



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Таким числом A , оно составлено из 3-х одинаковых цифр $\Rightarrow$ делится на 111, $A = a \cdot 111$, где $a \in [1, 9]$,
но $111 = 11 \cdot 101$ - это простое число, $A \cdot B \cdot C$ з.в.к.
квадратом $\Rightarrow$ либо B , либо C делится на 101,
но 101 - простое, а C - 2-значное $\Rightarrow B : 101$, B - 3-знач.
 $\Rightarrow B$ имеет вид: $\overline{b_0 b_1 b_2}$ но по условию в B есть одна цифра 1, откуда следует, что единств. возможный вариант: $B = 101$. Также одна из чисел должно делиться на 11 (либо B , либо C) т.к.
 $A \nmid 11^2$ т.к. $A = a \cdot 101 \cdot 11$, $a \in [1, 9] \nmid 11$, но $B = 101$
 $\Rightarrow C : 11 \Rightarrow C$ имеет вид: $\overline{c_0 c_1}$, но в C есть цифра 5 по ум. $\Rightarrow C$ определенная однозначная:
 $C = 55 = 5 \cdot 11$, выполняются первые 3 ум., осталось 4-ое:
 $A \cdot B \cdot C = a \cdot 101 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 5 \cdot 11 = 11^2$, откуда следует, что $a = 5 \cdot y^2$, но $a \in [1, 9] \Rightarrow y = 1$, $a = 5$, тогда единств. возможная тройка чисел, удовл. условию:
 $A = 5 \cdot 101 \cdot 11 = 5555$, $B = 101$, $C = 55$, тогда ответ:
(5555, 101, 55)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☒3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy}$, также заметим, что если мы x ~~уменьшим~~ ~~увеличим~~ на 3, а y увеличим, то знаменатель xy не изменится. Замечим также, что K не является целым: $\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$, откуда

следует, что: 1) $x+y+1=0$, $x+y=-1$, 2) $xy=(x-3)(y+3)=3x-3y+xy+9 \Leftrightarrow x-y-3=0$, $x=y+3$

Рассмотрим оба этих случая: 1) $x+y=-1$, $x=-(y+1)$, $x^3-y^3-3xy = -(y+1)^3 - y^3 - 3(-(y+1))y = -y^3 - 3y^2 - 3y - 1 - y^3 - 3y^2 - 3y + 3y^2 + 3y = -2y^3 - 3y^2 - 1$, но этот случай невозможен, поскольку, xy - нечетно, $x+y=-1$ - не имеет реш. 2) $x=y+3$: $x^3-y^3-3xy = (y+3)^3 - y^3 - 3(y+3)y = y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 3y^2 - 9y - 9 = y^3 + 9y^2 + 27y - y^3 - 3y^2 - 9y - 9 = 27$ - это единственный вариант. Ответ: $x^3-y^3-3xy = 27$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$d) (\sin 2x - \sin 2y) \sin 2x = (\cos 2x + \cos 2y) \cos 2x \Leftrightarrow$$

$$\sin^2 2x - \sin 2y \sin 2x = \cos^2 2x + \cos 2y \cos 2x \Leftrightarrow$$

$$\sin^2 2x - \cos^2 2x = \cos 2y \cos 2x + \sin 2x \sin 2y \Leftrightarrow$$



$$-\cos 2 \cdot 2x = \cos(2y - 2x) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 2x - 2y = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} (1) \\ 2 \cdot 2x + 2y = 2l\pi, l \in \mathbb{Z} (2) \end{cases}$$

$$1) 2 \cdot 2x - 2y = 2k\pi \Leftrightarrow 2x - y = k\pi \Leftrightarrow 2x - x + y = 2k\pi + 1, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) 2 \cdot 2x + 2y = 2l\pi \Leftrightarrow 2x + y = l\pi \Leftrightarrow 2x + x - y = 2l\pi + 1, l \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3x - y = 2l\pi + 1, l \in \mathbb{Z}$$

