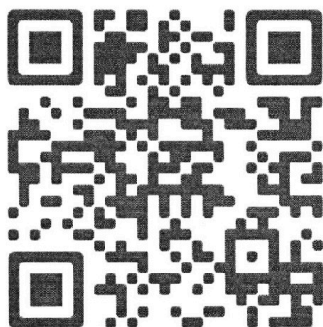




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть число A состоит из цифры a , т.е. $A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$.
Заметим, что 101 - простое, $A \cdot B \cdot C$ - натуральное число, при этом $A \cdot B \cdot C : 101 \Rightarrow$
 $\Rightarrow A \cdot B \cdot C : 101^2$; заметим, что $C \not\equiv 101$, т.к. $0 < C < 101$ (C - двузначное) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow B : 101$, т.к. $A \not\equiv 101^2$ ($a \leq 9$, $a \cdot 11 \leq 99$, т.е. $11a \not\equiv 101$) $\Rightarrow B$ это либо 101 , либо 202 ,
либо 303 , либо 404 , либо 505 , либо 606 , либо 707 , либо 808 , либо 909 , потому
что это все ~~возможные~~ трехзначные числа, кратные 101 . Но у числа B कोई цифра
~~никогда не равна~~ 1 в записи, и это только у $101 \Rightarrow B = 101$.
 $A : 11$, но $A \not\equiv 11^2$, т.к. $101 \not\equiv 11$, $a \not\equiv 11 \Rightarrow A \cdot B \cdot C : 11^2$, но $A \cdot B \not\equiv 11^2$, потому что $B \not\equiv 11 \Rightarrow$
 $\Rightarrow C : 11 \Rightarrow C = x \cdot 11$, где $x \leq 9$, $x \geq 1$, т.к. $C \leq 99 \Rightarrow C$ это либо 11 , либо 22 ,
либо 33 , либо 44 , либо 55 , либо 66 , либо 77 , либо 88 , либо $99 \Rightarrow C = 55$, т.к.
должна быть 5 в записи числа $\Rightarrow A \cdot B \cdot C = a \cdot 1111 \cdot 101 \cdot 55 = 5a \cdot 11^2 \cdot 101 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 5a$ - натуральное число $\Rightarrow a : 5 \Rightarrow a = 5$, т.к. a - цифра, $a \neq 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow A = 5555$, $B = 101$, $C = 55$.

Ответ: $(A; B; C) = (5555; 101; 55)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{y+x+1}{xy}, \text{ Известно, что если } x_0 = x-3, y_0 = y+3, \text{ то}$$

$$\frac{1}{x_0} + \frac{1}{y_0} + \frac{1}{x_0 y_0} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \Leftrightarrow \frac{x_0 + y_0 + 1}{x_0 y_0} = \frac{x + y + 1}{xy}$$

Заметим, что $x_0 + y_0 = (x-3) + (y+3) = x+y \Rightarrow x_0 + y_0 + 1 = x + y + 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x_0 + y_0 + 1}{x_0 y_0} = \frac{x + y + 1}{xy} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x_0 y_0 = xy \end{cases}, \text{ Но } x + y > 0 \Rightarrow x + y + 1 > 0 + 1 = 1 \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$\Rightarrow x + y + 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 y_0 = xy.$$

$$(x-3)(y+3) = xy$$

$$xy + 3x - 3y - 9 = xy$$

$$3x - 3y - 9 = 0$$

$$x = y + 3 \Rightarrow M = x^3 - y^3 - 9xy = (y+3)^3 - y^3 - 9(y+3)y =$$

$$= (y^3 + 9y^2 + 27y + 27) - y^3 - 9y^2 - 27y = 27. \text{ Заметим, что } y \neq 0 \Rightarrow x \neq 3 \Rightarrow$$

$$x_0 = x - 3 \neq 0. \text{ Также } y_0 = y + 3 > 0 \Rightarrow y_0 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0, y \neq 0, x_0 \neq 0, y_0 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = 27, \text{ т.к. } K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \text{ - имеет смысл.}$$

