



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{14}7^{13}$ ,  $bc$  делится на  $3^{19}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $3^{23}7^{42}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC=1$  и  $BC=25$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения  $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .

7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX=\sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD:DC$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Оценка: Задача 1.  
Пусть  $ab = k \cdot 3^{14} \cdot 7^{13}$ ;  $bc = l \cdot 3^{19} \cdot 7^{17}$ ;  $ac = m \cdot 3^{23} \cdot 7^{42}$ ,  
где  $l, k, m \in \mathbb{N}$ .

Тогда перемножим равенства:

$$(abc)^2 = klm \cdot 3^{56} \cdot 7^{72}$$

$$abc = \sqrt{klm} \cdot 3^{28} \cdot 7^{36}$$

Если  $\sqrt{klm}$  не рационален, то  $abc$   
также иррационально, что противоречит  
условию. Так как  $k, l, m \in \mathbb{N}$ , и

$$\sqrt{klm} \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{klm} \in \mathbb{N}$$

Поэтому  $\sqrt{klm} \geq 1 \Rightarrow abc \geq 3^{28} \cdot 7^{36}$

Но  $abc : ac$  и  $ac : bc \Rightarrow abc : 7^{42} \Rightarrow abc \geq 3^{28} \cdot 7^{42}$

Пример:

При  $a = 3^9 \cdot 7^{19}$ ;  $b = 3^5 \cdot 7^{23}$ ;  $c = 3^{14}$

$$abc = 3^{28} \cdot 7^{42}$$

Ответ:  $3^{28} \cdot 7^{42}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Оценка:

Задача 2

Обозначим НОД,  $(x; y)$  как  $(x; y)$ .

$$(a+b; a^2-9ab+b^2) = (a+b; (a+b)^2-11ab) = (a+b; -11ab) = \\ = (a+b; 11ab) = d$$

Пусть  $(a+b; a^2-9ab+b^2) = d$ .

Если  $d$

Пусть  $d$  делится на простое число  $p \neq 11$

или  $d$  делится на  $p=11^2$ .

Тогда  ~~$11ab$~~   $11ab: p$  или  $11ab: p_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow ab: p \text{ или } ab: 11 \Rightarrow \begin{cases} a:p \\ b:p \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a:11 \\ b:11 \end{cases}$$

Мы знаем, что  $a+b:p$  или  $a+b:p_1$

Тогда  $\begin{cases} a:p \\ b:p \end{cases}$  или  $\begin{cases} a:11 \\ b:11 \end{cases}$ , это противоречит

условию, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима.

Значит  $d = \{1; 11\} \Rightarrow d \leq 11$

(Мы приводим два возможных случая,  
разделяя их "или". Перед "или" стоит  
первый случай, после — второй)

Пример:  $a=1, b=10$ .

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{11}{1+100-90} = \frac{11}{11} = 1 \text{ — дробь } \frac{11}{11} \text{ сократима на } 11.$$

Ответ:  ~~$m$~~  наибольшее  $m=11$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 3

Заметим, что выражения под корнями всегда  $> 0$ , т.к. дискриминанты  $< 0$  ( $25 - 4 \cdot 6 \cdot 3 < 0$  и  $1 - 4 \cdot 3 < 0$ )

Поэтому выражение всегда имеет смысл.

В Р-и, когда левая часть обращается в 0.

$$3x^2 - 5x + 6 = 3x^2 + x + 1$$

$$6x = 5$$

$$x = \frac{5}{6}$$

При  $x = \frac{5}{6}$  правая ~~левая~~ часть тоже

равна 0. Поэтому  $\frac{5}{6}$  — корень.

~~При  $x < \frac{5}{6}$~~

~~$3x^2 - 5x + 6 > 3x^2 + x + 1$ , поэтому~~

~~левая часть  $> 0$  при  $x < \frac{5}{6}$ .~~

~~и правая часть при таком  $x$~~

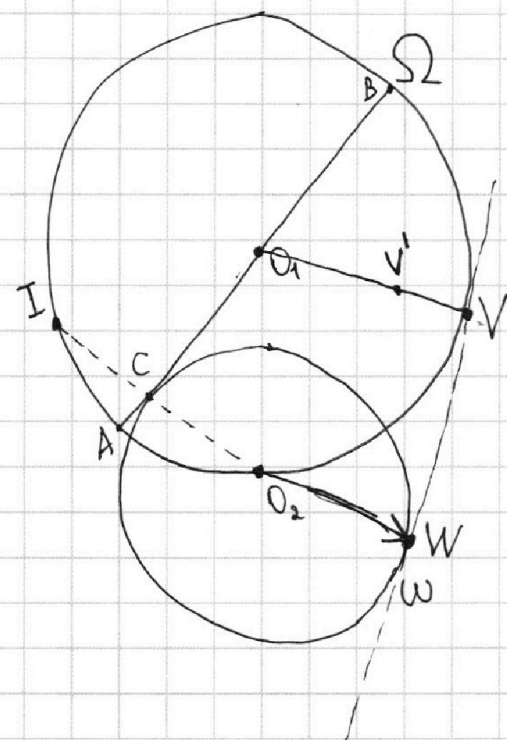
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4.

