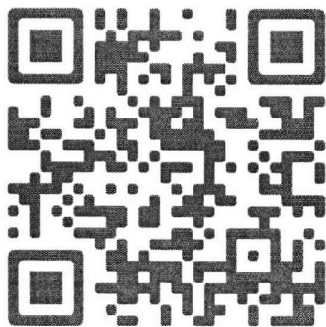




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекет отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} = 1111 \cdot a = 11 \cdot 101 \cdot a.$$

$$ABC = x^2 = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot B \cdot C.$$

$$a - \text{какая-то цифра} \Rightarrow \begin{aligned} \text{НОД}(11; a) &= 1 \\ \text{НОД}(101; a) &= 1 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B \cdot C \vdots 11 \cdot 101.$$

$$11 \text{ и } 101 - \text{простые}, C < 100 \Rightarrow B \vdots 101$$

$$\begin{aligned} \text{Если } B \vdots 11, \text{ то } B \vdots 11 \cdot 101 \Rightarrow B \geq 1111, \text{ но } B - \\ \text{трёхзначное} \Rightarrow B \not\vdots 11 \Rightarrow C \vdots 11 \Rightarrow B = 101 \cdot b \\ C = 11 \cdot c \end{aligned}$$

$$\text{Получаем } B < 1000 \Rightarrow b < 10 \Rightarrow b \text{ и } c - \text{цифры.}$$

$$b \text{ } B \text{ есть цифра } 6 \Rightarrow \text{единственный возможный вариант } b = 6$$

$$c \text{ } C \text{ есть цифра } 3 \Rightarrow \text{единственный возможный вариант } c = 3 \Rightarrow B = 606, C = 33$$

$$ABC = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot 101 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 33 = x^2$$

$$18a = \overset{3}{y^2} \quad (x, y, z \in \mathbb{Z})$$

$$2a = \underset{2}{z^2}$$

$$a = \overset{3}{k^2} \cdot 2 < 10 \Rightarrow \text{подходят } k^2 = 1 \Rightarrow k^2 = 4$$

$$\Rightarrow \text{получаем тройки } \boxed{(2222; 606; 33) \text{ и } (8888; 606; 303)}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

☐

2

☒

3

☐

4

☐

5

☐

6

☐

7

☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$x > 0, y > 0 \Rightarrow x+y+5 \neq 0$$

$$xy = (x-2)(y+2)$$

$$xy = xy + 2x - 2y - 4$$

$$x - y = 2$$

$$x = y + 2$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy = (y+2)^3 - y^3 - 6y(y+2) = y^3 + 6y^2 + 12y +$$

$$+ 8 - y^3 - 6y^2 - 12y = 8$$

$$\text{Ответ: } \boxed{M=8.}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\alpha) (\sin \pi x + \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$\underbrace{(\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x)}_{\cos 2\pi x} - \underbrace{(\cos \pi y \cdot \cos \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x)}_{\cos \pi(x-y)} = 0$$

$$\cos 2\pi x = \cos \pi(x-y)$$

$$\begin{cases} 2\pi x = \pi(x-y) + 2\pi n \\ 2\pi x = \pi(y-x) + 2\pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x+y=2n \\ 3x-y=2n \end{cases}$$

→ все подходящие пары

$$\delta) \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi.$$

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{6} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{2} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

$$\arcsin a \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} \geq \pi$$

только если $\arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2}$
 $\arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2}$

$$\left[\text{если } \frac{x}{6} = 1 \quad \frac{y}{2} \neq 1 \right] \leftarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x+y=2n \\ 3x-y=2n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{если } x \div 2, \text{ то } y \div 2 \\ \text{если } x \nmid 2, \text{ то } y \nmid 2. \end{cases}$$

Для $x = \{-6; -4; -2; 0; 2; 4\}$ подходит любой
 $y = \{-2; 0; 2\} \Rightarrow$ получается $6 \cdot 3 = \underline{18}$ пар.

Для $x = 6$ подходит $y = \{-2; 0\} \Rightarrow \underline{2}$ пары.

Для $x = \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\}$ подходит
 $y = \{-1; 1\} \Rightarrow$ получается $6 \cdot 2 = \underline{12}$ пар.

Всего $18 + 12 + 2 = 32$ пар.

Ответ: 32 пары.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего ~~не~~ одинадцатиклассников было x .

