



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

n/1

$$\begin{cases} ab : 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc : 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac : 2^{20} \cdot 7^{37} \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2} \cdot x \\ b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2} \cdot y \\ c = 2^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2} \cdot z \end{cases}$$

$$abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot xyz$$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ - целые неотрицательные числа.
 xyz не делится на 2 и 7.
 $x, y, z \in \mathbb{N}; xyz \geq 1$

Тогда делимость из условия можно записать так:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 14 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 20 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 17 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 37 \Rightarrow \end{cases}$$

$$2\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 \geq 51 \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 37$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 26 \text{ (т.к. все числа целые)}$$

Тогда $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37} \cdot 1$

Пример где $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$:

$$a = 2^9 \cdot 7^{10} \quad b = 2^6 \cdot 7^{11} \quad c = 2^6 \cdot 7^{27}$$

Ответ: $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

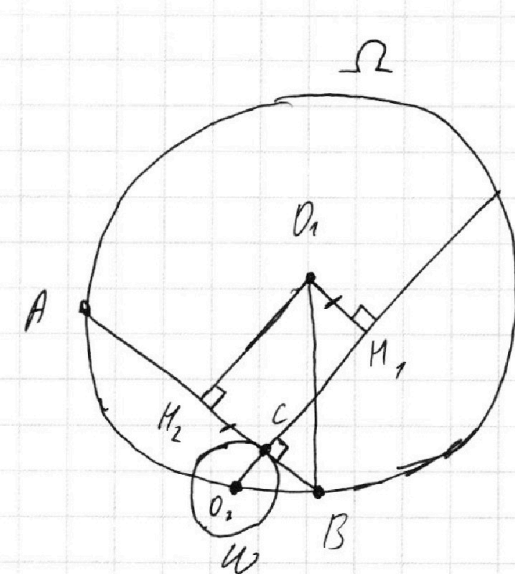
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $BC = x$

Тогда $AC = 7x$

$AB = 8x$

Заметим, что $AM_2 = M_2B$

(т.к. AO_1B - равнобедр.)

$$AM_2 = M_2B = \frac{AB}{2} = 4x$$

$$M_2C = M_2B - CB = 3x = O_1M_1 \quad (O_1M_1, CM_2 - \text{прямые}$$

$\Delta O_1O_2M_1$. \square по теореме Пифагора: \square по теореме Пифагора:

$$O_1O_2^2 = O_1M_1^2 + O_2M_1^2$$

$$25 = 9x^2 + O_2M_1^2 \Rightarrow O_2M_1^2 = 25 - 9x^2$$

$$CM_1 = O_2M_1 - O_2C = O_2M_1 - 1 = \sqrt{25 - 9x^2} - 1$$

$$CM_1 = O_1M_2 \quad (O_1M_2, CM_1 - \text{прямые, по побр.})$$

ΔO_1BM_2 . По теореме Пифагора:

$$O_1M_2^2 + M_2B^2 = O_1B^2$$

$$(\sqrt{25 - 9x^2} - 1)^2 + 16x^2 = 25$$

$$25 - 9x^2 + 1 - 2\sqrt{25 - 9x^2} + 16x^2 = 25$$

$$7x^2 + 1 = 2\sqrt{25 - 9x^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$49x^4 + 1 + 14x^2 = 100 - 36x^2$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$t = x^2 \quad 49t^2 + 50t - 99 = 0$$

$$D = 25^2 - 49 \cdot (-99) = 5976 =$$

$$= 4 \cdot 1369$$

$$t = \frac{-25 \pm 2\sqrt{1369}}{49}$$

$$t \geq 0 \Rightarrow t = \frac{2\sqrt{1369} - 25}{49}$$

$$x = \frac{\sqrt{2\sqrt{1369} - 25}}{7}$$

$$AB = 8x = \frac{8}{7} \cdot \sqrt{2\sqrt{1369} - 25}$$

$$\text{ОТВЕТ: } AB = \frac{8}{7} \cdot \sqrt{2\sqrt{1369} - 25}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{4}$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1 + (2 - 7x)} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$t = 2x^2 + 2x + 1 \quad y = 2 - 7x;$$

$$\sqrt{t+y} - \sqrt{t} = y$$

$$\begin{cases} t+y+t - 2\sqrt{(t+y)t} = y^2 \\ t+y \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases}$$

