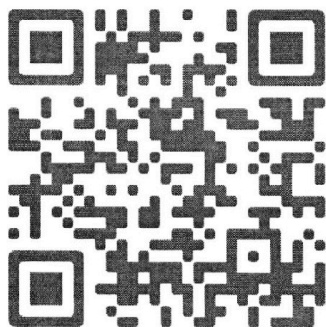




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Итак, необходимо: $B = 606$
 $C = 33$

$$\frac{11 \cdot 101 \cdot a \cdot 101 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 11}{6 \cdot 3} = n^2$$

$$6 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$a : 2$ тоже необходимо

$a = 2$ — ок,

$a = 4$ — не ок, ст. вх. 2 равна 3

$a = 6$ — не ок, ст. вх. 3 равна 3

$a = 8$ — ок, ст. вх. 2 равна 4

$a = 0$ — не ок

Итак, необх. $\begin{cases} a = 2 \\ a = 8 \end{cases}$, но ~~оба~~ оба подх, видно из разложения

$$A = 2222 \vee A = 8888$$

Всего 2 тройки чисел

Ответ: $(2222, 606, 33)$ и $(8888, 606, 33)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача N1

$$A = \overline{aaaa}, B = \overline{bcd} \begin{cases} b=6 \\ c=6 \\ d=6 \end{cases}, C = \overline{ef} \begin{cases} e=3 \\ f=3 \end{cases}$$

$$\exists n \in \mathbb{N} : ABC = n^2$$

$$A : 11, A : a \quad (\overline{A = \overline{aaaa}}) \quad (A = \overline{aaa} \cdot 11)$$

$$11 \cdot \overline{aaa} \cdot \overline{bcd} \cdot \overline{ef} = n^2 \Rightarrow \begin{cases} \overline{ef} : 11 & 1 \text{ сл.} \\ \overline{bcd} : 11 & 2 \text{ сл.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ сл.} & \overline{3f} : 11 \Rightarrow f=3 \\ & \overline{e3} : 11 \Rightarrow e=3 \end{cases} \quad \text{т.е. } \overline{ef} = 33$$

$$\overline{aaa} = 101 \cdot a, \quad 101 - \text{простое}$$

$$11 \cdot 101 \cdot a \cdot \overline{bcd} \cdot \overline{ef} = n^2$$

$$\Rightarrow \overline{bcd} : 101 \Rightarrow \overline{bcd} = \overline{hoh} = h \cdot 101 \quad (h \in \{1, 9\})$$

$$\text{Итак, 1 сл.: } \overline{ef} = 33$$

$$11 \cdot 101 \cdot a \cdot 33 \cdot \overline{bcd} = n^2$$

$$\text{Тогда } 11 \cdot a \cdot 101 \cdot h \cdot 101 \cdot \overline{ef} = n^2$$

a, h - цифры (не 0)

$\Rightarrow \overline{ef} : 11$, т.е. $a, h \not\equiv 11$ (мы руководствуемся тем, что степени вх. простых чисел в точный квадрат четны)

$$\text{но } \begin{cases} e=3 \vee f=3 \Rightarrow \overline{ef} = 33 \\ \overline{ef} : 11 \end{cases}$$

$$\text{ещё в } \overline{bcd} \text{ есть } 6 \Rightarrow \overline{bcd} = \overline{606}, \text{ т.е. } h=6$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M = (p+1)^3 - (p-1)^3 - 6(p+1)(p-1) \wedge p > 1$$

$$M = (p-4)^3 - (p-1)^3 - 6(-p-4)(p-1) \wedge p \neq -4 \wedge p < -4 \wedge p > 1$$

~~171~~
~~171~~ но нижний случай невозможен, т.к. $p < -4 \wedge p > 1$

$$\begin{cases} M = p^3 + 3p^2 + 3p + 1 - p^3 + 3p^2 - 3p + 1 - 6p^2 + 6 \\ p > 1 \end{cases}$$

$E_M - ?$

$$\begin{cases} M = 6p^2 - 6p^2 + 8 = 8 \\ p > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} M = 8 \\ p > 1 \end{cases}$$

~~3~~ ~~x, y~~ $p = 2, t = 2 \Rightarrow x = 3, y = 1$

$$\underbrace{\frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3}}_{k(x=3, y=1)} = \underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{5}{3}}_{k'(x=3, y=1)} - ok$$

$$M = 27 - 1 - 6 \cdot 3 \cdot 1 = 26 - 18 = 8$$

Итак, $M = 8$ - необх., но $M = 8$ при $(x, y) = (3, 1)$ оно достигается, при этом условие на $x, y > 0$ и на $k = k'$ вып. $\Rightarrow 8$ - ответ (единств.)

