неравенство ①:

$$(x^2 + 16x + 64 + (ax + 10b)^2 - 1)(x^2 + (ax + 10b)^2 - 4) = 0$$

$$(x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 20axb + 100b^2 - 1)(x^2 + a^2x^2 + 20axb + 100b^2 - 4) = 0$$

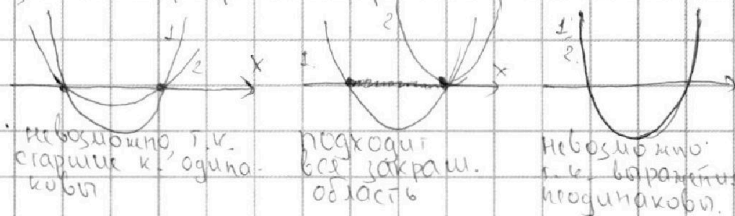
$$(x^2(a^2 + 1) + 4x(5ab + 4) + 100b^2 + 63)(x^2(a^2 + 1) + 20axb + 100b^2 - 4) = 0$$

Полученные 2 квадратных трёхчлена должны иметь 6 сумми

только 2 корня (если корней больше, то значений x при которых произведение равно 0 больше, если при этом

какие-то совпадают, то графики трёхчленов имеют

один из видов:



Два значения x , а значит, и 2 реш

ния системы возможно лишь тогда, когда оба квадратных трёхчлена имеют по 1 корню, т.е. $D_1 = D_2 = 0$, где D_1 и D_2 - дискриминанты кв. трёхчленов:

$$D_1 = 16(5ab + 4)^2 - 4(a^2 + 1)(100b^2 + 63) = 0; \quad D_2 = 400a^2b^2 - 4(a^2 + 1)(100b^2 - 4) = 0$$

$$\begin{cases} 4(5ab + 4)^2 - (a^2 + 1)(100b^2 + 63) = 0 \\ 25a^2b^2 - (a^2 + 1)(25b^2 - 1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 204(25a^2b^2 + 90ab + 16) - (a^2 + 1)(100b^2 + 63) = 0 \\ 25a^2b^2 - 25a^2b^2 - 25b^2 + a^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 100a^2b^2 + 160ab + 64 - 100a^2b^2 - 100b^2 - 63a^2 - 63 = 0 \\ a^2 - 25b^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 100b^2 - 160ab + 63a^2 - 1 = 0 \\ a^2 - 25b^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 75b^2 - 160ab + 64a^2 = 0 \\ a^2 - 25b^2 + 1 = 0 \end{cases}$$