$t \geq 0 \rightarrow$ всегда верно, т.к. $2x^2 + 2x + 1 > 0$

$$2t - y(y-1) = 2\sqrt{(t+y)t}$$

$$4t^2 + y^2(y-1)^2 - 4ty(y-1) = 4t^2 + 4yt$$

$$y^2(y-1)^2 - 4y + (y-1+1) = 0$$

$$y^2(y-1)^2 - 4y^2t = 0$$

$$y^2((y-1)^2 - 4t) = 0$$

$$y^2 = 0$$

$$(2 - 7x)^2 = 0$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$t+y = 2 \cdot \frac{4}{49} - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3 > 0$$

$$(y-1)^2 - 4t = 0$$

$$(1-7x)^2 - 4(2x^2 + 2x + 1) = 0$$

$$49x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 121 - (-3) \cdot 49 = 294$$

$$x = \frac{11 \pm 2\sqrt{67}}{49}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



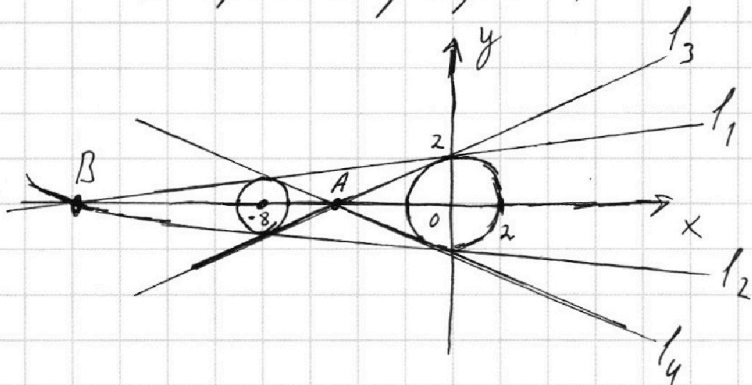
✓6

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$(x+8)^2 + y^2 \leq 1$ - окружность с центром $(-8; 0)$
и радиуса 1.

$x^2 + y^2 \leq 4$ - окружность с центром $(0; 0)$
и радиуса 2.

Построим графики:



Чтобы прямая
имела ровно

2 решения,
необходимо,

чтобы прямая
вида $y = ax + 10b$

касается обеих окруж-

ностей. Всего таких
прямых ровно 4: две внеш-

ние и две внутренние общие
касательные. (изобразены
на рисунке).

Прямые l_1 и l_2 , а также

l_3 и l_4 симметричны

относительно Ox .

Прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке B, а l_3 и l_4 в

точке A.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Примечание x -координата точки A равна

$$x_A = -\frac{8}{3} \cdot 2 = -5\frac{1}{3}, \text{ а точки } B$$

$$x_B = -8 \cdot 2 = -16$$

$$\text{Тогда } A \left(-5\frac{1}{3}; 0\right) \text{ и } B (-16; 0)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