тогда, найдём все пары (x, y) , удовлетв.:

$$(x, 2k\pi - x), x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}, (x, 3x - 2l\pi - 1),$$

$$x \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{Z}, \text{ т.к. по условию, } x, y - \text{действит.}$$

$$b) \text{ Пусть } x, y, \begin{cases} x + y = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 3x - y = 2l\pi + 1, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

заметьте, что если выполн. 1-ое, то и 2-ое тоже выполн. и наоборот

(если $x + y$ - четн, то и $3x - y$ - четн, т.к. $x \equiv 2\pi, y \equiv -y$)

$\Rightarrow$ любые четн x, y также, что $x + y$ - четн. подходит

заметьте, что ф-ия арксос может принимать значения $[0, \pi]$

$\Rightarrow$ нам не подх. только вар-т, когда $\cos \frac{x}{2} = -1, \cos \frac{y}{2} = -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{y}{2} = 2l\pi + \pi, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2(2k\pi + \pi), k \in \mathbb{Z} \\ y = 2(2l\pi + \pi), l \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ по сути слева - рац, а справа - ирр.}$$

$\Rightarrow$ $\exists$ такие пары четн (x, y) , что $\arccos \frac{x}{2} + \arccos \frac{y}{2} = 2\pi$

$\Rightarrow \forall (x, y), x, y \in \mathbb{Z}, x + y$ - четн - подходит $\Rightarrow$

таких пар бесконечно много



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим 1-ый случай - начало месяца, всего вы-в
раздать 4 билета по 11-кл-м; C_S^4 где S - кол-во
11-класс-в. Подходящие пары вер-ты - это когда у
Пети и Васи есть билет, $\Rightarrow$ осталось раздать
2 ост-ся билета по $S-2$ 11-кл-м $\Rightarrow$ так как
вер-в: $C_{S-2}^2 \Rightarrow$ вероятность; $\frac{C_{S-2}^2}{C_S^4} = \frac{(S-2)! \cdot 4! \cdot (S-4)!}{2! \cdot (S-4)! \cdot S!} =$
 $= \frac{4 \cdot 3}{S \cdot (S-1)} = P_1$

Рассчитаем вер-ть после добавления новых билетов.
пусть их стало n , тогда по аналогичной ф-ле
мы можем посчитать новую вер-ть:

$$P_2 = \frac{C_{S-2}^{n-2}}{C_S^n} = \frac{(S-2)! \cdot n! \cdot (S-n)!}{(n-2)! \cdot (S-n)! \cdot S!} = \frac{n \cdot (n-1)}{S(S-1)}$$

Но из условия нам дано, что $P_2 = 3,5 P_1 \Leftrightarrow$

$$\frac{n(n-1)}{S(S-1)} = 3,5 \cdot \frac{4 \cdot 3}{S(S-1)} \Leftrightarrow n(n-1) = 42 \Leftrightarrow n^2 - n - 42 = 0,$$

$$D = 1 + 168 = 169, n = \frac{1 \pm 13}{2} = 7 \quad (n = -6 - \text{пост. отриц})$$

Тогда ответ: в конце месяца всего выдано
7 билетов

Примечание: тут, C_n^k - количество сочетаний

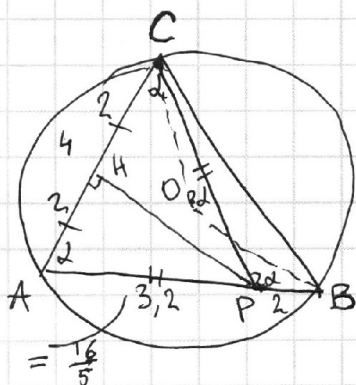


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что 4-м. угловыми

$\angle CDB$ - впис (по условию)

$\Rightarrow \angle COB = \angle CPB$, но $\angle COB$

$= 2\angle A = 2\alpha$ ($\angle A = \alpha$)