Ответ: 27.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cdot \cos \pi x.$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cdot \cos \pi y.$$

$$0 = (\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x) + (\cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi x \cdot \sin \pi y)$$

$$0 = \cos(2\pi x) + \cos(\pi x - \pi y) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{2\pi - (\pi x - \pi y)}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi x + (\pi x - \pi y)}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \\ \frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - \text{нечётное} \\ 3x - y - \text{нечётное} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ~~Ответ~~ подходят все пары (x, y) , для которых либо $x + y$ — нечётное, либо $3x - y$ — нечёт.

$$b) x, y - \text{целые} \Rightarrow \begin{cases} x + y - \text{нечёт.} \\ 3x - y - \text{нечёт} \end{cases} \Leftrightarrow x \text{ и } y \text{ разной чётности.}$$

Функция $\arccos$ ~~выражения~~ имеет значения от 0 до π включительно, при этом $\left|\frac{x}{4}\right| \leq 1, \left|\frac{y}{9}\right| \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 4, |y| \leq 9 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} \leq 2\pi \text{ (равенство при } \arccos \frac{x}{4} = \arccos \frac{y}{9} = \pi, \text{ т.е. } \frac{x}{4} = \frac{y}{9} = -1, \text{ т.е. } x = -4, y = -9 - \text{ единственное решение для равенства)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{количество пар целых } (x, y) \text{ это (кол-во чётных } x \text{ умножить на кол-во нечёт. } y) +$$

$$(\text{кол-во нечётных } x \text{ умножить на кол-во чётных } y) - 1 = 5 \cdot 10 + 4 \cdot 9 - 1 = 50 + 36 - 1 = 85.$$

Ответ: 85 пар.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего одиннадцатиклассников $X \Rightarrow$ вероятность получить билет у каждого ученика $\frac{4}{X}$. Вероятность и Пете, и Вась получить билет, это тоже самое, что вероятность Вась получить билет, если Петь уже получил, т.е.

$\frac{4}{X} \cdot \frac{4-1}{X-1} = \frac{12}{X(X-1)}$. Скажем, что учеников больше 4, потому что иначе у Пети и Вась изначально вероятность попасть на концерт равна 1, т.к. ~~близко~~ для каждого билет есть, но тогда в конце месяца их вероятность попасть на концерт равна 3,5, но вероятность не может быть больше 1.

Пусть y - кол-во билетов, на которые увеличилось в конце месяца, тогда вероятность и Пети, и Вась попасть на концерт это $\frac{4+y}{X} \cdot \frac{4+y-1}{X-1} = \frac{(y+4)(y+3)}{X(X-1)}$.

По условию: $\frac{12}{X(X-1)} \cdot 3,5 = \frac{(y+4)(y+3)}{X(X-1)}$, $X(X-1) \neq 0$, т.к. $X \neq 0$, $X \neq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 42 = y^2 + 7y + 12 \Rightarrow y^2 + 7y - 30 = 0$$

$$(y+10)(y-3) = 0 \Rightarrow y = -10 \text{ или } y = 3, \text{ но}$$

~~так как~~ $y = -10$ не подходит, т.к. билетов стало больше $\Rightarrow y = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в конце месяца ~~я~~ выделено было $4+3=7$ билетов.