Изначально ~~не~~ общее кол-во способов распределения билетов — $C_x^4 = \frac{x!}{4!(x-4)!}$

Если и Петя, и Вася получили билеты, то остаётся отдать 2 билета $x-2$ людям $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ кол-во таких способов $C_{x-2}^2 = \frac{(x-2)!}{2!(x-4)!}$

Тогда исходная вероятность

$$p_1 = \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{(x-2)!}{2!(x-4)!} \cdot \frac{4!(x-4)!}{x!} = \frac{12}{(x-1)x}$$

Пусть в конце месяца было уже y билетов. Аналогично посчитаем вероятность

$$p_2 = \frac{C_{y-2}^{y-2}}{C_x^y} = \frac{(y-2)!}{(y-2)!(x-y)!} \cdot \frac{y! \cdot (x-y)!}{x!} = \frac{(y-1) \cdot y}{(x-1) \cdot x}$$

$$p_2 = 6p_1 \Rightarrow \frac{(y-1) \cdot y}{(x-1) \cdot x} = \frac{72}{(x-1) \cdot x}$$

$$y^2 - y = 72$$

$$(y-9)(y+8) = 0, \quad y > 0 \Rightarrow y = 9$$

Ответ: 9.

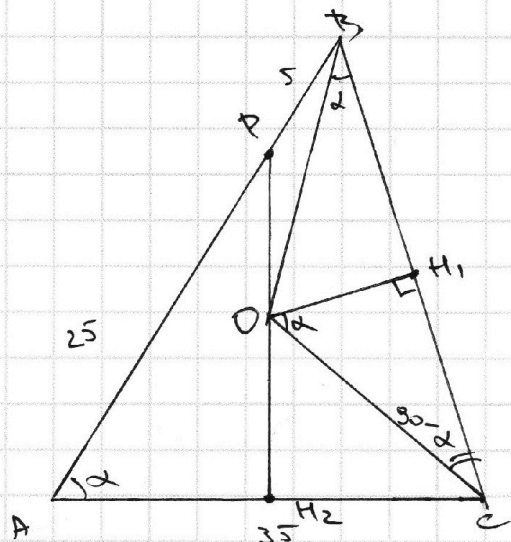


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1. O - центр $\omega_1 \Rightarrow OB = OC$. Проверим $OH_1 \perp BC$,
пусть угол $H_1OC = \alpha = \angle BON_1$ (т.к. $OB = OC \Rightarrow OH_1$ -
- бис-са, медиана и высота) $\Rightarrow \angle OCH_1 = 90 - \alpha$.

$\angle BAC$ опир. на дугу BC в ω_1 , $\angle BOC$ - центральный
угол $\Rightarrow \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = \alpha$

$OPBC$ - вписан. в $\omega_2 \Rightarrow \angle OPB + \angle OCB = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OPB = 90 + \alpha \Rightarrow \angle OPA = 90 - \alpha$. Пифагорин PO

до пер. с AC в т. H_2 Из суммы углов $\triangle APH_2$

$\angle PH_2A = 90^\circ \Rightarrow OH_2$ - высота $\triangle AOC$. $AO = OC \Rightarrow AH_2 = H_2C =$
 $= \frac{35}{2}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AP = 25$$
$$AH_2 = \frac{35}{2} \Rightarrow PH_2 = \sqrt{25^2 - \frac{35^2}{4}} = \frac{5\sqrt{51}}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{PH_2}{AP} = \frac{5\sqrt{51}}{2 \cdot 25} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} (25+5) \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{51}}{10} = \boxed{\frac{105\sqrt{51}}{2}}$$

$$\text{Ответ: } \frac{105\sqrt{51}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решения $x^2 + y^2 \leq 169$ — все точки, лежащие
внутри окружности с центром в
начале координат и радиусом 13.

$$\text{Решения } (x + 5\sqrt{2}\cos\alpha)(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -5\sqrt{2}\cos\alpha \\ y = -5\sqrt{2}\sin\alpha \\ \text{или} \\ \left\{ \begin{array}{l} x < -5\sqrt{2}\cos\alpha \\ y > -5\sqrt{2}\sin\alpha \end{array} \right. \\ \text{или} \\ \left\{ \begin{array}{l} x > -5\sqrt{2}\cos\alpha \\ y < -5\sqrt{2}\sin\alpha \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\text{Обозначим } \begin{cases} |5\sqrt{2}\sin\alpha| = n \\ |5\sqrt{2}\cos\alpha| = m \end{cases}$$

~~тогда возможны 4 случая~~

Возможны 4 случая знаков $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$

~~Рассмотрим их все~~

Для каждого из них покажем фигуру
OP на координатной плоскости



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

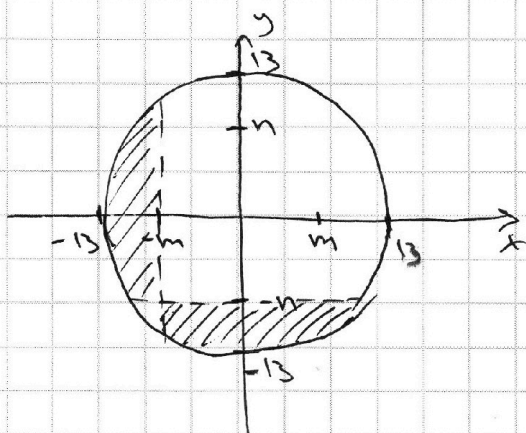
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