Пусть центры  $\omega$  и  $\Omega$  — это точки  $O_2$  и  $O_1$  соответственно.

Будем обозначать степень точки  $X$  относительно окружности  $\gamma$  как  $P_{\omega\gamma}^X$ .

$$P_{\Omega\omega}^C = -AC \cdot BC = -25$$

Так как  $O_1A = O_1B$ ,

$$O_1C = 12, \quad O_1B = 13, \quad O_1A = 13, \quad O_1O_2 = 13.$$

$$P_{\omega\omega}^{O_1} = (O_1C)^2 = 144$$

$O_2C \perp O_1C$ , т.к.  $O_1C$  — касательная.

Поэтому по теореме Пифагора:

$$(O_1C)^2 + (O_2C)^2 = (O_1O_2)^2$$

$$\text{Отсюда } O_2C = 5$$

Продлим  $O_2C$  за  $C$  до пересечения с  $\Omega$ . Получим точку  $I$ .

Проведём общую внешнюю касательную как на рисунке, касающуюся  $\Omega$  и  $\omega$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

В тогжак  $V$  и  $W$  соответственено.

Сделаем параллельный перенос отрезка

$O_1O_2$  на вектор  $O_2W$ . Тогжак  $O_2$  перей-

дет в  $W$ . Пусть точка  $O_1$  перейдет

в  $V'$ . Тогда по теореме Пифагора для

прямоугольного  $\triangle V'VW$ :

$$(VW)^2 = (V'W)^2 - (V'V)^2$$

$$(VW)^2 = (O_1O_2)^2 - (O_1V - O_2W)^2 = (O_1O_2)^2 - (O_1B - O_2C)^2 =$$

$$= 13^2 - (13 - 5)^2 = 169 - 64 = 105$$

$$VW = \sqrt{105}$$

Ответ:  $\sqrt{105}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### Задача 6

Пусть скорости велосистиста и мотоциклиста —  $v_B$  и  $v_M$  соответственно, а расстояние между пунктами А и В —  $S$ .

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{S}{v_B} &= \frac{S}{v_M} + \Delta t_1 \quad (\Delta t_1 = 1.2 \text{ час} - \text{время из условия}) \\ \frac{v_B \cdot S}{v_M} + \Delta S &= \frac{v_M S}{v_B} \quad (\Delta S = 49 \text{ км} - \text{расстояние из условия}) \\ \frac{S}{v_B + \Delta v} &= \frac{S}{v_M + \Delta v} + \Delta t_2 \quad (\Delta t_2 = 36 \text{ мин}; \Delta v = 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}} - \text{величины из условия}). \end{aligned} \right.$$

~~$$v_B = \frac{S}{\frac{S}{v_M} + \Delta t_1} \quad - \text{из первого ур-я.}$$~~

~~$$v_B = \frac{S v_M}{S + v_M \Delta t_1}$$~~

~~$$\frac{S^2 v_M}{S v_M + v_M^2 \Delta t_1} + \Delta S = \frac{v_M S^2 + S v_M^2 \Delta t_1}{S v_M} \quad - \text{из второго ур-я}$$~~

~~$$\frac{S^2}{S + v_M \Delta t_1} + \Delta S = S + v_M \Delta t_1$$~~

~~$$S^2 + \Delta S \cdot S + \Delta S \cdot v_M \Delta t_1 = S^2 + 2S \cdot v_M \Delta t_1 + v_M^2 \cdot \Delta t_1^2$$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Первое и третье ур-я:

$$\begin{cases} v_M S - v_B S - \Delta t_1 \cdot v_M v_B = 0 \\ (v_M + 7) S - (v_B + 7) S - \Delta t_2 \cdot (v_M + 7)(v_B + 7) = 0 \end{cases}$$

$$\Delta t_2 (v_M + 7)(v_B + 7) = \Delta t_1 v_M v_B$$

Второе <sup>нрв.</sup> и 4 ур-я:

$$\begin{cases} v_B^2 S - v_M^2 S + \Delta S \cdot v_M \cdot v_B = 0 \\ v_B S - v_M S = -\Delta t_1 \cdot v_M v_B \end{cases}$$