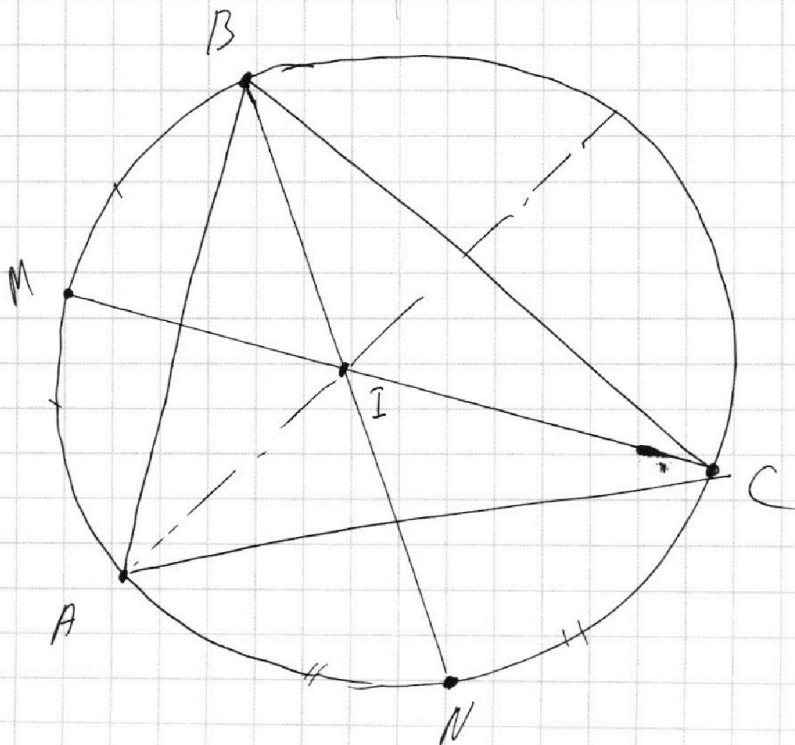
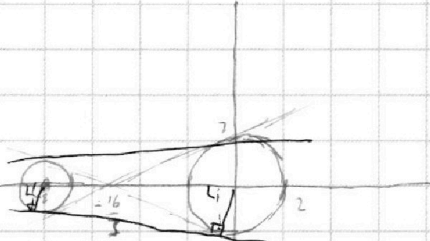
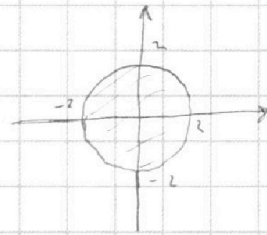
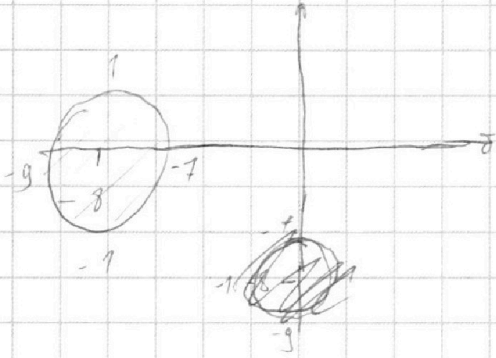
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$y = ax + 10b$$

$$(x+8)^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 \leq 4$$





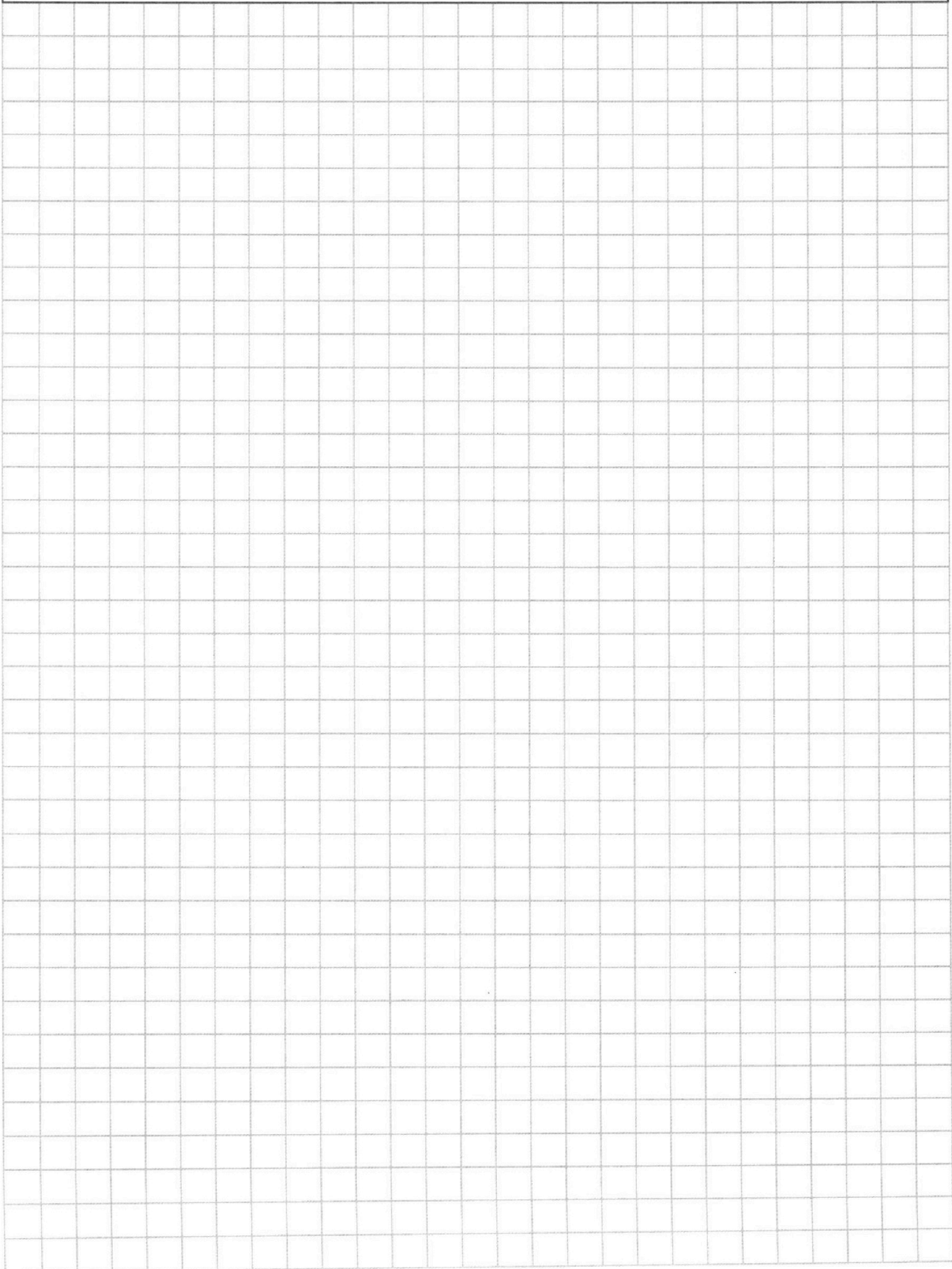
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$122 \cdot 2 = 244$$