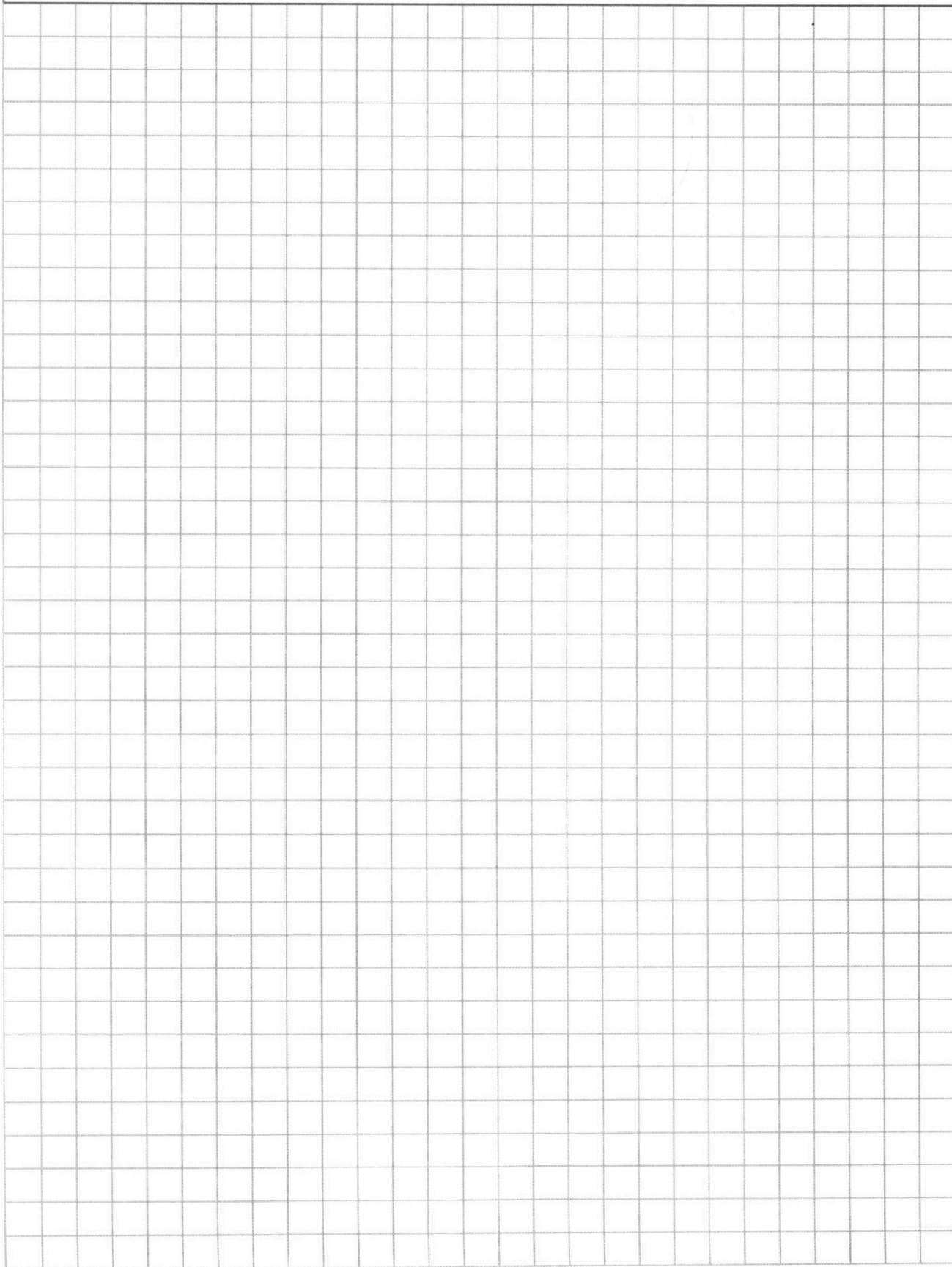
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical work on grid paper, including:

- Diagrams of triangles and circles with various points and lines.
- Equations: $(x+1)^2 + x^2 = 16$, $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$, $4x^2 - 3x + 4 = 49x^2 - 25x + 4$, $4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) = 25x^2(\frac{5}{3} - 9x)^2$.
- Algebraic manipulations and calculations involving powers of 2 and 7.
- Geometric constructions and proofs.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot m; \quad ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot n; \quad bc = 2^{17} \cdot 7^{12} \cdot k \quad a = \frac{2^{14} \cdot 7^{10} \cdot m}{a}$$

$$(abc)^2 = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot 2^{17} \cdot 7^{12} \cdot mnk = 2^{51} \cdot 2^{17} \cdot 7^{27} \cdot 7^{37} \cdot mnk$$

$$(abc)^2 = 2^{51} \cdot 7^{64} \cdot mnk \quad \text{НОД}(ab, c) = 2^5 \cdot 7^5$$

$$(abc)^2 = 2^{51} \cdot 7^{64} \Rightarrow abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$$