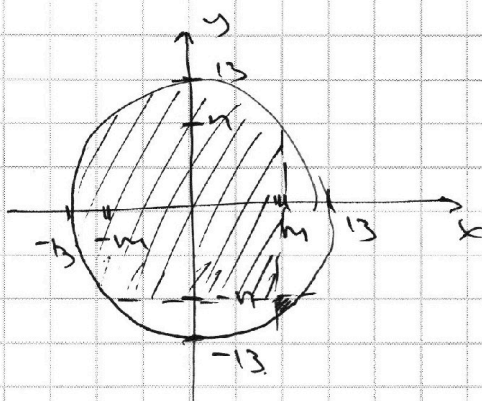
2 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

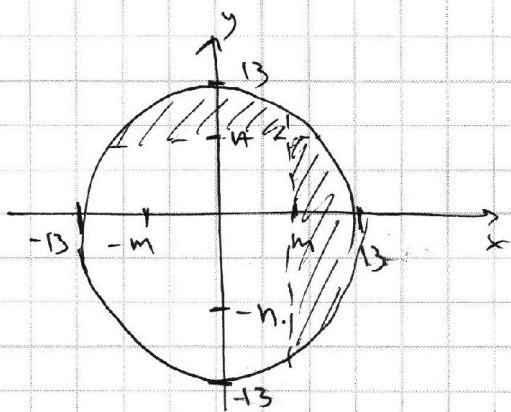
1) $\sin \alpha \geq 0$
 $\cos \alpha \geq 0$



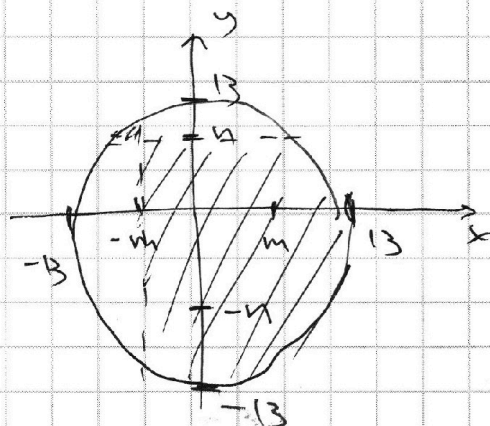
2) $\sin \alpha \geq 0$
 $\cos \alpha \leq 0$



3) $\sin \alpha \leq 0$
 $\cos \alpha \leq 0$



4) $\sin \alpha \leq 0$
 $\cos \alpha \geq 0$



~~Решение задачи~~

Случаи 1 и 3 и 2 и 4 симметричны.

Для каждого случая несимметричной фигуры
будет состоять из отрезков и дуг
окружности



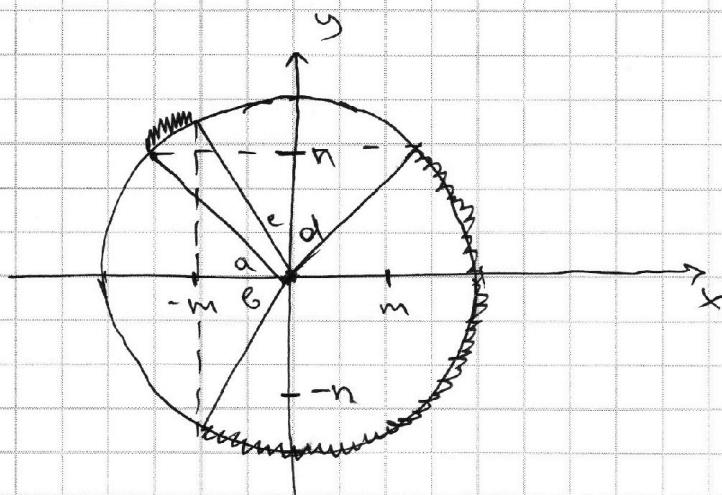
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдем сумму длин дуг окружности
для одного из случаев



Обозначим некоторые углы на рисунке
как a, b, c и d .

Тогда

$$\sin a = \frac{n}{13} \quad \sin c = \frac{m}{13}$$

$$\cos b = \frac{m}{13} \quad \cos d = \frac{n}{13}$$

$$b + c = 90^\circ$$

$$a + d = 90^\circ$$

$$\Rightarrow a + b + c + d = 180^\circ = \pi$$

Сумма длин закрашенных дуг равна

$$(2\pi - (a + b + c + d)) R = \pi R = (a + b + c + d) R$$

Для любого случая выбора R , сумма
длин дуг будет равна πR , ($R=13$)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