$$= 67 \cdot 4$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1 + (2 - 7x)} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{t+y} - \sqrt{t} = y$$

$$t+y+t-2\sqrt{(t+y)t} = y^2$$

$$2t+y-y^2 = 2\sqrt{t^2+yt}$$

$$2x^2 - 5x + 3$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$$

$$2t+y-y(y-1) = 2\sqrt{t^2+yt}$$

$$4t^2 + y^2 - (y-1)^2 - 4t \cdot y(y-1) = 4(t^2+yt)$$

$$4t^2 + y^2 - (y-1)^2 - 4t \cdot y(y-1) = 4t^2 + 4yt$$

$$y(y-1)(y(y-1)-4t) - 4yt = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 2$$

$$y^2(y-1)^2 - 4yt(y-1) - 4yt = 0$$

$$y^2(y-1)^2 - 4yt(y-1+1) = 0$$

$$y^2(y-1)^2 - 4y^2t = 0$$

$$y^2((y-1)^2 - 4t) = 0$$

$$y^2 = 0$$

$$(y-1)^2 - 4t = 0$$

$$(2-7x)^2 = 0$$

$$(1-7x)^2 - 4(2x^2+2x+1) = 0$$

$$2-7x=0 \quad 2 \cdot \frac{1}{49} - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3 = 1 + 49x^2 - 14x - 8x^2 - 8x - 4 = 0$$

$$7x = 2$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$= \frac{8-20}{49} + 3 =$$

$$49x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 121 - (-3) \cdot 49 = 249$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{249}}{49} = \frac{11 \pm 2\sqrt{67}}{49}$$

$$2 \cdot \frac{1}{49} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 1 =$$

$$= \frac{-62+150}{49}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$(y_2 - y_1) + k(x_2 - x_1) = 0$$