Ответ: 7 билетов

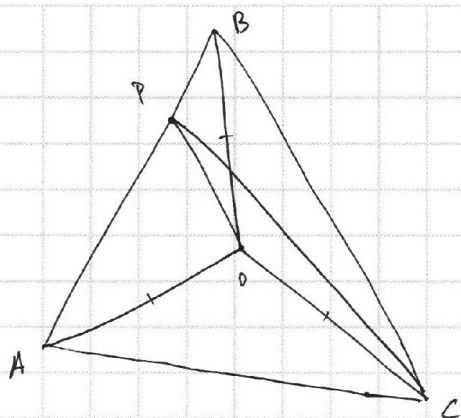


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: O - центр опис. окр. около $\triangle ABC$,
 P - пересечение опис. окр. $\triangle BOC$ и $\triangle AOB$.
 $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

Найти: $S_{\triangle ABC} = ?$

Решение:

$\triangle OBC$ - вписанный $\Rightarrow \angle POC = 180^\circ - \angle ABC$, $\angle OCB = \angle OPA$, тк. $\begin{cases} \angle OPA + \angle BPO = 180^\circ \\ \angle OCB + \angle BPO = 180^\circ \end{cases}$

$AO = OB$ - радиусы опис. окр. около $\triangle ABC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AO}{\sin \angle APO} = \frac{OB}{\sin \angle OCB} \Rightarrow$ радиусы окружностей, описанных около $\triangle OPA$ и $\triangle OBC$ равны $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AP}{\sin \angle POA} = \frac{PC}{\sin \angle POC}$; $\angle OCB = \angle OBC$, тк. $\triangle OBC$ - равносторонний (OB, OC - радиусы ω_1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OPA = \angle OCB = \angle OBC$. $\triangle AOB$ - равносторонний, тк. $AO = OB \Rightarrow \angle PAO = \angle ABO \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle APO = \angle PAO = \angle ABO = \angle OBC = \angle ABC \Rightarrow \angle POA = 180^\circ - \angle APO - \angle PAO = 180^\circ - \angle ABC = \angle POC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle POA = \angle POC \Rightarrow \sin \angle POA = \sin \angle POC \Rightarrow AP = PC$, тк. $\frac{AP}{\sin \angle POA} = \frac{PC}{\sin \angle POC} \Rightarrow$

$\Rightarrow AP = PC = \frac{16}{5} = 3,2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle APC$:

по т. косинусов: $AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2 \cdot AP \cdot PC \cdot \cos \angle APC \Rightarrow \cos \angle APC = \frac{AP^2 + PC^2 - AC^2}{2 \cdot AP \cdot PC} =$

$= \frac{10,24 + 10,24 - 16}{2 \cdot 10,24} = \frac{4,48}{20,48} = \frac{448}{2048} = \frac{7}{32} \Rightarrow \cos(180^\circ - \angle APC) = -\frac{7}{32} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos \angle BPC = -\frac{7}{32} \Rightarrow \triangle BPC$:

по т. косинусов:

$BC^2 = BP^2 + PC^2 - 2 \cdot BP \cdot PC \cdot \cos \angle BPC$

$BC^2 = 4 + 10,24 - 2 \cdot 2 \cdot 3,2 \cdot \left(-\frac{7}{32}\right) = 17,04 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по т. косинусов для $\triangle ABC$:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC \Rightarrow \cos \angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{24,04 + 16 - 17,04}{41,6} =$

$= \frac{26}{41,6} = \frac{260}{416} = \frac{65}{104}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos \angle BAC = \frac{65}{104} \Rightarrow \sin \angle BAC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAC} = \sqrt{\frac{10816 - 4225}{10816}} = \frac{\sqrt{6591}}{104} =$$
$$= \frac{13\sqrt{39}}{104}, \text{ тк } \angle BAC - \text{острый, } \sin$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC}{2} = \frac{5,2 \cdot 4 \cdot \frac{13\sqrt{39}}{104}}{2} = \frac{\frac{26}{5} \cdot 4 \cdot \frac{13\sqrt{39}}{104}}{2} = \frac{65\sqrt{39}}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{Ответ: } S_{\triangle ABC} = \frac{65\sqrt{39}}{2}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Поймём, что в любую правильную пирамиду можно вписать шар, который будет касаться всех граней: центр сферы будет лежать в центре симметрии на перпендикуляре из вершины пирамиды на плоскость основания, причём в вершине пирамиды расстояние от центра шара до плоскости основания больше 0, а до боковых граней равно нулю, а в центре правильной n -угольной в плоскости основания найдётся $\Rightarrow \Rightarrow$ где-то на перпендикуляре найдётся точка, равноудалённая от всех граней $\Rightarrow \Rightarrow$ она и будет центром шара.