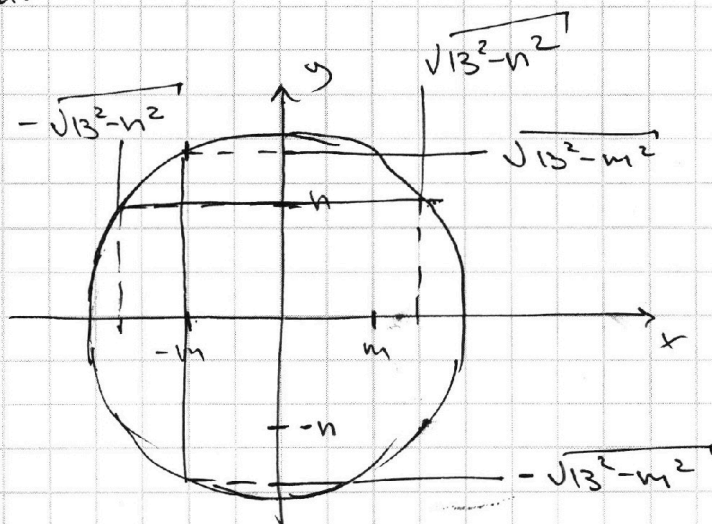
6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда найдем сумму длин оставшихся сторон.



Для всех случаев сумма этих длин

$$l = 2\sqrt{13^2 - m^2} + 2\sqrt{13^2 - n^2}$$

$$m^2 = 50 \cos^2 \alpha$$

$$n^2 = 50 \sin^2 \alpha$$

~~$$\frac{l}{2} = \sqrt{13^2 - m^2} + \sqrt{13^2 - n^2}$$~~

$$\frac{l}{2} = \sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha} + \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

$$\frac{l^2}{4} = 169 - 50 \cos^2 \alpha + 169 - 50 \sin^2 \alpha +$$

$$+ 2\sqrt{(169 - 50 \cos^2 \alpha)(169 - 50 \sin^2 \alpha)} \approx$$

↓



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{l^2}{4} = 338 - 50 + 2\sqrt{169^2 - 50 \cdot 169(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} + \frac{2500}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}$$

$$\begin{aligned} \frac{l^2}{4} &= 288 + 2\sqrt{20111 + 625 \cdot (4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)} = \\ &= 288 + 2\sqrt{20111 + 625 \cdot \sin 2\alpha} \end{aligned}$$

~~Периметр~~ Периметр максимальной $\Rightarrow l$ максимален
 $\Rightarrow \frac{l^2}{4}$ максимален $\Rightarrow \sin 2\alpha$ максимален.

$$\sin 2\alpha_{\max} = 1 \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_{\max} = \frac{\pi}{4} + \pi k} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{l_{\max}^2}{4} = 288 + 2\sqrt{20111 + 625}$$

$$\frac{l_{\max}^2}{4} = 288 + 144 = 432.$$

$$l_{\max} = 2\sqrt{432} = 24\sqrt{3}$$

$$M = 13\pi + l_{\max} = 13\pi + 24\sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: } M = 13\pi + 24\sqrt{3}$$

$$\alpha_{\max} = \frac{\pi}{4} + \pi k$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

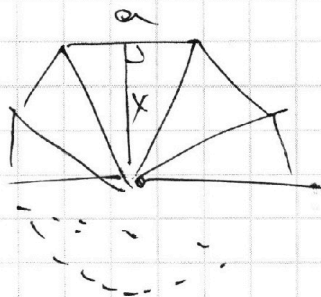
СТРАНИЦА

2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Существом шаров, касающихся всех ребер
и всех граней $\Rightarrow$ плоскость верхнего основания
параллельна плоскости нижнего. Оба основания
— выпуклые n -угольники. Пусть сторона
верхнего основания a , сторона нижнего —
 $a+2b$.

Разобьем верхнее основание на n равных
треугольников с одной вершиной в центре



Пусть высота этих
треугольников x

Тогда площадь

верхней грани

$$S_1 = \frac{1}{2} a \times n$$

Любая боковая грань — равнобокая
трапеция. Ω касается всех ребер $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ проекция Ω на любую боковую
грань — окружность $\Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

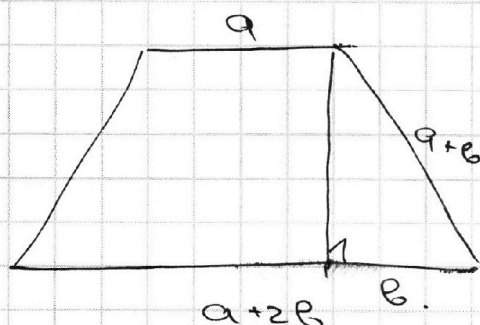
6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow$ боковая грань — описанная равнобокая трапеция с основаниями a и $a+2b$