$$(y_2 + y_1) + k(x_2 + x_1) = 2b$$

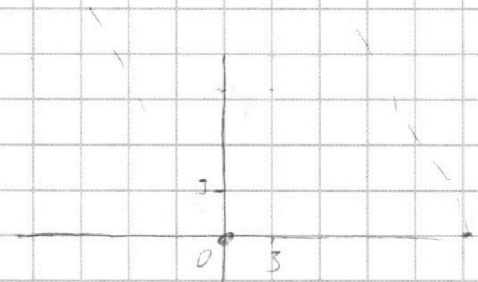
$$y = kx + b$$

$$y_1 = kx_1 + b$$

$$y_2 = kx_2 + b$$

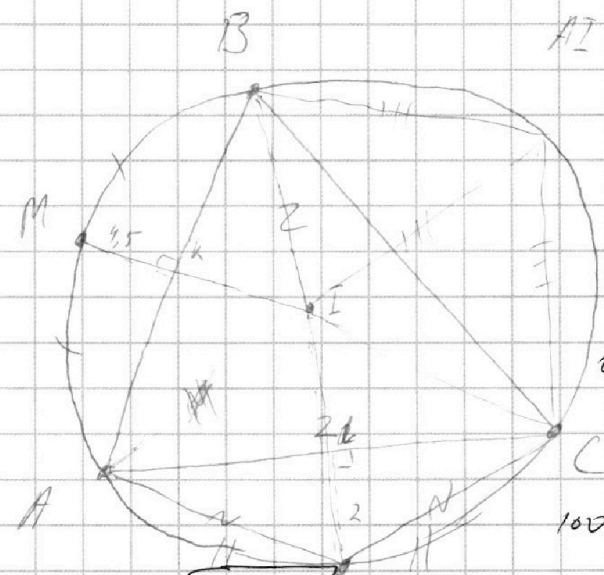
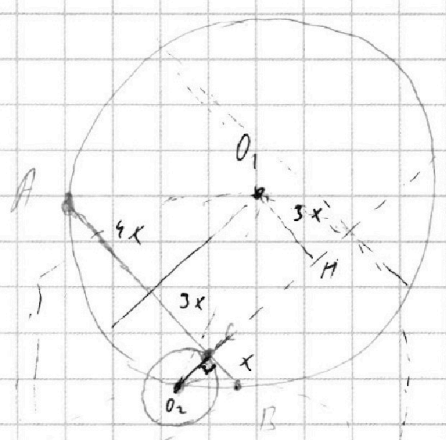
$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

$$y_2 + y_1 = k(x_2 + x_1) + 2b$$



$$2x_2 + y_2 = 12$$

$$y_2 = -2x_2 + 12$$



AI = 1

$$\begin{array}{r} 99 \\ 99 \\ \hline 198 \\ 2 \\ \hline 37 \\ 7 \\ \hline 148 \\ 2\sqrt{37} \end{array}$$

$$25 = 3x + O_1H^2$$

$$O_1H^2 = 25 - 3x$$

$$x + 1 = 2\sqrt{25 - 3x}$$

$$x^2 + 2x + 1 = 4 \cdot 25 - 12x$$

$$x^2 + 14x - 99 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 49 - (-99) = 148$$

$$25 - (O_1H - 1)^2 = 4x$$

$$25 - (\sqrt{25 - 3x} - 1)^2 = 4x$$

$$LN^2 = \frac{AN^2}{4} + \frac{AL^2}{4} + 4$$

$$IL = \sqrt{\frac{AL^2}{4} + 4} - 2$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{148}}{2} = 2\sqrt{37} - 7$$

$$25 - 25 + 3x - 1 + 2\sqrt{25 - 3x} = 4x$$

$$AI^2 = \frac{AL^2}{4} + (\sqrt{\frac{AN^2}{4} + 4} - 2)^2 = \frac{AN^2}{4} + \frac{AL^2}{4} + 4 + 4 - 4\sqrt{\frac{AN^2}{4} + 4}$$

$$BM^2 = \frac{AN^2}{4} + 4,5^2$$

$$IK = \sqrt{\frac{AN^2}{4} + 4,5^2} - 4,5 = 1,6$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$d_1 + \beta_1 = 14$$

$$\beta_1 + \gamma_1 = 17$$

$$\gamma_1 + d_2 = 20 \quad d_1 = 20 - d_2$$

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\gamma_1 - d_1 = 3$$

$$\gamma_2 - 20 + \beta_2 = 3$$

$$d_1 = 2 \quad d_2 = x$$

$$a = 2 \cdot 7 \cdot x$$

$$b = 2 \cdot 7 \cdot xy$$

$$c = 2 \cdot 7 \cdot z$$

$$d_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 26$$

$$\begin{cases} ab \geq 2 \cdot 7 \cdot 2 + 2 \cdot 11 \\ bc \geq 2 \cdot 7 \cdot 17 \\ ac \geq 2 \cdot 7 \cdot 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2^x \cdot 7 \\ b = 2^y \cdot 7 \cdot xy \\ c = 2^z \cdot 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a + 2 = 20 \\ 2a = 18 \\ a = 9 \end{cases}$$

$$a \cdot b = 2 \cdot 7 \cdot xy \geq 2 \cdot 7 \cdot 14$$

$$d_1 + \beta_1 \geq 14 \quad \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \quad d_2 + \beta_2 \geq 10$$

$$b \cdot c = 2 \cdot 7 \cdot yz \geq 2 \cdot 7 \cdot 17$$

$$\beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \quad \beta_2 + \gamma_2 \geq 17$$

$$d_1 + \gamma_1 \geq 20 \quad \gamma_1 - \beta_1 \geq 6$$

$$2d_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 \geq 57$$

$$21 + 18 = d_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 20 \Rightarrow 29 + 15 = d_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 24 \Rightarrow 54$$

$$2d_2 + 2\beta_2 + 2\gamma_2 \geq 64$$

$$d_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 32$$

$$abc \geq 2 \cdot 7 \cdot 14 \cdot 17 \cdot 20 \cdot xy \geq 2 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$$