Центр шара, который касается всех рёбер также будет лежать на перпендикуляре из вершины на плоскость основания пирамиды. В вершине пирамиды расстояние до рёбер основания не 0, а до боковых рёбер 0. ~~Центр шара находится на перпендикуляре из вершины пирамиды на плоскость основания, причём в вершине пирамиды расстояние до рёбер основания не 0, а до боковых рёбер 0.~~ Восстановим перпендикуляр в вершине пирамиды плоскости основания в плоскости биссектрисы двугранного угла между плоскостями соседних боковых граней. Они пересекаются где-то на перпендикуляре пирамиды из вершины и основанием, причём эта точка не лежит в плоскости основания. Но тогда в треугольнике из нашей новой точки и углов соседним в основании, расстояние от новой точки до рёбра основания это высота треугольника, а расстояние от новой точки до вершин основания это смежные стороны треугольника $\Rightarrow$ расстояние от точки до боковых рёбер больше чем до рёбер основания $\Rightarrow \Rightarrow$ где-то на ~~высоте~~ отрезке из вершины пирамиды и новой точки будет лежать другая точка, равноудалённая от ~~рёбра~~ всех рёбер пирамиды $\Rightarrow \Rightarrow$ под условие задачи попадает любая правильная усечённая пирамида $\Rightarrow \Rightarrow$ угол между боковым ребром и плоскостью основания $\in (0^\circ; 90^\circ)$.

Ответ: любой угол $\in (0^\circ; 90^\circ)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

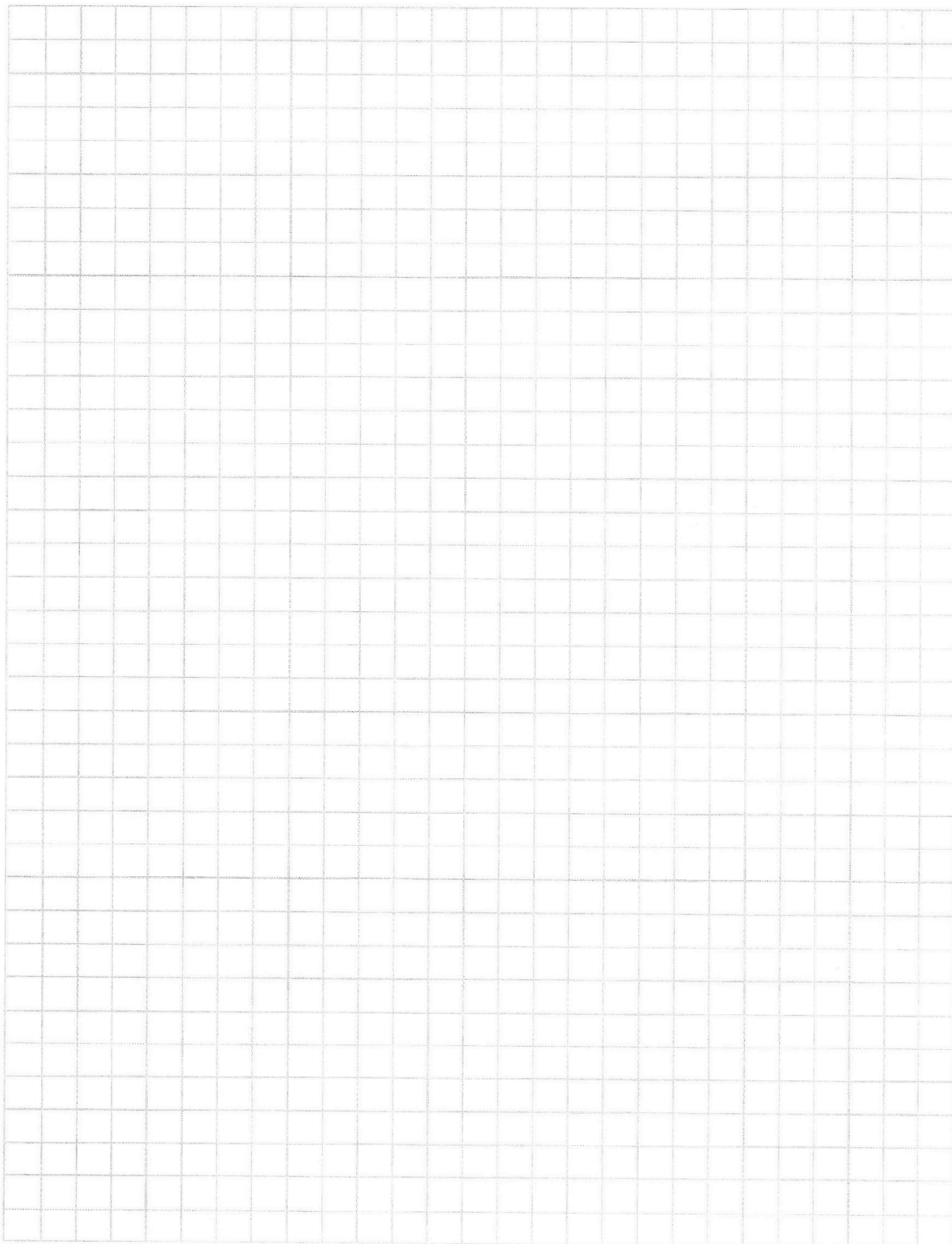
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