$\Rightarrow$ боковая грань
равна $\frac{a+a+2b}{2} \cdot h = a+b$

Рассмотрим проекцию ω на плоскость, перпендикулярную основаниям и проходящую через их центры. Сечение усеченной пирамиды этой плоскостью будет равнобокой трапецией, верхнее основание которой будет $2x$, а нижнее — $2x \cdot \frac{a+2b}{a}$ (в силу подобия оснований изн. пирамиды). Центр ω будет проецироваться туда как окружность $\Rightarrow$ эта трапеция опис. $\Rightarrow$ ее боковая сторона равна $x \cdot \frac{2a+2b}{a}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Также эта боковая сторона будет высотой
боковой грани усеченной пирамиды $\Rightarrow$

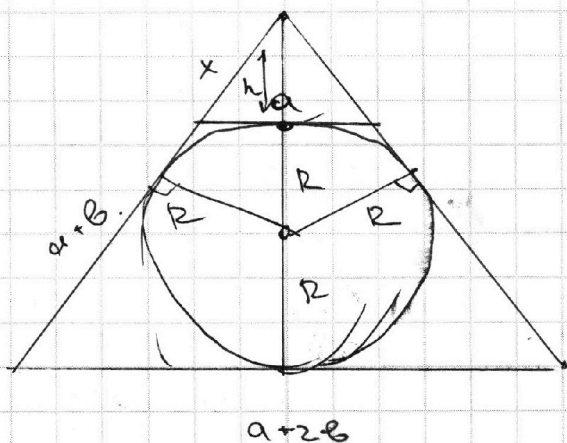
$$\Rightarrow \text{Площадь боковой грани будет}$$
$$x \cdot \frac{2a+2b}{2} = \frac{a+a+2b}{2} = x \cdot 2 \cdot \frac{(a+b)^2}{a}$$

"

Площадь боковой поверхности

$$S_2 = 2 \cdot x \cdot \frac{(a+b)^2}{a}$$

~~Из~~ Проведем боковые грани одной боковой
грани по пересечению



из подобия.

$$\frac{a+b+x}{x} = \frac{h+2R}{h} = \frac{a+2b}{a} \Rightarrow$$

$$\frac{a+b}{x} = \frac{2R}{h} = \frac{2b}{a}$$

$$h = \frac{a}{b} R$$

$$x = (a+b) \cdot \frac{a}{2b}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА
4 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Исходные~~ $(a+b+c)^2$ И. П. Кузнецова



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

X

$$C_{x-2}^2 = a = \frac{(x-2)(x-3)}{2}$$

$$C_{x-2}^{y-2} = 6a = \frac{(x-2)(x-3) \cdot \dots \cdot (x-y+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (y-2)}$$

$$\frac{(x-4)(x-5) \cdot \dots \cdot (x-y+1)}{3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (y-2)} = 6$$

$$\frac{(x-2)!}{2! \cdot (x-4)!}$$

$$\frac{(x-2)!}{(y-2)! \cdot (x-y)!} = 6 \cdot \frac{(x-2)!}{2! \cdot (x-4)!}$$

$$\frac{(x-4)!}{(y-2)! \cdot (x-y)!} = 3$$

$$\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} \cdot 6 = \frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^y}$$

$$\frac{(x-2)!}{2! \cdot (x-4)!} \cdot \frac{4! \cdot (x-4)!}{x!} = \frac{12}{(x-1) \cdot x}$$

$$\frac{(x-2)!}{(y-2)! \cdot (x-y)!} \cdot \frac{y! \cdot (x-y)!}{x!} = \frac{(y-1) \cdot y}{(x-1) \cdot x} = \frac{72}{(x-1) \cdot x}$$

$$y^2 - y - 72 = 0$$

$$(y-9)(y+8) = 0$$

$$y = 9$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

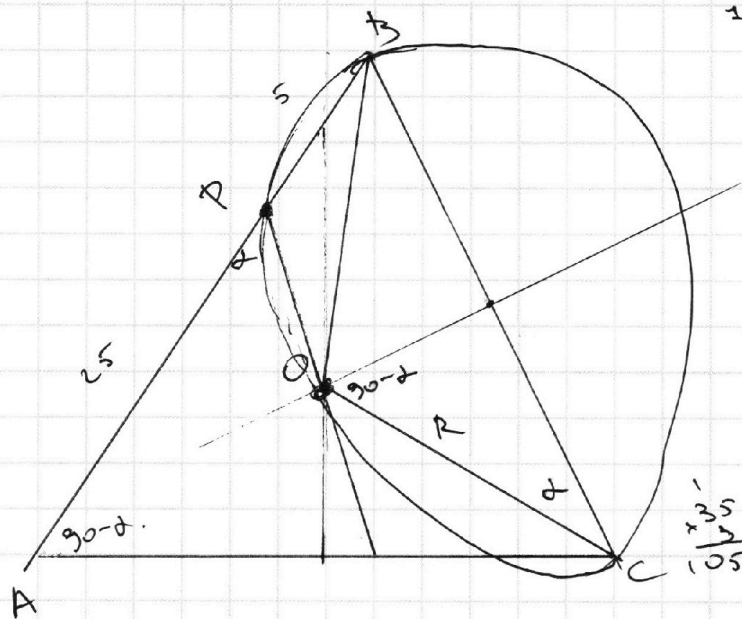
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{30 \cdot 35 \sqrt{51}}{20} = \frac{3 \cdot 35 \sqrt{51}}{2}$$

$$\begin{array}{r} 2500 - \\ - 1225 \\ \hline 1275 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1275 \overline{) 25} \\ - 125 \\ \hline 25 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 25 \\ \hline 125 \\ 50 \\ \hline 625 \end{array}$$