Ответ: 8.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача N2

$$x, y > 0 \quad K \quad K'$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} \right) = \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)} \right)$$
~~$$\left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)} \right)$$~~

$$M = x^3 - y^3 - 6xy = ?$$

3. n. $x = t+1, y = p-1$

$$\frac{1}{t+1} + \frac{1}{p-1} + \frac{5}{(t+1)(p-1)} = \frac{1}{t-1} + \frac{1}{p+1} + \frac{5}{(t-1)(p+1)}$$

$$- \frac{2}{t^2-1} + \frac{2}{p^2-1} = 5 \cdot \frac{(t+1)(p-1) - (t-1)(p+1)}{(t^2-1)(p^2-1)}$$

$$5 \cdot \frac{tp + p - t - 1 - tp + p - t + 1}{(t^2-1)(p^2-1)} - \frac{2}{p^2-1} + \frac{2}{t^2-1} = 0$$

$$\frac{20p - 10t - 2(t^2-1) + 2(p^2-1)}{(t^2-1)(p^2-1)} = 0$$

$$\frac{-2t^2 - 10pt + 2p^2 + 10p}{(t^2-1)(p^2-1)} = 0 \quad (*) \quad \boxed{t^2, p^2 \neq 1, \text{ т.к. } x > 0}$$

$$M = (t+1)^3 - (p-1)^3 - 6(t+1)(p-1) =$$

$$= \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1 - p^3 + 3p^2 - 3p + 1 - 6tp - 6p + 6t + 6}{1} =$$

$$= t^3 + 3t^2 + 9t - p^3 - 3p^2 - 9p - 6tp + 8$$

но $\begin{cases} p^2 + 5p = t^2 + 5t \\ t^2 \neq 1 \wedge p^2 \neq 1 \end{cases}$

$$\boxed{p^2 + 5p = t^2 + 5t}$$

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} p^2 + 5p = t^2 + 5t \\ t^2 \neq 1 \wedge p^2 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = p \neq -1, \text{ т.к. } x > 0 \\ t = -p - 5 \\ t^2, p^2 \neq 1 \end{cases}$$

еще усл. на $x, y > 0$ $\begin{cases} t+1 > 0 \rightarrow t \neq -1 \\ p-1 > 0 \rightarrow p \neq 1 \end{cases}$ - ok

Посчитаем M с учетом $t > -1, p > 1, t \neq -1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

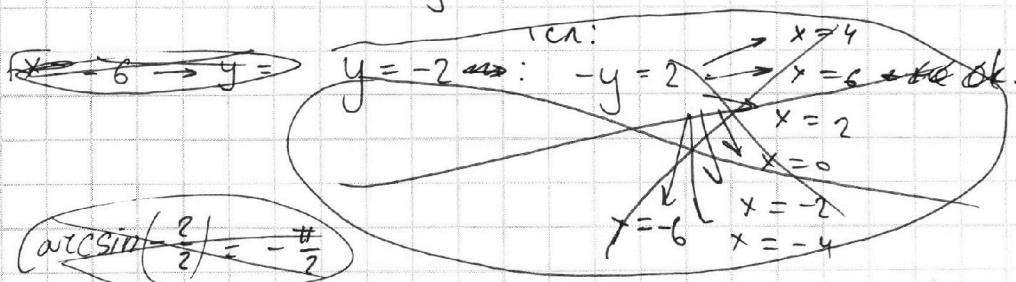
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$8) \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} \leq \pi$$

$$\text{ОДЗ: } \frac{x}{6} \in [-1; 1], \frac{y}{2} \in [-1; 1]$$

$$x \in [-6; 6], y \in [-2; 2]$$

$$(*) \begin{cases} x = -y - 2k & \text{1 сл.} \\ x = \frac{y - 2k}{3} & \text{2 сл.} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$



$$\text{но } E_{\arcsin t} = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \text{не погх. только}$$

$$\text{те пары, где } \arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2}, \arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x}{6} = 1, \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow x = 6, y = 2$$