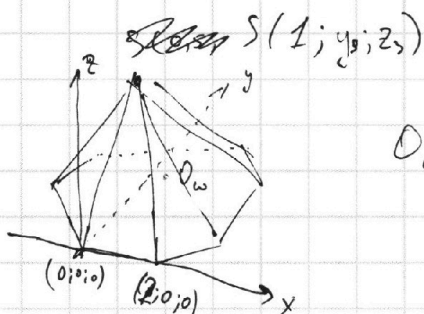
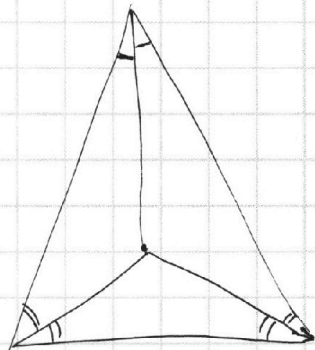


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$D_w(1; y_s; z_s)$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$0 + 0 + 0 + D = 0$$

$$D = 0$$

$$2x + 0 + 0 + 0 = 0$$

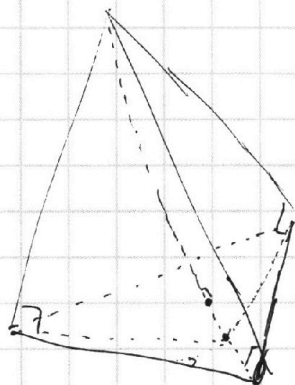
$$A = 0$$

$$A \cdot 1 + B \cdot y_s + C \cdot z_s + 0 = 0$$

$$B \cdot y_s + C \cdot z_s = 0$$

$$B = -\frac{C \cdot z_s}{y_s}$$

$$\frac{|A \cdot 1 + B \cdot y_s + C \cdot z_s + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = y_s$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