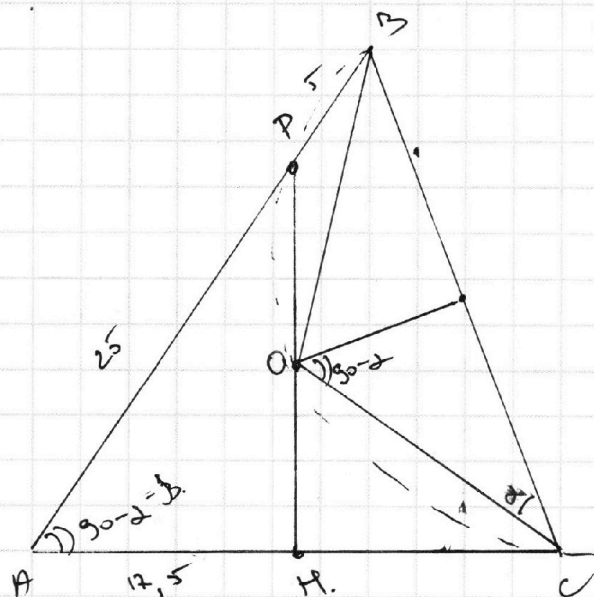
$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 35 \\ \hline 175 \\ 105 \\ \hline 875 \end{array}$$

35.

$$BC = 2R \cos \alpha$$

$$2500 - 1225 =$$

$$25^2 - \frac{35^2}{4} = \begin{array}{r} 2500 \\ - 1225 \\ \hline 1275 \end{array}$$



$$\frac{\sqrt{1275}}{2} = \frac{5\sqrt{51}}{2}$$

$$\sin \beta = \frac{5\sqrt{51}}{2 \cdot 25} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{51}}{10} =$$

$$= \frac{3 \cdot 35 \sqrt{51}}{2} =$$

$$= \frac{105 \sqrt{51}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~1296~~

$$x = -5\sqrt{2} \cos \alpha.$$

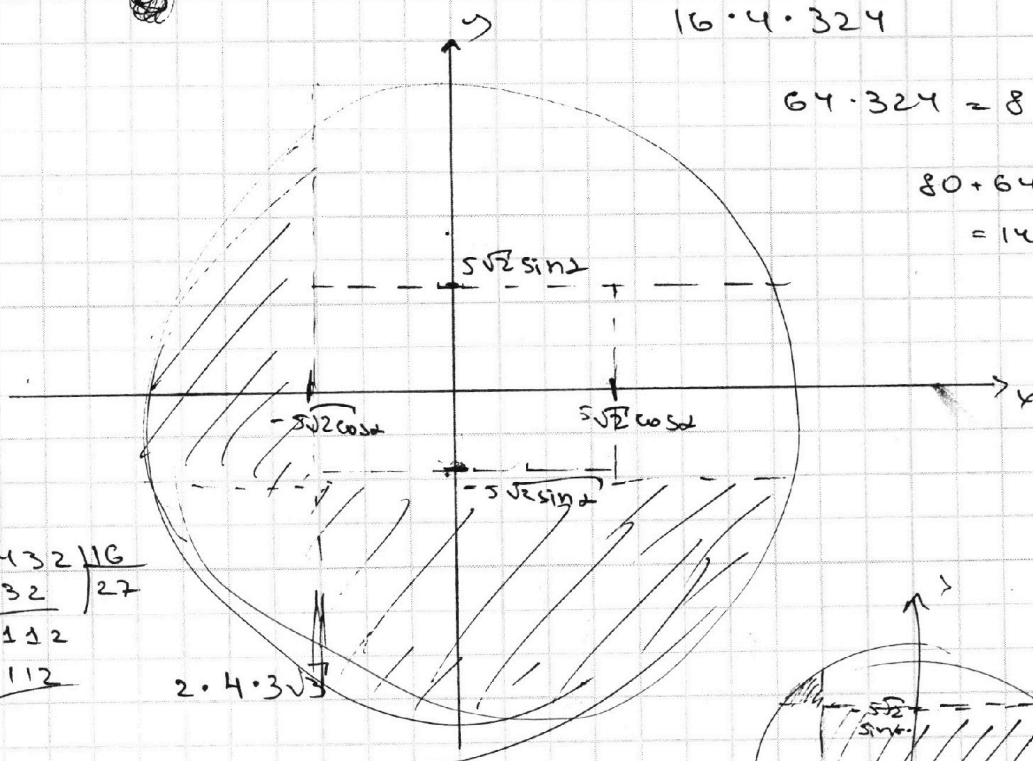
$$\begin{array}{r} 1296 \overline{) 4} \\ 12 \\ \underline{00} \\ 8 \\ \underline{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$16 \cdot 4 \cdot 324$$