$$(v_B + v_M)(v_B S - v_M S) + \Delta S v_M \cdot v_B = 0$$

$$(v_B + v_M) \cdot (-\Delta t_1 \cdot v_M v_B) + \Delta S v_M v_B = 0$$

$$\begin{cases} v_B + v_M = \frac{\Delta S}{\Delta t_1} \Rightarrow v_B = \frac{\Delta S}{\Delta t_1} - v_M \\ \Delta t_2 v_M v_B + 7(v_M + v_B)\Delta t_2 + 49\Delta t_2 - \Delta t_1 v_M v_B = 0 \end{cases}$$

$$(\Delta t_2 - \Delta t_1) \left( \frac{\Delta S}{\Delta t_1} - v_M \right) v_M + \frac{7\Delta S \Delta t_2}{\Delta t_1} + 49\Delta t_2 = 0$$

$$-0,4(49 - v_M) v_M + \frac{7 \cdot 49 \cdot \frac{6}{10}}{1} + 49 \cdot \frac{6}{10} = 0$$

$$0,4 v_M^2 - 19,6 v_M + 235,2 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$v_m^2 - 49v_m + 588 = 0$$

~~№~~ ~~м. Вильямс~~

~~$v_m = 196 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$  или  $v_m = 28 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$  (справно)~~  
~~значение.~~

$$v_m = \frac{49 \pm \sqrt{7^4 - 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2}}{2} = \frac{49 \pm 7 \sqrt{49 - 48}}{2}$$

$$v_m = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \quad \text{или} \quad v_m = 28 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

Подставляя в ур-е:

$$v_m + v_B = \frac{S}{\Delta t_1} \quad \text{получаем, что } v_B = 28 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

или  $v_B = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$  соответственно.

Поэтому  $v_B = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ ;  $v_m = 28 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ , т.к.  $v_m > v_B$ .

Подставим:

$$v_m S - v_B S = \Delta t_1 v_B v_m$$

$$S = \frac{\Delta t_1 v_B v_m}{v_m - v_B} = 84 \text{ км}$$

Ответ: расстояние между А и В равно

84 км.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

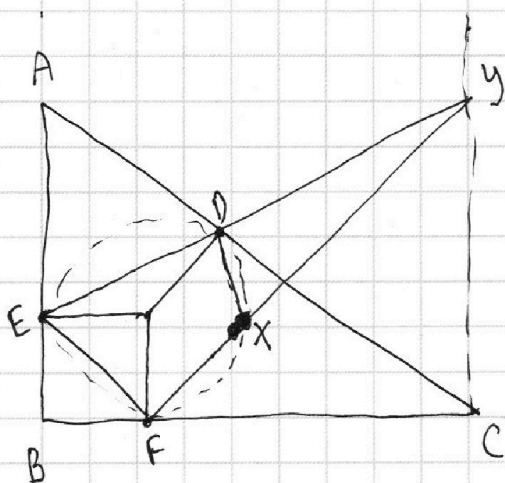
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 7.



~~Решим задачу в предположении, что EX — диаметр вписанной окружности.~~

~~Пусть~~

Решим задачу в предположении, что EX — диаметр вписанной окружности. Пусть

$$EX = x. \text{ Тогда } XY = \sqrt{2}x; \quad FX = \frac{\sqrt{2}x}{2}$$

$$EF = \frac{\sqrt{2}x}{2} \Rightarrow XY = \sqrt{EF^2 + FY^2} = \sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{9}{2}x^2} = \sqrt{5}x$$

Из подобия  $\triangle EFX \sim \triangle XYD$ :

$$\frac{EX}{FX} = \frac{XY}{DY}$$

$$\frac{\sqrt{5}x}{\frac{3\sqrt{2}x}{2}} = \frac{\sqrt{2}x}{DY}$$

$$DY = \frac{3}{\sqrt{5}}x = \frac{3\sqrt{5}}{5}x$$

$$ED = EX - DY = \frac{2\sqrt{5}}{5}x$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{ED}{DY} = \frac{2}{3} \quad (\text{п.к. } \triangle ADE \sim \triangle DYC)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Теперь докажем, что  $EX$  — диаметр.

$$\triangle ADE \sim \triangle DYC.$$

$AD = AE$  в силу свойств касательных.

Значит

$$CD = CY.$$

Но  $CD = CF$ . Поэтому  $CF = CY$ .

Ещё мы знаем, что  $BE = BF$  и

$$\angle EBF = \angle FCY = 90^\circ.$$

Значит тогда  $\angle EFB = \angle YFC = 45^\circ$ .

Значит  $\angle EFY = 90^\circ$ . Это равносильно

тому, что  $EX$  — диаметр.

Тогда задача решена.