Итак, из ОДЗ, уг. (*) погх. все пары, кроме (6; 2)

$$x = -6 \rightarrow \begin{cases} y = 6 + 2k \\ y = -18 + 2k \end{cases}, \text{но } y \in [-2; 2] \Rightarrow 3 \text{ пары} \\ (k \in \mathbb{Z}) \quad (-6; -2), (-6; 0), (-6; 2)$$

в силу (Δ) чётность y = чётность x, но из ОДЗ 3 чёт. y: -2, 0, 2

2 неч. y: -1, 1

~~2 пары~~

для $x \in \{-6, -4, -2, 0, 2, 4\}$ 3 пары
для $x = 6$ 2 пары (нельзя y = 2)
для $x \in \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$ 2 пары



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Итого пар

$$6 \cdot 3 + 2 + 6 \cdot 2 = 18 + 2 + 12 = 32$$

Ответ: а) $\{(x; -x + 2k) \mid x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\} \cup$
 $\{(x; 3x + 2k) \mid x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\}$

б) 32



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача N3

a) $(x; y) - ?$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x - \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x = 0$$

$$(\sin \pi x - \cos \pi x)(\sin \pi x + \cos \pi x) + \cos(\pi y - \pi x) = 0$$

$$\sqrt{2} \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{2} \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos(\pi y - \pi x) = 0$$

3-н. $\pi x = \alpha, \pi y = \beta$

$$\sin^2 \alpha + \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \alpha - \cos \alpha \cos \beta \quad / + \sin^2 \alpha$$

$$2\sin^2 \alpha + \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta = 1$$

$$2\sin^2 \alpha + \cos(\alpha - \beta) = 1$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$1 - \cos 2\alpha + \cos(\alpha - \beta) = 1$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos 2\alpha$$

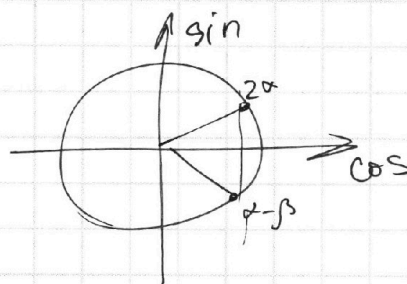
$$\begin{cases} \alpha - \beta = 2\alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha - \beta = -2\alpha + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \text{в плане множеств } \alpha, \beta$$

$$\begin{cases} \beta = -\alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \beta = 3\alpha + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi y = -\pi x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \pi y = 3\pi x + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (\Delta) \quad \begin{cases} y = -x + 2k \\ y = 3x + 2k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$U_{k \in \mathbb{Z}}, (x, y) \in \{(x, -x + 2k) \mid x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\} \cup$$

$$\cup \{(x, 3x + 2k) \mid x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4
и одинадцатиклассников

$$P_1 = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1} = \frac{12}{n(n-1)}$$

A - Вася попал в лос., B - Петя

P_1 - вер-ть в лос. месяца.

X - оказалось выделено. X - ?

P_2 - вер-ть или обоим попасть в конце мес.

$$P_2 = \frac{x}{n} \cdot \frac{x-1}{n-1} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$$

$$P_2 = 6P_1 : \frac{x(x-1)}{n(n-1)} = \frac{6 \cdot 12}{n(n-1)}$$

$$n \in \mathbb{N}, n > 1$$

$$x^2 - x = 6 \cdot 12$$

$$x^2 - x - 6 \cdot 12 = 0 \quad D = 1 + 4 \cdot 6 \cdot 12 = 1 + 288 = 289 = 17^2$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 17}{2} \quad \text{с "-" - это н.к.}$$

$$x = \frac{1+17}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

Ответ: 9.