☐

2

☐

3

☐

4

☐

5

☐

6

☐

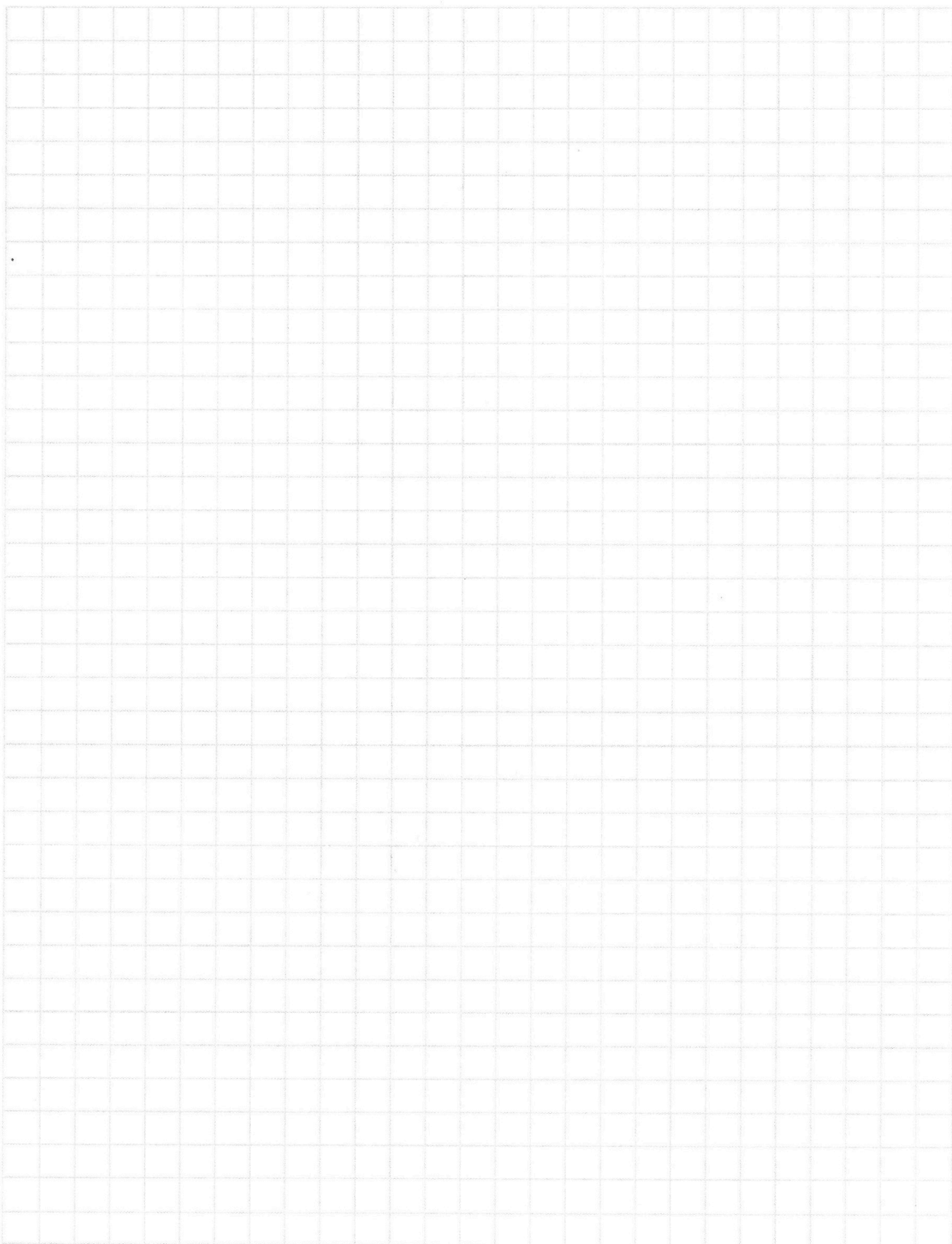
7

☐

СТРАНИЦА

__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~12~~ $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$
 $17,04 = 27,04 + 16 - 2 \cdot 5,2 \cdot 4 \cdot \cos \angle BAC$
 $41,6 \cdot \cos \angle BAC = 26$
 $\cos \angle BAC = \frac{26}{41,6} = \frac{260}{416} = \frac{65}{104} \Rightarrow \sin \angle BAC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAC} = \frac{\sqrt{6591}}{104} = \frac{13\sqrt{39}}{104}$