Ответ:  $\frac{AD}{DC} = \frac{2}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Заметим, что~~  
~~Левая часть возрастает.~~  
~~Это не трудно показать~~  
Перенесем уравнение:  
~~Заметим, что минимум~~  
~~выражения  $\sqrt{5x^2 - 5x + 6}$  при  $x = \frac{5}{6}$~~   
~~(по формуле для квадр. трехчлена).~~  
Далее

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Имеем ур-я:

$$3,28 = \frac{28}{84}$$

$$v_B = \frac{S v_m}{S + v_m \cdot \Delta t_1}$$

$$S(\Delta S - 2v_m \cdot \Delta t_1) = v_m^2 \cdot \Delta t_1^2 - \Delta S \cdot v_m \cdot \Delta t_1 \Rightarrow \Delta S = \frac{v_m \Delta t_1 (v_m \Delta t_1 + S)}{\Delta S - 2v_m \Delta t_1}$$

$$\frac{S}{v_B + \Delta v} = \frac{S}{v_m + \Delta v} + \Delta t_2$$

$$\frac{S}{\frac{S v_m}{S + v_m \Delta t_1} + \Delta v} = \frac{S}{v_m + \Delta v} + \Delta t_2 - \text{чл. перебора ур-я.}$$

$$\frac{S(S + v_m \Delta t_1)}{S v_m + S \Delta v + v_m \Delta t_1 \Delta v} = \frac{S}{v_m + \Delta v} + \Delta t_2$$

$$S(S + v_m \Delta t_1)(v_m + \Delta v) = S(S v_m + S \Delta v + v_m \Delta t_1 \Delta v) +$$

$$S^2 v_m + S^2 \Delta v + S v_m^2 \Delta t_1 + S v_m \Delta v \Delta t_1 + \Delta t_2 (v_m + \Delta v)(S v_m + S \Delta v + v_m \Delta t_1 \Delta v)$$

$$= S^2 v_m + S^2 \Delta v + S v_m \Delta v \Delta t_1 + \Delta t_2 S v_m^2 + \Delta t_2 S \Delta v \cdot v_m + \Delta t_2 \cdot \Delta t_1 \cdot v_m^2 \cdot \Delta v + \Delta t_2 S v_m \Delta v + \Delta t_2 \cdot S \cdot \Delta v^2 + \Delta t_2 \cdot \Delta t_1 \cdot v_m \cdot \Delta v^2$$

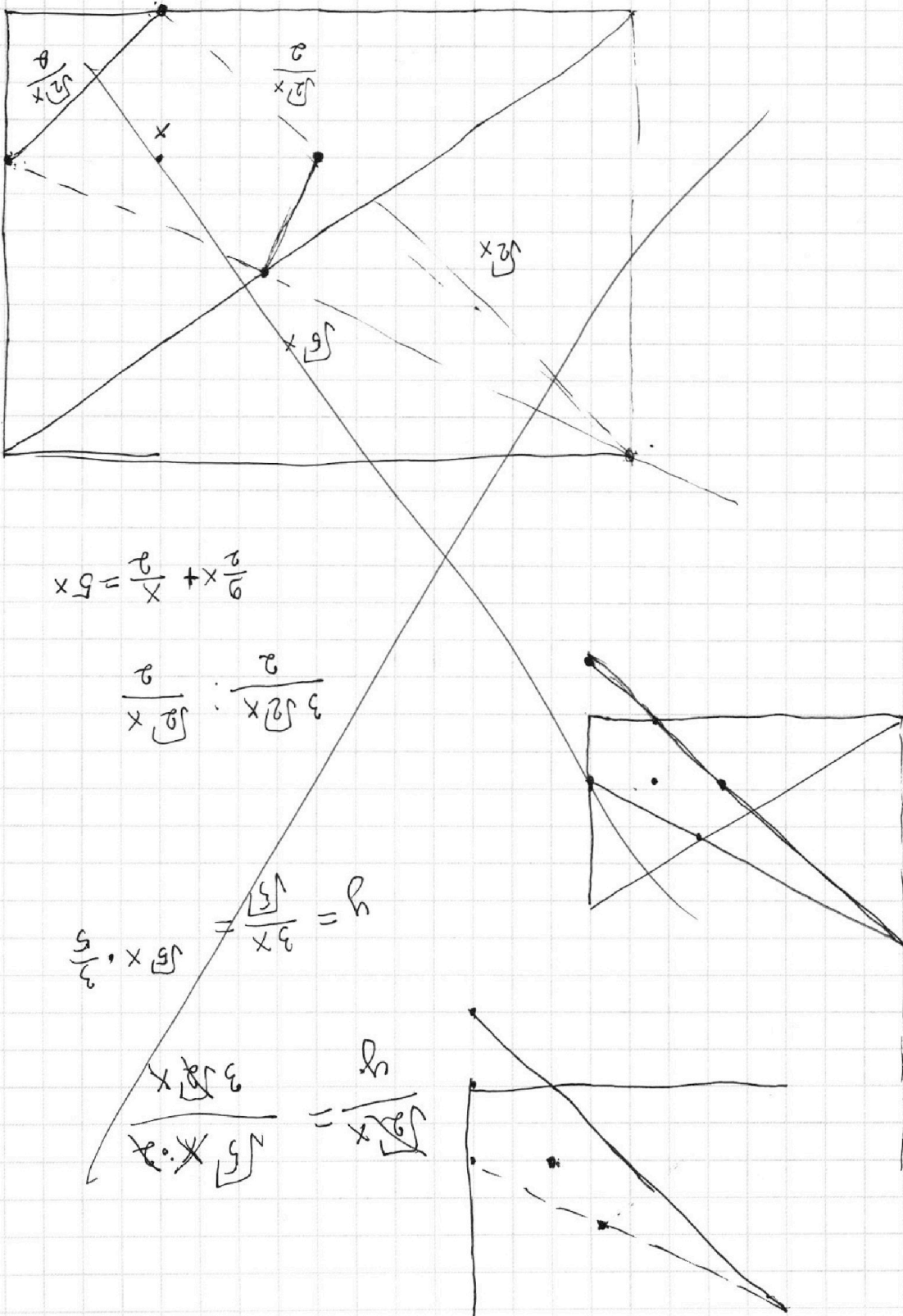
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