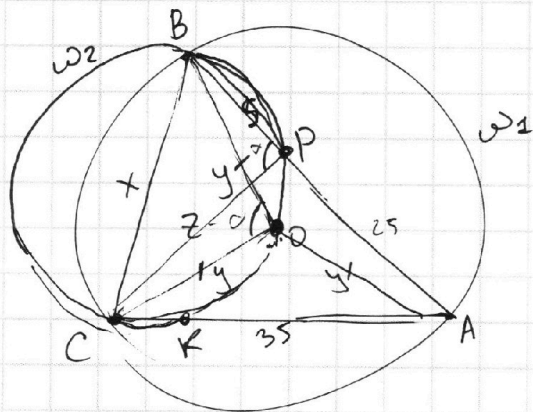
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

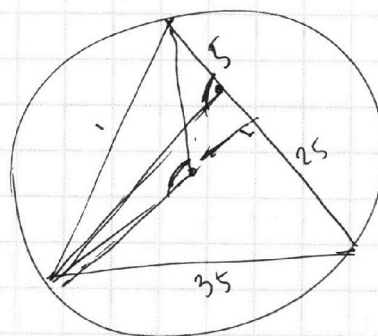
Задача N5



$S_{ABC} = ?$

$AP = 25$
 $BP = 5$
 $AC = 35$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 35 \\ \hline 175 \\ + 1050 \\ \hline 1225 \end{array}$$

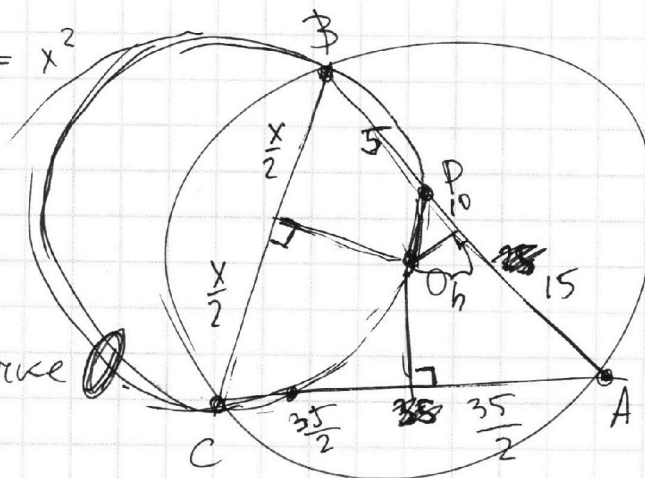


$$\deg(A, \omega_2) = 25 \cdot 30 = 750$$

$$x^2 = 2y^2(1 - \cos \alpha)$$

$$5^2 + z^2 = 2 \cdot 5 \cdot z \cos \alpha = x^2$$

Принимая
инверсию
с центром в точке





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

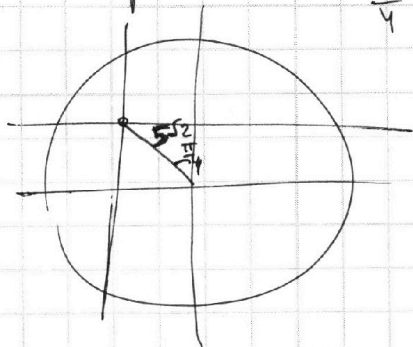
$$\frac{d(d_1+d_2)}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{\cos\alpha \sin\alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2\alpha}} = \frac{\cos\alpha \sin\alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \cos^2\alpha}}$$

или ~~или~~ $\begin{cases} \cos\alpha = 0 \\ \sin\alpha = 0 \end{cases}$ — при обоих 1 и т. же

периметр, равный $13\pi + 26 + \sqrt{119}$

почему мы нашли max?