$$64 \cdot 324 = 8 \cdot 18$$

$$80 + 64 = 144.$$

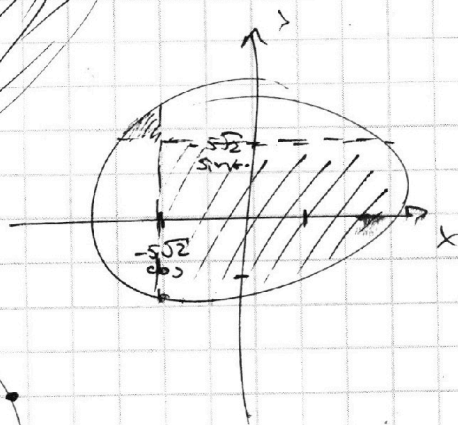
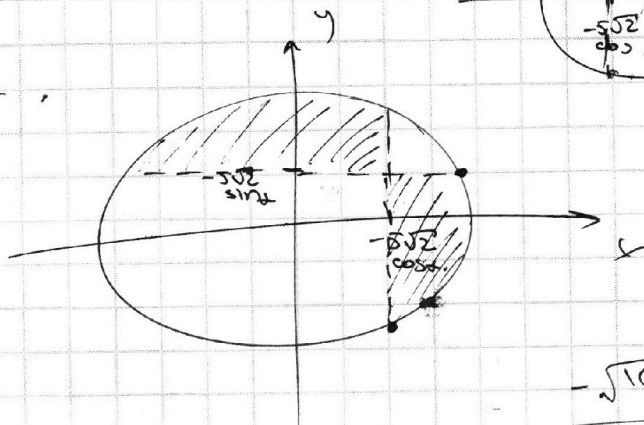


$$\begin{array}{r} 432 \overline{) 16} \\ 32 \\ \underline{112} \\ 112 \end{array}$$

$$2 \cdot 4 \cdot 3 \sqrt{2}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 288 \\ + 144 \\ \hline 432 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 432 \overline{) 8} \\ 40 \\ \underline{32} \end{array}$$



$$50 \cos^2 \alpha$$
$$-\sqrt{163 - 50 \cos^2 \alpha}$$

$$2\sqrt{163 - 50 \cos^2 \alpha} + 2\sqrt{163 - 50 \sin^2 \alpha}$$

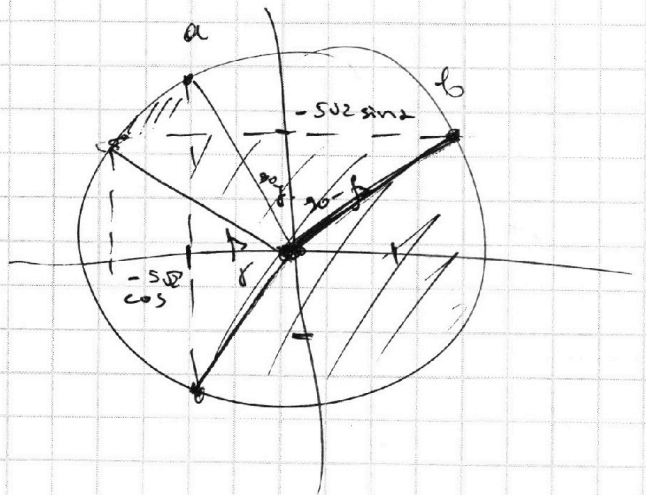


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$a = 2\sqrt{169 - 50\cos^2\alpha}$$

$$b = 2\sqrt{169 - 50\sin^2\alpha}$$

$$\frac{-5\sqrt{2}\sin\alpha}{13} = \sin\beta$$

$$\frac{5\sqrt{2}\cos\alpha}{13} = \sin\gamma$$

$$\frac{5\sqrt{2}\cos\alpha}{13} = \cos\gamma$$

$$P_1 = \varphi_1 R + a + b$$

$$P_2 = (2\pi - \varphi_1)R + a + b$$

$$P_1 + P_2 = 2\pi R + 2(a + b)$$

$$P_1 - P_2 = (2\varphi_1 - 2\pi)R$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ 2 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$169^2 =$$

$$\begin{array}{r} 2500 \overline{) 4} \\ 24 \\ \hline 10 \\ 8 \\ \hline 20 \end{array}$$

$$20736$$

2.