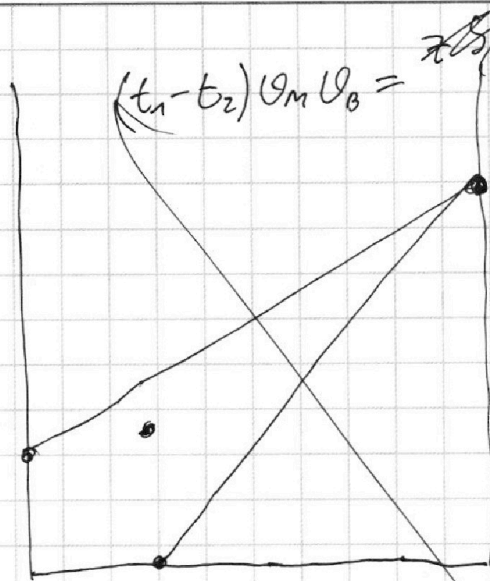
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$7v_b \left(7 + \frac{S}{v_m}\right) = 7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10}$$

$$49 + \frac{S}{v_m} = 56$$

$$4.49$$

$$v_b S - v_m S = -\Delta t_1 \cdot v_m \cdot v_b$$

$$147.4$$

$3 \cdot 7^2 \cdot 2^2$

$a + b = 49$

$ab =$

$$\begin{array}{r} 2352 \\ - 20 \\ \hline 35 \\ - 32 \\ \hline 32 \end{array}$$

$FC = 588 =$

$$\frac{S}{v_m} + 60 \text{ мин} = \frac{S}{v_b}$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ 49 \\ 48 \\ \hline 392 \\ 196 \\ \hline 2352 \end{array}$$

$$S v_b + 60 v_m v_b - S v_m = 0$$

$$\frac{S}{v_m + 7} + 36 = \frac{S}{v_b + 7}$$

$$S v_b + 7 S + 36 ( ) ( ) -$$

$$- S v_m - 7 S = 0$$

$$4 \cdot 49 = 98 \cdot 2 = 196$$

$$60 v_m v_b = 36 (v_m + 7) (v_b + 7)$$

$0,4$

$$\frac{24}{60} = \frac{4}{10}$$

$$196^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2352$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(S \vartheta_m^2 \Delta t_1 - S \vartheta_m^2 \Delta t_2 - \vartheta_m^2 \cdot \Delta \vartheta \cdot \Delta t_1 \Delta t_2) - (S \vartheta_m \Delta \vartheta \cdot \Delta t_2 + \vartheta_m \cdot \Delta \vartheta^2 \cdot \Delta t_1 \Delta t_2) - S \Delta \vartheta^2 \cdot \Delta t_2 = 0$$

Из второго уравнения:

$$S = \frac{\vartheta_m \Delta t_1 (\vartheta_m \Delta t_1 + \Delta S)}{\Delta S - 2\vartheta_m \cdot \Delta t_1}$$