т.к. O - ц. впис окр. смч $\triangle ABC$

$\Rightarrow \angle CPB = 2\alpha$, но $\angle CPB$ впис

гмч $\triangle APC$ и $\angle CPA \Rightarrow \angle ACP + \angle A = \angle CPB$,

$\Rightarrow \alpha + \angle ACP = 2\alpha \Rightarrow \angle ACP = \alpha \Rightarrow \triangle ACP$ - равнобедр

$$\Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3.2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{100}{16^2}} = \sqrt{\frac{156}{256}} = \frac{\sqrt{156}}{16}$$

$$\text{Итого } S_{ABC} = \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot AC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{156}}{16} \cdot 4 \cdot 5.2 = \frac{\sqrt{39}}{32} \cdot 1.3 \cdot 32 = 1.3 \cdot \sqrt{39}$$

Итак: $\cos \alpha = \frac{AC}{2AP} = \frac{10}{16}$, т.к. $\triangle ACP$ - равнобедр PH - высота /
 мед / бисс. В нем, $\triangle APH$ - п/у, $AP = \frac{AC}{2}$, т.к. PH - медиана.

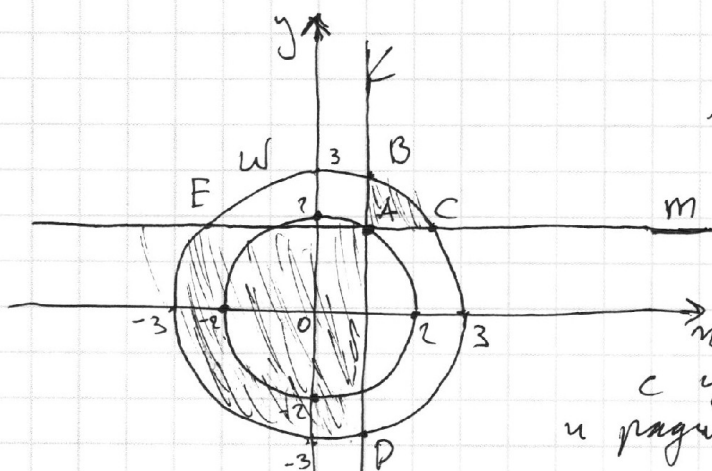
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Вначале рассмотрим второе пер-во в системе: отсюда можно понять, что все точки, удовлетворяющие условию, лежат внутри или на границе окружности с центром в начале координат и радиусом $3 \cdot \omega$.

Теперь будем считать 1-ое пер-во: проведем окружность с радиусом 2 и центром в начале координат, на ней выберем точку A, угол между радиусом OA и осью x будем считать 2 , тогда координаты точки A будут $(2\cos 2, 2\sin 2)$ проведем из точки A прямую l и m перпендикулярно осям x и y , $\{B, D\} = l \cap \omega$, $\{C, E\} = m \cap \omega$

Заметим, что нам нужны точки, которые выше и "правее" l или те, которые выше m и "левее" l . - область удобной системы, зафиксирована на рисунке, это "кусочек" BAC и "кусочек" EAD. Заметим, что $\angle BAC + \angle EAD = 180^\circ$ в.к. $\angle EAD = 2\angle BAC = 90^\circ \Rightarrow$ дуги 2 и 4 , которые входят в периметр, да и соответствующий, фиксирована и равна половине длины окружности $\omega \Rightarrow$

это: $\pi \cdot R = 3\pi \Rightarrow$ нам нужно максимизировать $CE + BD$. Заметим, что отсюда точки A отсюда. Окружность ω - фикс. и равна $3^2 - 2^2 = 5 = AC \cdot AE = AD \cdot AB$