посмотрим $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$ тогда $M = M_2$



$$h = 5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5$$

$$\begin{aligned} d_1+d_2 &= 2 \cdot 2 \sqrt{R^2 - 5^2} = 4 \sqrt{(13-5)(13+5)} \\ &= 4 \sqrt{8 \cdot 18} = 4 \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9} = 4 \cdot 4 \cdot 3 = \\ &= 48 \end{aligned}$$

$$M_2 = 13\pi + 48$$

$$22 > \sqrt{119} \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow M_1 \neq \max M.$

$$\text{Тогда 2 сл.: } \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2 \cos^2\alpha}}$$

$$R^2 - r^2 \sin^2\alpha = R^2 - r^2 \cos^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = \cos^2\alpha$$

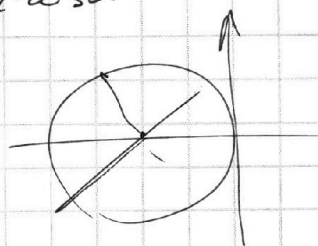
$$\tan^2\alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan\alpha = 1 \\ \tan\alpha = -1 \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$

Тогда мы $M_2 > M_1$ и то, что

$$\frac{dM}{d\alpha} = 0 \text{ даёт 1 сл. и 2 сл. (1 сл. } \rightarrow M_1, 2 \text{ сл. } \rightarrow M_2)$$



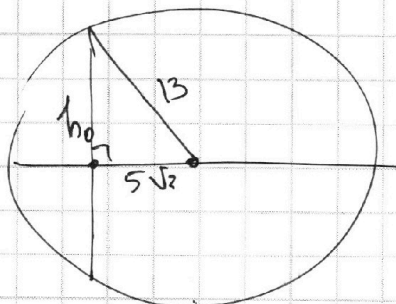


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$h_0^2 = 13^2 - 25 \cdot 2 = 169 - 50 = 119$$

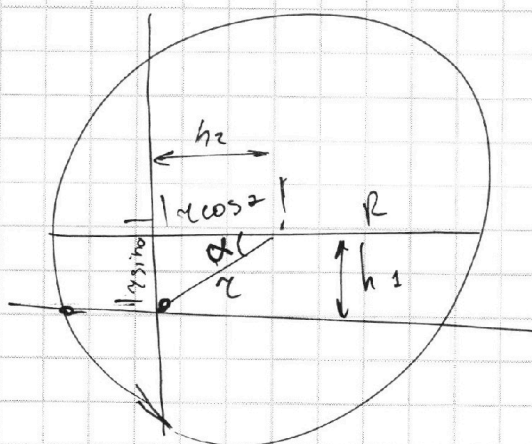
$$h_0 = \sqrt{119}$$

$$M_1 = 13\pi + 26 + 2\sqrt{119}$$

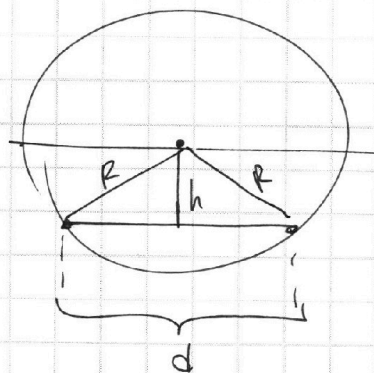
~~Ответ: $M = 13\pi + 26 + 2\sqrt{119}$
 $\alpha \in \mathbb{R}$~~

$$R = 13$$

$$r = 5\sqrt{2}$$



Найдем d , если дано h :



$$d = 2\sqrt{R^2 - h^2}$$

$$h_1 = r \sin \alpha, \quad h_2 = r \cos \alpha$$

$$d_1 + d_2 = 2\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} + 2\sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha}$$

$$\frac{d(d_1 + d_2)}{d\alpha} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-r^2 \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{+r^2 \cdot 2 \cos \alpha \sin \alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{при } \alpha = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \quad \min M$$

$$\text{при } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \quad \max M$$

Итак,

$$\text{Ответ: } M = 13\pi + 48$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача N6

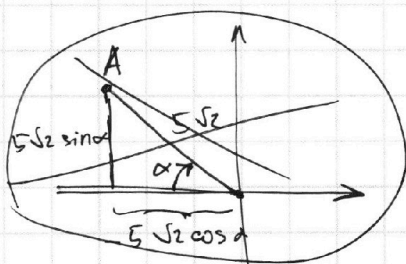
$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 13^2 & (2) \end{cases}$$