Подставим: и сократим на  $(\Delta S - 2\vartheta_m \cdot \Delta t_1)$

$$(\vartheta_m^3 \Delta t_1^2 (\vartheta_m \Delta t_1 + \Delta S) - \vartheta_m^3 \Delta t_1^2 \Delta t_2 (\vartheta_m \Delta t_1 + \Delta S) - \vartheta_m^2 \cdot \Delta \vartheta \cdot \Delta t_1 \cdot \Delta t_2 \times (\Delta S - 2\vartheta_m \cdot \Delta t_1)) - (2\vartheta_m^2 \Delta \vartheta \cdot \Delta t_2 (\vartheta_m \Delta t_1 + \Delta S) \cdot \Delta t_1 + \vartheta_m \cdot \Delta \vartheta^2 \cdot \Delta t_1 \Delta t_2 (\Delta S - 2\vartheta_m \cdot \Delta t_1)) - \vartheta_m \Delta \vartheta^2 \cdot \Delta t_1 \Delta t_2 (\vartheta_m \Delta t_1 + \Delta S) = 0 \quad | : \vartheta_m \cdot \Delta t_1$$

$$\vartheta_m^3 \Delta t_1^2 + \vartheta_m^2 \Delta t_1 \Delta S - \vartheta_m^3 \cdot \Delta t_2 \cdot \Delta t_1 - \vartheta_m^2 \cdot \Delta t_2 \Delta S - \vartheta_m \Delta \vartheta \Delta t_2 \Delta S + 2\vartheta_m^2 \Delta \vartheta \Delta t_1 \Delta t_2 - 2\vartheta_m^2 \Delta \vartheta \Delta t_2 \Delta t_1 - 2\vartheta_m \Delta \vartheta \Delta t_2 \cdot \Delta S - \Delta \vartheta^2 \cdot \Delta t_2 \cdot \Delta S + 2\vartheta_m \cdot \Delta \vartheta^2 \cdot \Delta t_1 \cdot \Delta t_2 - \vartheta_m \Delta \vartheta^2 \cdot \Delta t_1 \Delta t_2 + \Delta \vartheta^2 \cdot \Delta t_2 \cdot \Delta S = 0$$

$$\vartheta_m^3 (\Delta t_1 - \Delta t_2) \Delta t_1 + \vartheta_m^2 (\Delta t_1 - \Delta t_2) \Delta S + \vartheta_m (\Delta t_1 \Delta \vartheta - 3\Delta S) \Delta \vartheta \Delta t_2 + (-2\Delta \vartheta^2 \Delta t_2 \Delta S) = 0$$



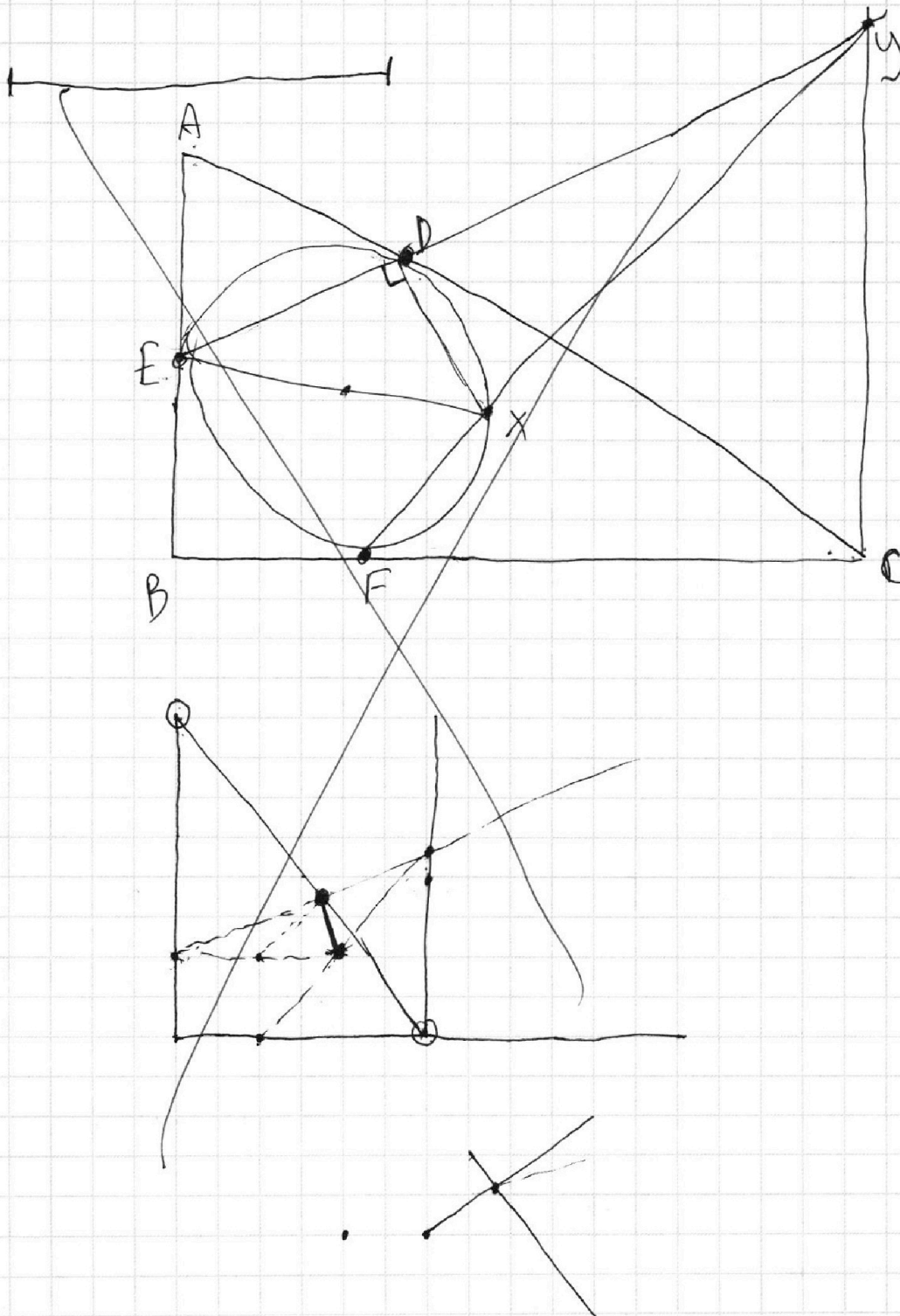
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{(5x-y)(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} =$$