$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC}{2} = \frac{5,2 \cdot 4 \cdot \frac{13\sqrt{39}}{104}}{2} = \frac{26 \cdot 4 \cdot \frac{13\sqrt{39}}{104}}{2} = \frac{65\sqrt{39}}{2}$

$\frac{C_x^3}{C_{x+n}^4} = \frac{C_x^4}{C_{x+n}^4} \Rightarrow C_x^4 = \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}$
 $C_x^7 = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}$
 $\frac{4!}{3!(x-1)} = \frac{4}{x-3}$

$(\sin \pi x - \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$
 $\sin^2 \pi x - \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$
 $0 = (\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x) + (\cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi x \cdot \sin \pi y)$
 $0 = \cos(2\pi x) + \cos(\pi x - \pi y) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi x - 2\pi x + \pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi x + \pi x - \pi y}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) = 0$
 $\cos z = 0, z = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $\left. \begin{aligned} \pi \cdot \left(\frac{x+y}{2}\right) &= \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \pi \cdot \left(\frac{3x-y}{2}\right) &= \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right\}$
 $\frac{x+y}{2} = \frac{2k+1}{2}, k \in \mathbb{Z}, \frac{3x-y}{2} = \frac{2k+1}{2}, k \in \mathbb{Z}, x \text{ и } y \text{ разные числа.}$
 $x=0, y=1. (\sin 0 - \sin \pi) \cdot \sin 0 = (\cos 0 + \cos \pi) \cdot \cos 0.$
 $(0 - 0) \cdot 0 = (1 + (-1)) \cdot 1$
 $0 = 0.$

~~12~~ $x+y$ - нечётное
 $3x-y$ - чётное.
 $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$
 $x \in [-4; 4]$
 $y \in [-9; 9]$
 Если $x = -4$:
 $y = -7, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9$ - 9 штук.
 Если $x = 2$, то $y = -5, 5$ - 10 штук.
 Если $x \neq 2$:
 $y = -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8$ - 9 штук.
 $4 \cdot 10 + 4 \cdot 9 + 9 = 40 + 36 + 9 = 85.$

$\frac{x}{4} = -1 \text{ и } \frac{y}{9} = -1.$
 Нет.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101 \quad AB \cdot C = k^2 \quad B = \{101, 202, 303, \dots, 909\} \Rightarrow B = 101.$$

$$C : 11 \Rightarrow C = \{11, 22, \dots, 99\} \Rightarrow C = 55.$$

$$A \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 55 = a \cdot 5 \cdot (11)^2 \cdot (101)^2 \Rightarrow a = 5.$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{y+x+1}{xy}, \text{ если } x_0 = x-3, y_0 = y+3, \text{ то } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{y_0} + \frac{1}{x_0 y_0}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x_0+y_0+1}{x_0 y_0}, \quad x \neq 0, y \neq 0, x_0 \neq 0, y_0 \neq 0, x \neq 3, y \neq -3.$$

$$\begin{cases} x+y+1=0 \\ xy=(x-y)(y+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-1 \\ xy = y^2+3y-3y+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-1 \\ 3x-3y+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-1 \\ x=y+3 \end{cases}$$

$$M = (y+3)^2 \cdot y^2 - 9(y+3)y = y^2+3(y^2+3)+3(y^2+3)+2y \cdot y^2 - 9(y^2+3y) = y^2+9y^2+24y+9 - y^2-9y^2-24y = 9.$$

Пусть одиннадцатиклассников $x \rightarrow$ в начале месяца вернулись домой было $\frac{4}{x}$

в начале $\frac{16}{x^2}$, в конце $\frac{(4+y)^2}{x^2}$, где y - кол-во д.т. бывших.