$\Gamma(2)$ - ~~окр.~~ круг рад. 13 с центром в $O(0;0)$

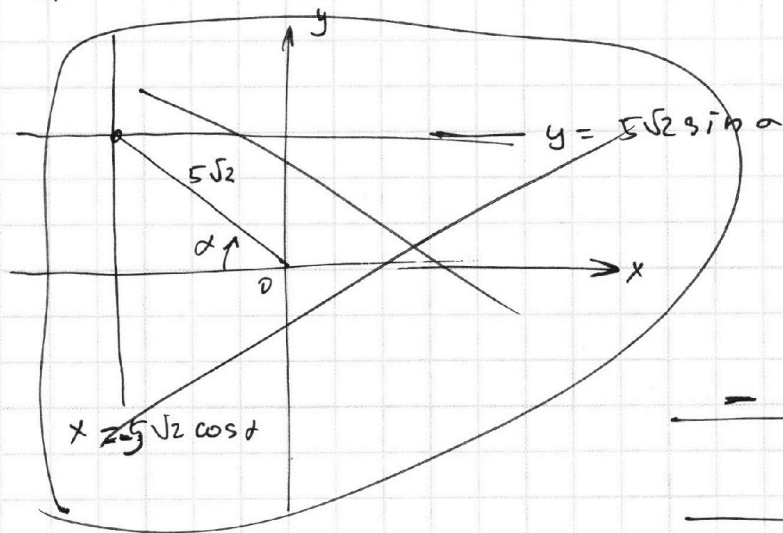
решим (1) методом областей

ОДЗ: $x, y \in \mathbb{R}$

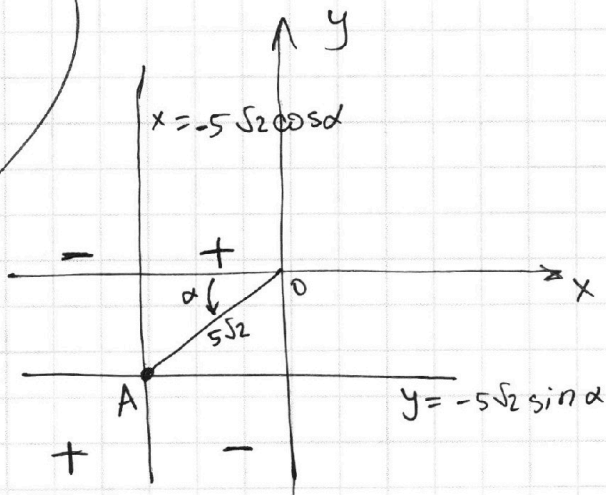
$$\begin{cases} x + 5\sqrt{2} \cos \alpha = 0 \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -5\sqrt{2} \cos \alpha & (3) \\ y = -5\sqrt{2} \sin \alpha & (4) \end{cases}$$



$\Gamma(3), \Gamma(4)$ - верт. и гор. прямые, прох. к/з A, где $|\vec{OA}| = 5\sqrt{2}$, $\vec{OA}$ отложен от $-\vec{Ox}$ на α ~~на α/π~~ против ч/с



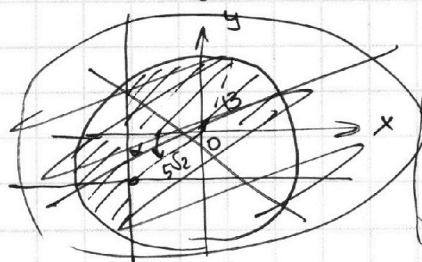
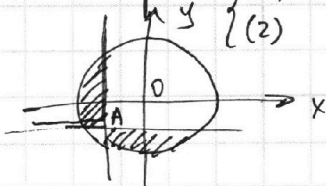
$5\sqrt{2} < 13$, кстати



в 4 полученных областях знаки f: $\begin{matrix} - & + \\ + & - \end{matrix}$

~~на~~ реш. (1) - это области, где "-" (вкл. прямые)

Тогда реш. $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$:



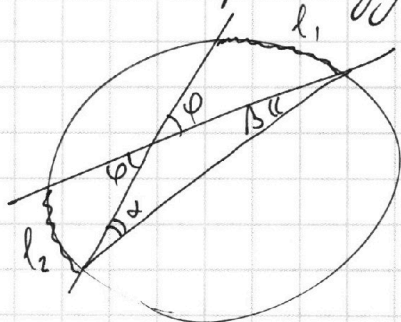
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
 2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть угол вел. φ и вертик. ему отсекают от некот. окр. 2 дуги: (дуги l_1 и l_2)



$$\check{l}_1 = 2\alpha, \check{l}_2 = 2\beta$$

$$\varphi = \alpha + \beta$$

$$\check{l}_1 + \check{l}_2 = 2\alpha + 2\beta = 2\varphi$$

независ.
от α .