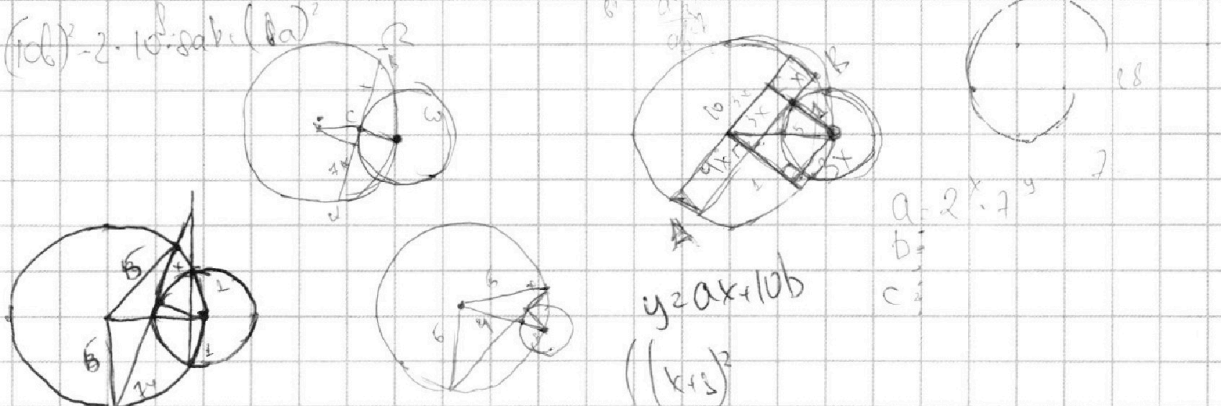
$$2^{14} \cdot 7^{10} \cdot a = 2^{14-x} \cdot 7^{10-x} \cdot c = 2^{17-x} \cdot 7^{12-x} \quad \begin{cases} 2^{14-x} \cdot 7^{10-x} = 2^x \cdot 7^x \\ 2^{17-x} \cdot 7^{12-x} = 2^x \cdot 7^x \end{cases}$$

$$abc = 2^3 \cdot 7^3 \quad \text{НОД}(ab) = 2^3 \cdot 7^3$$

$$(a+b)^2 - 2ab = a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$$

$$(a+b)^2 - 2ab = 16 - 2ab = (a-b)^2$$

$$16 - 2ab = (a-b)^2 \Rightarrow 16 - 2ab = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow 16 = a^2 + b^2$$



$$y = ax + 10b$$

$$(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$; $2x^2-5x+3 \geq 0$

$\sqrt{(x-1)(x+3)} - \sqrt{(x+1)(2x-1)} = 2-7x$; $D = 25-46 < 0$

$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$; $a, b \geq 0$

$2x^2-5x+3 \geq 0$; $2x^2+2x+1 \geq 0$

$2x^2-5x+3 = 0$; $x_1 = 1, x_2 = 1.5$

$2x^2+2x+1 = 0$; $D = 4-8 < 0$

$\sqrt{(x-1)(x+3)} - \sqrt{(x+1)(2x-1)} = 2-7x$

$(x-1)(x+3) = (x+1)(2x-1) + 2(2-7x) - 2(2-7x)^2$

$x^2-1x-3 = 2x^2-1x-2 + 4-14x - 4(4-28x+49x^2)$

$x^2-1x-3 = 2x^2-1x-2 + 4-14x - 16 + 112x - 196x^2$

$195x^2 - 111x + 11 = 0$

$D = 12321 - 8580 = 3741$

$x = \frac{111 \pm \sqrt{3741}}{390}$

$x_1 = \frac{111 + \sqrt{3741}}{390}$; $x_2 = \frac{111 - \sqrt{3741}}{390}$

$x_1 \approx 0.3$; $x_2 \approx 0.1$

$x_1 \in [1, 1.5]$; $x_2 \notin [1, 1.5]$

$x = \frac{111 + \sqrt{3741}}{390}$

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

$\sqrt{2x^2-5x+3} = 2-7x + \sqrt{2x^2+2x+1}$

$2x^2-5x+3 = (2-7x)^2 + 2x^2+2x+1$

$2x^2-5x+3 = 4-28x+49x^2 + 2x^2+2x+1$

$195x^2 - 111x + 11 = 0$

$x = \frac{111 \pm \sqrt{3741}}{390}$

$x_1 = \frac{111 + \sqrt{3741}}{390}$; $x_2 = \frac{111 - \sqrt{3741}}{390}$

$x_1 \approx 0.3$; $x_2 \approx 0.1$

$x_1 \in [1, 1.5]$; $x_2 \notin [1, 1.5]$

$x = \frac{111 + \sqrt{3741}}{390}$