Handwritten notes and calculations on the right side of the page.

$$\begin{cases} a + d + \beta = 20 \\ d = 17 \\ a = 3,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 + \beta_1 \geq 14 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \\ d_2 + \beta_2 \geq 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 - \gamma_1 \geq -3 \\ 2d_1 \geq 17 \\ d_1 \geq 8,5 \\ d_1 \geq 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 + \beta_1 \geq 14 \\ d_2 + \beta_2 \geq 10 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 17 \\ d_1 + \gamma_1 \geq 20 \\ d_2 + \gamma_2 \geq 32 \end{cases}$$

$$\beta_1 \geq 5,5 \quad \beta_1 \geq 6$$

$$d_2 + \gamma_2 \geq 32$$

$$\begin{cases} \gamma_1 - \beta_1 \geq 6 \\ 2\gamma_1 \geq 23 \\ \gamma_1 \geq 12 \end{cases}$$

$$25,5$$

$$24 \Rightarrow 26$$

$$64$$

$$32$$

$$26 \cdot 37$$

$$xy \geq 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a}{b}$$

— несократ. дробь

$\sqrt{2}$ НОД($a; b$) = 1 ($a, b \in \mathbb{N}$)

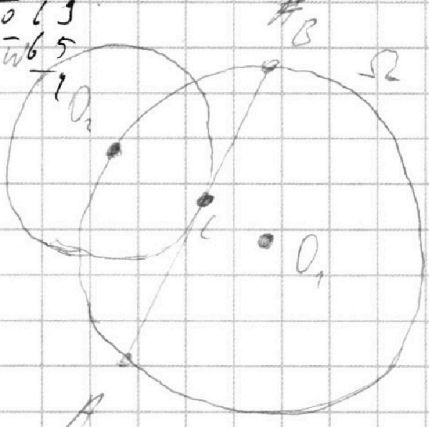
$$\begin{array}{r} 3 \\ 3 \\ 99 \\ 33 \\ \hline 147 \\ 447 \\ \hline 4851 \end{array}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$$

$$\begin{array}{r} 1369 \\ - 9 \\ \hline 46 \\ - 45 \\ \hline 19 \end{array}$$

наиб. m , такое, что $\#$
НОД($a+b; a^2 - 6ab + b^2$) = m
 $a^2 - 6ab + b^2 = (a+b) \cdot k$
 $(a+b)^2 - 8ab - k(a+b) = 0$
 $(a+b)(a+b-k) = 8ab$

$$\begin{array}{r} 1369 \\ - 13 \\ \hline 263 \\ - 265 \\ \hline \end{array}$$

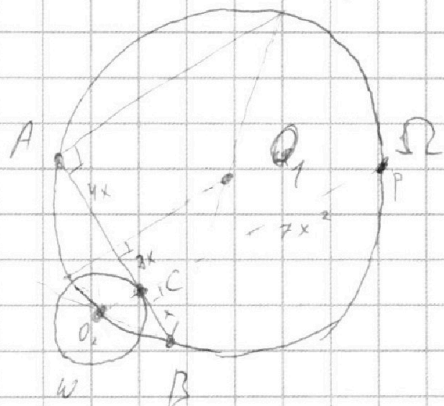


$$\begin{array}{r} 1369 \\ - 13 \\ \hline 263 \\ - 265 \\ \hline 50 \\ \hline 125 \end{array}$$

$$\frac{AC}{CB} = 7 \quad \underline{AB = 8BC}$$

$R = 5$

$$\begin{array}{r} 5976 \\ - 4 \\ \hline 11 \\ - 12 \\ \hline 27 \\ - 27 \\ \hline \end{array}$$



$$\frac{PC}{AC} = \frac{AC}{OC} \quad AC \cdot BC = O_2 C^2 = PC$$

$$x + 7x = O_2 C = PC$$

$$7x^2 = PC$$

$$x^2 + y^2 - 4 = ax - y + 10b$$

$$ax + 10b = 0$$

$$16a + 10b = 0$$

$$49x^4$$

$$49x^4 + 7 + 14x^2 = 100 - 36x^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1