В нашем случае $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \check{g}_1 + \check{g}_2 = \pi \Rightarrow$
 суммарная длина дуг в $\varphi = \pi R = 13\pi$
 ($R=13$)

независ.
от α .

$M = 13\pi + d_1 + d_2$, где d_1, d_2 — длины отрезков прямых (3), (4), сог-ная в φ .

$$d_1, d_2 \leq 2R = 26, \text{ т.к. } |хорда| \leq |диаметр|$$

$$\Rightarrow \max d_1 + d_2 = 26 + 26 = 52$$

$\max d_1 + d_2$ достигается, когда оба отрезка явл. диаметрами $\odot(O, 13)$

Вообще, $\exists R_0(\varphi(\alpha_1)) =$ Вообще, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\exists$ поворот отн. O : $\varphi(\alpha_1)$ переходит в $\varphi(\alpha_2)$
 это R_Θ , где $\Theta = \alpha_2 - \alpha_1$, но поворот сохраняет длины $\Rightarrow \forall \alpha_1, \alpha_2 \quad M(\alpha_1) \equiv M(\alpha_2)$ (конгруэнтны)

$$\Rightarrow \forall \alpha \quad M(\alpha) = \max M$$

$$M = M(\alpha=0) = 13\pi + \cancel{26} + \cancel{26} + 2h, \text{ где } h:$$

сейчас мы ищем M , когда $A \in$ одной из коорд. осей

$$M_1 = M(\alpha=0) = 13\pi + 26 + 2h_0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

n - кол-во
бок.
граней

Задача №7

R - рад. Ω (центр O_2)
 r - рад. ω (центр I)

$H = 2r$ - выс. усеч.
пирамиды

ω_1 рад. r_1 - выс.
окружность нижнего
основания

ω_2 рад. r_2 - ω - верхнего

θ - велич. двугр. угла м/у бок.
стороной и нижн. осн.

$\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, т.к. Ω кас. рёбер

a - сторона нижн. осн.

b - сторона верхнего осн.

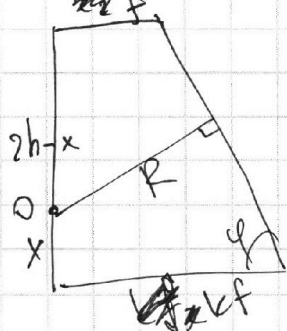
$$S_{\text{верх}} = R_2 \cdot r_2 = \frac{n b}{2} r_2$$

$$S_{\text{нижн}} = r_1 \cdot r_1 = \frac{n a}{2} r_1$$

Основания подобны, т.к. одно $\rightarrow$ другое гомотетией
отн. вершины неусечённой пирамиды.

$$f^2 = r_2^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

пусть $k > 1$: $r_1 = k r_2$
 k - ?





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

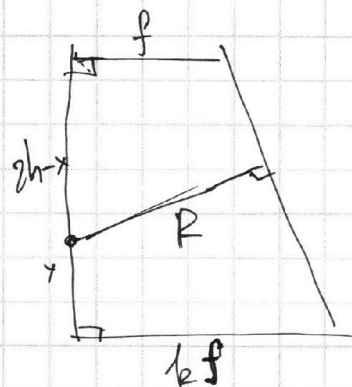
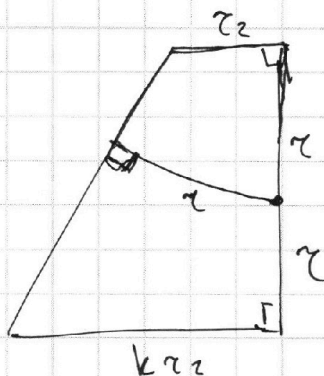
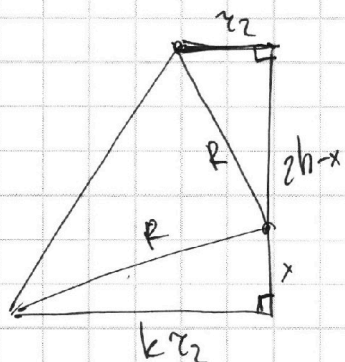
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~~R = \tau_2~~ пусть $\tau_2 = y$