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 169 \\ \hline 2119 \\ 1521 \\ \hline 169 \\ 169 \\ \hline 20114 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20736 \overline{) 4} \\ 20 \\ \hline 7 \\ 4 \\ \hline 33 \\ 32 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$20736 = 16 \cdot 1296$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = y + 2.$$

$$M = y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - y^3 - 6y^2 - 12y = 8$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cdot \cos \pi x.$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cdot \cos \pi x.$$

$$\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x = (\cos \pi y \cdot \cos \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x) = 0$$

$$\cos 2\pi x = \cos \pi(x-y)$$

$$2\pi x = \pi(x+y) + 2\pi n.$$

$$2\pi x = \pi(y-x) + 2\pi n.$$

$$\begin{cases} \pi(x+y) = 2\pi n. \\ \pi(3x-y) = 2\pi n \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=2n \\ 3x-y=2n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} &\leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} &\leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$-6 \leq x \leq 6$$

$$\begin{aligned} -3\pi &\leq x \leq 3\pi \\ -\pi &\leq y \leq \pi. \end{aligned}$$

$$6$$

$$0 \cdot -2$$

$$-2 \leq y \leq 2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

aaaa

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 7} \\ - 7 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$1111 = 11 \cdot 101$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 13} \\ - 104 \\ \hline 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 17} \\ - 102 \\ \hline 65 \end{array}$$

$$33 \cdot 606$$

$$18$$

$$2 \cdot 9 \cdot a = x^2$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 13} \\ - 98 \\ \hline 33 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 23} \\ - 102 \\ \hline 127 \end{array}$$

$$2a = x^2$$

$$2 \cdot 8$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$xy = (x-2)(y+2)$$

$$xy = xy + 2x - 2y - 4$$

$$2x - 2y = 4$$

$$x - y = 2$$

$$x - y = 2$$

$$x^3 - y^3 - 6xy$$

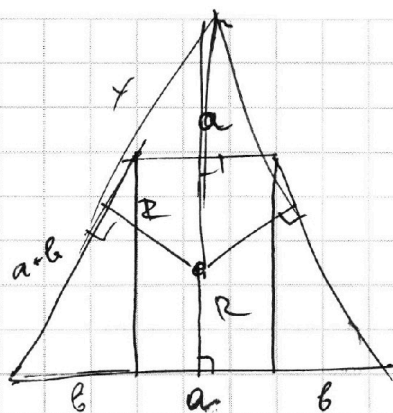


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

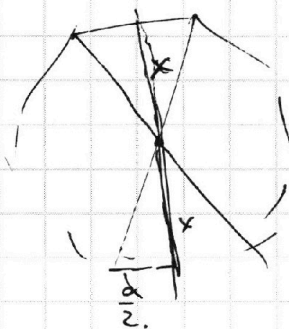
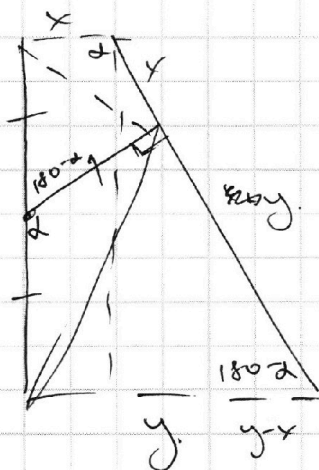
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$h^2 - \left(\frac{a}{2} + b\right)^2 =$$

x



$$S = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{a}{2} \cdot 2h =$$
$$= \frac{1}{2} x a h.$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{a+2b}.$$

$$\sqrt{(a+b)^2 - b^2} =$$
$$= x+y.$$

$$y = x \cdot \frac{a+2b}{a}.$$

$$S = \left(x + x \cdot \frac{a+2b}{a}\right) \cdot (a+b)$$
$$= x \cdot \frac{2(a+b)^2}{a}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 + 2ab = x^2 + 2xy + y^2$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{a+2b}$$

$$\frac{y}{x} = 1 + \frac{2b}{a}$$

$$y = x + x \cdot \frac{2b}{a}$$

$$a^2 + 2ab = x^2 + 2x^2 + 2x^2 \cdot \frac{2b}{a}$$

$$2R^2 - 2R^2 \cos \alpha = 2y^2 + 2y^2 \cos \alpha$$

$$2R^2 + 2R^2 \cos \alpha = 2x^2 + 2x^2 \cos \alpha$$

$$R^2 (1 - \cos \alpha) = y^2$$

$$R^2 (1 + \cos \alpha) = x^2$$

$$R = (x+y) \cdot \sin \alpha$$

$$(x+y)^2 (1 - \cos^2 \alpha) (1 + \cos \alpha) = x^2$$

$$(x+y)^2 (1 - \cos^2 \alpha) (1 - \cos \alpha) = y^2$$

$$x^2 + y^2 = 2(x+y)^2$$

 x^2 xy