$$= \frac{5zx + zy - z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$8yz + xz = 15yx$$

$$(4x-y)(4x+y) + (3x-z)(3x+z) \quad \frac{86}{3}xz - 8z^2 - 25x^2 = 0$$

~~$$(3z-x)(3z-y) = xz$$~~

$$y = 5x - 3z$$

$$8z(5x - 3z) + xz = 15x(5x - 3z)$$

$$25x^2 - (5x - 3z)^2 - z^2 =$$

$$(5x - 3z)^2 + 3z^2$$

$$= \frac{25x^2 - 25x^2 - 9z^2 + 30zx - z^2}{25x^2 - 30xz + 12z^2} = \frac{z(30x - 10z)}{25x^2 - 30xz + 12z^2}$$

$$40xz - 24z^2 + xz =$$

$$= 475x^2 - 45xz$$

$$86xz - 24z^2 - 75x^2 = 0 \quad | :3$$

$$\frac{86}{3}xz - 8z^2 - 25x^2 = 0$$

$$25x^2 - 30xz + 12z^2 =$$

$$= -\frac{4}{3}xz + 4z^2$$

$$x = \frac{30z \pm \sqrt{900z^2 - 4 \cdot 25 \cdot 12z^2}}{2 \cdot 25}$$

$$\frac{30x - 10z}{- \frac{4}{3}x + 4z} =$$

$$= \frac{90x - 30z}{12z - 4x}$$

$$= \frac{90x - 30z}{12z - 4x}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$-\Delta U \Delta t_2 \Delta S - 2 \Delta U \Delta t_2 \Delta S + \Delta U^2 \Delta t_1 \Delta t_2$$

147  
14.42

$$24 \cdot 60 + 24 \cdot 49 + (7 - 3 \cdot 49) \cdot 4,2 =$$

$$= 2 \cdot 49 \cdot \frac{7}{60} \cdot 0,49 = 0$$

$$\underset{a}{24 \cdot 60} + \underset{b}{24 \cdot 49} - \underset{c}{14 \cdot 42} - 4802 = 0$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ 98 \\ 49 \\ \hline 882 \\ 392 \\ \hline 4802 \end{array}$$

$$24 = 6 \cdot 4$$

$$25 \cdot 49 = 5^3 = 125$$

$$= 250 + 500 +$$

$$24 \cdot 60 + 24 \cdot 49 - 14 \cdot 42 - 48$$

$$120 + 98 - 49 - 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$3x^2 - 5x + 6$~~   
 ~~$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 72}}{6}$~~

$\sqrt{3x^2 - 5x + 6}$

$\frac{1}{12} - \frac{1}{6} + 1$

$x = 1$   
 $\frac{-b}{2a} = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$   
 $x = t + \frac{5}{6}$

$-\frac{1}{12} + 12$

~~$3x^2 - 5x + 6$~~

$\frac{25}{12} - \frac{25}{12} + 6 =$   
 $= -\frac{25}{12} + \frac{72}{12} = \frac{47}{12}$