$$y^2 + (2h-x)^2 = R^2$$

$$R^2 = (ky)^2 + x^2$$

$$h = 2\tau_2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, featuring various calculations, diagrams, and algebraic manipulations.

Top Left: Arithmetic calculations: $13 \times 13 = 169$, $1111 \times 106 = 933$, $33 \times 33 = 1089$.

Top Center: Trigonometric formula: $\frac{a \sin \alpha}{a \sin \alpha} = \frac{a}{2}$.

Top Right: Arithmetic calculations: $11 \times 11 = 121$, $11 \times 11 = 121$, $11 \times 11 = 121$.

Middle Left: Algebraic manipulation: $t^2(t^2 + 3t + 3)$, $(t-3)^3 = (t-3)(t^2 - 6t + 9) = t^3 - 3t^2 - 6t^2 + 18t + 9t - 27 = t^3 - 9t^2 + 27t - 27$.

Middle Center: Diagrams showing geometric constructions with circles, lines, and points labeled A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z.

Middle Right: Arithmetic calculations: $11 \times 11 = 121$, $11 \times 11 = 121$, $11 \times 11 = 121$.

Bottom Left: Algebraic manipulation: $t^2 + 5t - p^2 - 5p = 0$, $t = p$, $t = -p + 5$, $4p + 5p^2 = 5p - 25$, $p^2 + 10p + 25 = 5p - 25$, $p^2 + 5p = -50$, $5 \cdot 1,41$.

Bottom Center: Diagrams showing geometric constructions with circles, lines, and points labeled A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z.

Bottom Right: Algebraic manipulation: $y+1=x$, $x-2y=10$, $3y+1=10$, $x=4$, $y=3$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Кол. 12:11

~~15 мин~~

15 мин

25 мин

15 мин

20 мин

35 мин

35 мин

12:14 -

12:16 -

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2) =$$

$$= x^3 - yx^2 + xy^2 - y^3$$

$$p^2 - 4$$

$$(t+i)(p-1) = tp + p - t + 1$$

$$\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} = \frac{t-1-(t+1)}{t^2-1} = \frac{-2}{t^2-1}$$

$$\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1} = \frac{p+1-p-1}{p^2-1} = \frac{-2}{p^2-1}$$

$$\frac{1}{(t-1)(p+1)} - \frac{1}{(t+1)(p-1)} = \frac{(t+1)(p-1) - (t-1)(p+1)}{(t-1)(p+1)(t+1)(p-1)}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 13 \\ \hline 39 \\ + 13 \\ \hline 169 \\ - 50 \\ \hline 119 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ + 17 \\ \hline 724 \\ \hline 288 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 288 \\ 289 \\ p < -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -5-p \neq -1 \\ p \neq -4 \\ -5-p+1 > 0 \end{array}$$

$$(t+1)/(t^2+2t+1) =$$

$$= t^3 + t^2 + 2t^2 + 2t + t + 1 =$$

$$= t^3 + 3t^2 + 3t + 1$$

$$(p-1)(p-1)^2 =$$

$$(p-1)(p^2-2p+1) =$$

$$= p^3 - p^2 - 2p^2 + 2p + p - 1$$

$$p^3 - 3p^2 + 3p - 1$$

$$tp + p - t - 1$$

$$p^2 - 1$$

$$p^2 + 5p - t^2 - 5t$$

$$\frac{p(p+5) - t(t+5)}{p}$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \right) =$$

$$= \sqrt{2} \cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) =$$

$$\cos \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin \alpha \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$t \neq 1$$

$$p = 1 + 4 \cdot 6 \cdot 12$$

$$p > 1$$