Найдем абсциссу точки C: $\sqrt{9 - 4\sin^2 2}$, тогда $CE = 2 \cdot \sqrt{9 - 4\sin^2 2}$ в.к. и.с. C и E симм. относительно y, аналогично $BD = 2 \cdot \sqrt{9 - 4\cos^2 2}$ тогда $CE + BD = 2 \left(\sqrt{9 - 4\sin^2 2} + \sqrt{9 - 4\cos^2 2} \right)$, заметим, что по пер-ву и/или средним арифм. и ср. квадр.:

$$\frac{\sqrt{9 - 4\sin^2 2} + \sqrt{9 - 4\cos^2 2}}{2} \geq \sqrt{\frac{18 - 4(\sin^2 2 + \cos^2 2)}{2}} = \sqrt{7}, \text{ равенство}$$

выполняется при $\sqrt{9 - 4\sin^2 2} = \sqrt{9 - 4\cos^2 2} \Rightarrow \sin^2 2 = \cos^2 2, |\sin 2| = |\cos 2|$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Также возможно, например, при $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $CE + BD =$
 $= 2(\sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha}) = 2 \cdot 2\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$, больше, так
мы уже доказали, быть не может $\Rightarrow$ так же.
знач $M = 3\sqrt{11} + 4\sqrt{7}$, достигается при $|\sin \alpha| = |\cos \alpha|$
 $\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} k$, $k \in \mathbb{Z}$ - ответ.

L-60 - Emboss



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$aaaa = 11 \cdot a \cdot 100 + 11 \cdot a = 11 \cdot a \cdot 101 \quad 11 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 101$$

--- 1 семб

$$\begin{array}{r} 1111 \\ 1111 \\ 1111 \\ 1111 \\ 1111 \\ 1234321 \end{array} \quad \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{4}$$

29 знаков

5.



$$\frac{1}{n} + \frac{1}{y} + \frac{1}{ny} = \frac{1}{n-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{2\pi n = \pi + 2\pi k}{(n-3)(y+3)} \quad \pi = k + \frac{1}{2}$$

$$\frac{n+y}{xy} = \frac{n+y+1}{(n-3)(y+3)} \quad \sin \frac{\pi}{4} n - \sin \frac{\pi}{4} y \cdot \sin \frac{\pi}{4} n = \cos \frac{\pi}{4} n + \cos \frac{\pi}{4} y \cdot \cos \frac{\pi}{4} n$$

$$\begin{array}{l} 16 \cdot 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 \cdot 6 \end{array}$$

$$\frac{C_{5-2}^2}{C_5^4} - \text{leaves var.}$$

$$\cos(\pi(n-y)) = -\cos \pi n \quad n=y \quad n+y=$$

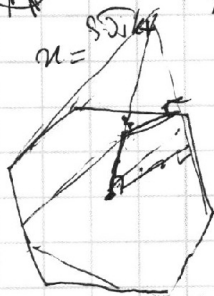
$$\frac{(5-2)! \cdot 3! \cdot (5-4)!}{2! \cdot (5-4)! \cdot 5!}$$

$$156 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$$

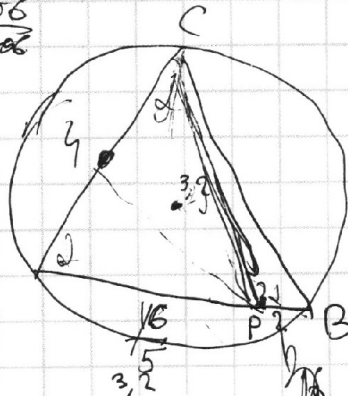
$$4-3,5 = 14-3 = 11$$

$$2 \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{100}{256}$$

$$\frac{13^2}{10^2} \cdot 13 \cdot 3$$



A



$$\frac{13^2}{10^2} \cdot 13 \cdot 3$$



$$\frac{2 \cdot 6 - 10}{16} \cdot \frac{\sqrt{156}}{16}$$

$$\frac{\sqrt{156}}{32} \cdot \frac{2 \cdot 6 \cdot 4}{5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13}{32 \cdot 10} \cdot \sqrt{13} = 1,3 \sqrt{13}$$