$72 - 5 = 47$

~~$3x^2 - 5x + 6$~~

$-\frac{b}{2a} = \frac{5}{6}$

$-\frac{1}{12}$

$x = (t + 0)$

~~$3t^2 + 6t + 30^2 - 5t - 80 + 6$~~

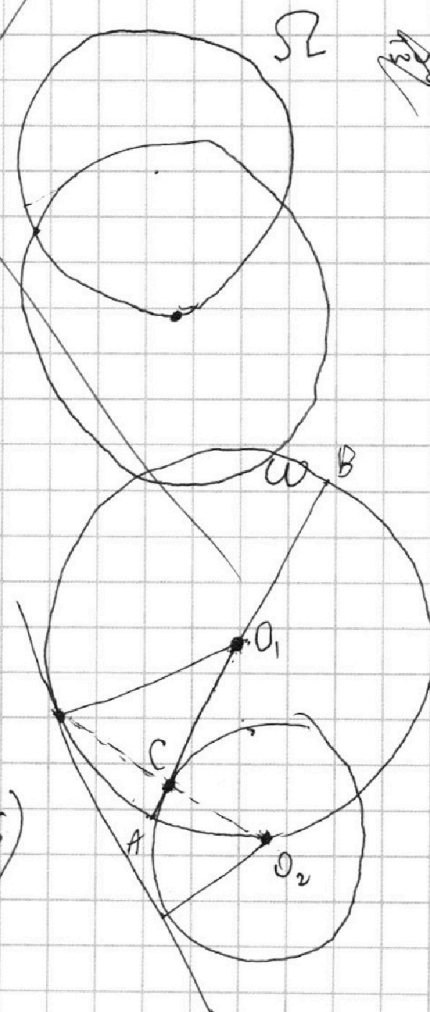
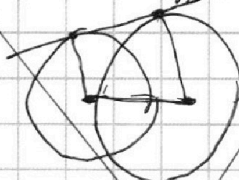
~~$3x^2 - 5x + 6$~~

~~$3t^2 + 6t$~~

$3t^2 + (60 - 5)t + (30^2 - 50 + 6)$

$(60 - 5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (30^2 - 50 + 6)$

$360^2 - 600 + 25 - 360^2 + 600 - 72$



105

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$-5x + 6 \geq x + 1$$

$$6x - 5 = 0$$

$$x = \frac{5}{6}$$

$$x < \frac{5}{6}$$

$$-\frac{1}{42} + 1 = \frac{11}{42}$$

$$\geq \frac{11}{12}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 11ab}$$

$$(a+b) - \frac{11ab}{a+b}$$

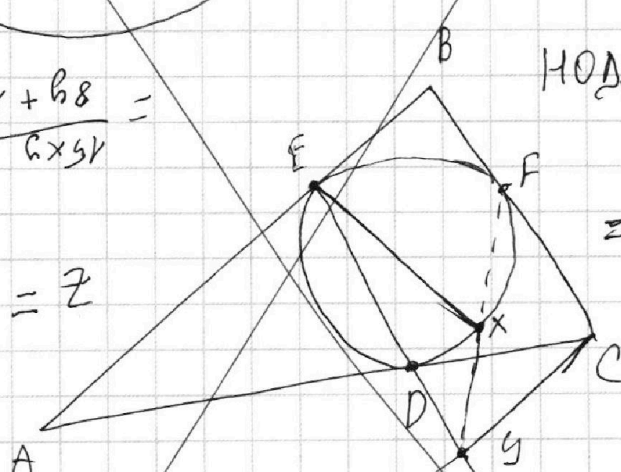
$$\text{НОД, } (a+b, (a+b)^2 - 11ab) =$$

$$= (a+b; 11ab)$$

36

$$\frac{x + 68}{6x51} =$$

$$\frac{\frac{6}{1} + \frac{x}{8}}{51} = z$$



$$\frac{6 - x \cdot 4 \cdot 4}{(x - 26)^2} \cdot \frac{z - x \cdot 6}{51} \cdot 11$$

$$ab = k \cdot 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$bc = l \cdot 3^{19} \cdot 7^{17}$$

$$ac = m \cdot 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$(abc)^2 = klm \cdot 3^{56} \cdot 7^{72}$$

$$23 + 19 = 42$$

$$28 - 19 = 9$$

$$36 - 17 = 19$$

$$56 : 2 = 28 \quad 42 - 19 = 23$$

~~28-19~~

$$28 - 14 = 14$$

$$\frac{z - \frac{6}{51}}{51} = \frac{\frac{6}{1} - \frac{z}{51}}{8} = x$$