Получаем, что $\alpha_1 \geq 9$ $\beta_1 \geq 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 \geq 15$. Тогда:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 15 \\ \beta_1 + \sigma_1 \geq 17 \\ \alpha_1 + \sigma_1 \geq 20 \end{cases} \Rightarrow 2\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\sigma_1 \geq 52$$

Также имеем $\alpha_1 + \sigma_1 - \alpha_1 - \beta_1 \geq 20 - 14$

$$\sigma_1 - \beta_1 \geq 6$$

$$\sigma_1 - \beta_1 + \beta_1 + \sigma_1 \geq 6 + 17 \quad 2\sigma_1 \geq 23$$

$$\sigma_1 \geq 12 \text{ (т.к. } \sigma_1 \text{ - целое неотрицат.)}$$

Получаем: $\alpha_1 + \sigma_1 \geq 9 + 12 = 21$

$$\beta_1 + \sigma_1 \geq 6 + 12 = 18$$

В итоге:

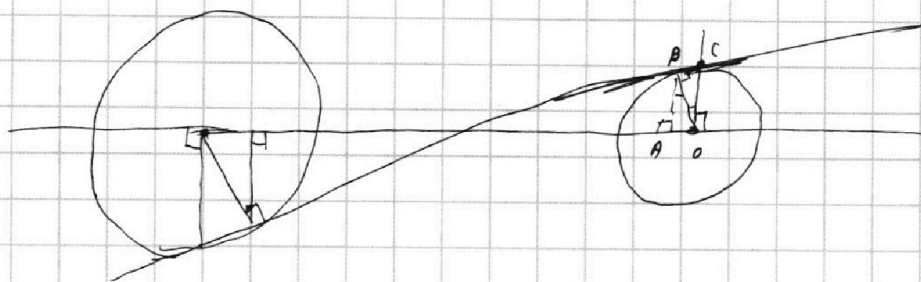
$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 15 \\ \beta_1 + \sigma_1 \geq 18 \\ \alpha_1 + \sigma_1 \geq 21 \end{cases} \Rightarrow 2\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\sigma_1 \geq 54$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \sigma_1 \geq 27$$

Т.е. в abc произведение чисел 2 в степени k и 7 в степени m ≥ 27

Тогда мин. abc = $2^{27} \cdot 7^{37}$

Пример: $a = 2^9 \cdot 7^{10}$ $b = 2^6$ $c = 2^{11} \cdot 7^2$



$$\frac{AB}{OB} = \frac{OB}{CO}$$

$$CO = \frac{OB^2}{AB}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N1

$$\begin{cases} ab : 2 \cdot 7^{14} \cdot 10 \\ bc : 2 \cdot 7^{17} \cdot 17 \\ ac : 2 \cdot 7^{20} \cdot 37 \end{cases}$$

Заметим, это есть
какое-то α число a, b или c
умноженное на простое $p \neq 2, 7$,
то можно убрать это p и

разложить на простые числа a, b, c ,
при этом на делимости α условия это никак не
повлияет, а произведение abc увеличится \Rightarrow

\Rightarrow при минимальном abc числа a, b и c содержат
и разложимые на простые только числа 2 и 7.

Тогда: $a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1} \cdot d_1$, $b = 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2} \cdot d_2$, $c = 2^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2} \cdot d_3$

d_1, d_2, d_3 - целые неотрицательные числа.

Тогда делимости α условия можно записать в виде:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 14 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 20 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 17 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 37 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\alpha_1 + \beta_1 - \beta_1 - \gamma_1 \geq 14 - 17$$

$$\alpha_1 - \gamma_1 \geq -3$$

$$\alpha_1 + \gamma_1 + \alpha_2 + \gamma_2 \geq 20 - 3$$

$$\Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 37, \text{ т.е.}$$

в abc будет число 7 в степени не меньше 37.

$$2\alpha_1 \geq 17 \quad \alpha_1 \geq 9 \text{ (т.к. } \alpha_1 \text{ - целое неотрицат.)}$$

Также: $\beta_1 + \gamma_1 - \alpha_1 - \gamma_1 \geq 17 - 20$; $\beta_1 - \alpha_1 \geq -3$

$$\beta_1 - \alpha_1 + \alpha_1 + \beta_2 \geq -3 + 14 \quad 2\beta_1 \geq 11 \quad \beta_1 \geq 6 \text{ (т.к. } \beta_1 \text{ - целое неотрицательное)}$$