$$\frac{16 \cdot 3,5}{x^2} = \frac{(4+y)^2}{x^2}$$

$$16 \cdot 3,5 = 16 + 8y + y^2 \Rightarrow y^2 + 8y - 40 = 0$$

$$16 \cdot \frac{7}{2} = 8 \cdot 5 = 40$$

$$64 + 4 \cdot 40 + 224 = 32 \cdot (2+5) = 32 \cdot 7$$

$$\frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1} \cdot 3,5 = \frac{4+y}{x} \cdot \frac{3y}{x-1} \Rightarrow 42 = y^2 + 7y + 12 \Rightarrow y^2 + 7y - 30 = 0$$

$$D = 49 - 7 \cdot (-30) = 169$$

$$y = \frac{-7 \pm \sqrt{169}}{2}$$

$$\frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1} \cdot 3,5 = 1 \Rightarrow \frac{12}{x(x-1)} = 1 \Rightarrow x(x-1) = 12 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0$$

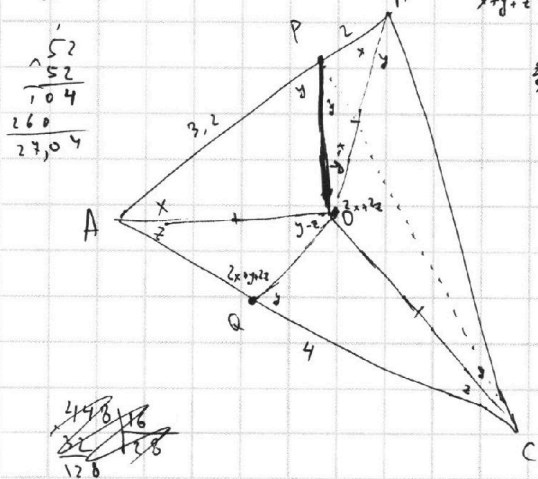
$$y = \frac{-7 \pm 13}{2} \Rightarrow y = \begin{cases} 3 \\ -10 \end{cases}$$

$$(x-4)(x+3) = 0 \quad x = 4, \quad x = -3.$$

$$\begin{array}{r} 33 \\ -21 \\ \hline 12 \\ 13 \\ \hline 1023 \end{array}$$

$$AP = \frac{16}{5}$$

$$BP = 2, \quad AC = 4$$



$$x+y+z=90^\circ$$

$$2x+2y+2z=180^\circ$$

$$\angle POA = 180 - (x+y)$$

$$\angle POC = 180 - (x+y)$$

$$BC = 3,2$$

$$6,2 = \frac{62}{10} \cdot \frac{66}{10} = \frac{66}{10}$$

$$= \frac{31}{5} \cdot \frac{33}{5} = \frac{1023}{25}$$

$$PC = 3,2$$

$$\triangle APC:$$

$$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2 \cdot AP \cdot PC \cdot \cos \angle APC$$

$$16 = 10,24 + 10,24 - 2 \cdot 10,24 \cdot \cos \angle APC$$

$$\cos \angle APC = \frac{4,48}{20,48} = \frac{448}{2048} = \frac{7}{32} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC^2 = PB^2 + PC^2 - 2 \cdot PB \cdot PC \cdot \cos \angle BPC = PB^2 + PC^2 + 2 \cdot PB \cdot PC \cdot \cos \angle APC =$$

$$= 4 + 10,24 + 2 \cdot 3,2 \cdot 2 \cdot \frac{7}{32} = 4 + 10,24 + \frac{28}{10} = 14,04$$

$$4 + 10,24 + 2,8$$

$$BC^2 = 14,04$$

$$\begin{array}{r} 52 \\ \wedge 52 \\ 104 \\ 160 \\ \hline 2304 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 448 \\ 32 \\ \hline 128 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 448 \\ 32 \\ \hline 128 \end{array}$$

$$64 \cdot 7$$

$$2^6 \cdot 7$$

$$2^{11}$$