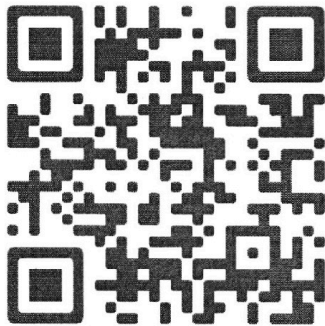




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha) (y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



1 2 3 4 5 6 7

☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть $A = \overline{aaaa}$, a - цифра

Тогда,

$$A = 1111 \cdot a = 11 \cdot 101 \cdot a$$

101 - простое, при этом степень его вхождения в $A \cdot B \cdot C$ должна быть четна. $\Rightarrow B : 101$ или $C : 101$

C - двузначное $\Rightarrow C : 101$

Значит $B : 101$. B - трехзначное, а все числа n , 3 знаков, которые делятся на 101 представляются в виде bob , где b - цифра, а o - ноль. Т.к. у нас в числе B должно быть b , то оно однозначно определяется в виде 606 .

$$A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot 101 \cdot 6 \cdot C$$

Тогда степень вхождения 11 должно быть хотя бы 2 и при этом четна для a - цифры $\Rightarrow a : 11 \Rightarrow C : 11$

Т.к. C - двузначное, то оно представимо как $\overline{cc}$, где c - цифра. Т.к. в числе C должна быть тройка, то $C = 33$

$$A \cdot B \cdot C = \underbrace{11 \cdot 101 \cdot a}_A \cdot \underbrace{101 \cdot 3 \cdot 2}_B \cdot \underbrace{11 \cdot 3}_C$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда цифра a должна включать в себя нечетное кол-во ~~единиц~~ двоек.
Это может быть:

$$a = 2$$

$$a = 8$$

Также, у нас в разложении есть 3, которую при делении можно сделать в 4 степени. Но для этого мы должны делить a на 9, а это как минимум 18. Значит $a = 2$ или $a = 8$.

Тогда числа:

$$1) \quad A = 2222 \quad B = 606 \quad C = 33$$

$$A \cdot B \cdot C = 2 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 =$$

$$= 11^2 \cdot 101^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2$$

$$A = 8888 \quad B = 606 \quad C = 33$$

$$A \cdot B \cdot C = 2^3 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 =$$

$$= 2^4 \cdot 101^2 \cdot 11^2 \cdot 3^2$$

Ответ: $(8888; 606; 33)$; $(2222; 606; 33)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☒☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} \quad (\text{No 2})$$

$$K = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{y+x}{xy} + \frac{5}{xy} = \frac{y+2+x-2}{(x-2)(y+2)} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{y+x+2-2+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$xy = (x-2)(y+2)$$

$$xy = xy - 2y + 2x - 4$$

$$2y = 2x - 4$$

$$y = x - 2$$

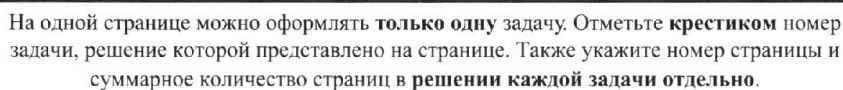
Подставим в $M = x^3 - y^3 - 6xy$

$$M = x^3 - (x-2)^3 - 6x(x-2) =$$

$$= (x - x + 2)(x^2 + x(x-2) + (x-2)^2) - 6x^2 + 12x =$$

$$= 2x^2 + 2x^2 - 4x + 2x^2 - 8x + 8 - 6x^2 + 12x = 6x^2 - 6x^2 - 12x + 12x + 8 = 8$$

Ответ: $M = 8$



СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

где K - целое
число



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

8) 1) $y = 3x - 2k$

$$\arcsin\left(\frac{x}{6}\right) + \arcsin\left(\frac{3x-2k}{2}\right) \neq \pi$$

$$\arcsin\left(\frac{x}{6}\right) < \pi - \arcsin\left(\frac{3x-2k}{2}\right)$$

Возьмём от этого синус

$$\frac{x}{6} < \frac{3x-2k}{2}$$

Правая часть ~~какая-то~~ ^{такая} ~~меньше~~, т.к.

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$$

$$x < 9x - 6k$$

$$6k < 8x$$

$$\frac{6}{8}k < x$$

Также есть огр.: $-1 \leq \frac{x}{6} \leq 1$

$$-1 \leq \frac{3x-2k}{2} \leq 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{6}{8}k < x \\ x \leq 6 \\ -6 \leq x \\ -1 \leq \frac{3x-2k}{2} \\ \frac{3x-2k}{2} \geq 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{6}{8}k < x \\ x \leq 6 \\ x \geq -6 \\ -2+2k \leq 3x \\ 3x \geq 2+2k \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{6}{8}k < x \\ x \leq 6 \\ x \geq -6 \\ \frac{-2+2k}{3} \leq x \\ x \geq \frac{2+2k}{3} \end{array} \right.$$

$$\frac{6}{8}k < 6$$

$$k < 8$$

$$\frac{-2+2k}{3} \geq -6$$

$$2k \geq -18+2$$

$$\text{или } k \geq -2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда :

$$-\frac{5}{2} < k < \frac{8}{3} \quad k \in (-20; 18) \\ y \in \mathbb{Z}$$

$$k \neq -2; k = -1; k = 0; k = 1$$

2) $y = x - 2k - x$

$$\arcsin\left(\frac{x}{6}\right) + \arcsin\left(\frac{-2k-x}{2}\right) < \pi$$

$$\arcsin\left(\frac{x}{6}\right) < \pi - \arcsin\left(\frac{-2k-x}{2}\right)$$

$$\frac{x}{6} < \frac{-2k-x}{2}$$

$$x < -6k - 3x$$

$$4x < -6k$$

$$x < -\frac{3}{2}k$$

$$x < -\frac{3}{2}k$$

$$x \leq 6$$

$$x \geq -6$$

$$\frac{-2k-x}{2} \geq -1$$

$$\frac{-2k-x}{2} \leq 1$$

$$x < -\frac{3}{2}k$$

$$\begin{aligned} -6 &< -\frac{3}{2}k \\ 6 &> \frac{3}{2}k \\ 4 &> k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2k+x &\geq -2 \\ x &\geq -2k-2 \\ 6 &\geq -2k-2 \\ 8 &\geq -2k \\ 4 &\geq k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-2k-x}{2} &\geq -1 \\ 2k+x &\leq 2 \\ x &\leq 2-2k \\ -6 &\leq 2-2k \\ -8 &\leq -2k \\ 4 &\geq k \end{aligned}$$

Тогда $k < 4$

$$k \in (-\infty; 4)$$

Ответ: при таких $y \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} 3x-y=2k \\ x+y=-2k \end{cases}$$

где $k \in \mathbb{Z}$

$$k \in (-\infty; 4) \cup \{18\} \cup (-20; 18)$$

$$\Rightarrow k \in (-\infty; 4) \cup (4; 18)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

Пусть x — кол-во ^{дополнительно} одноклассников
 Пусть k — кол-во выделенных билетов на концерт

Вероятность в начале месяца:

C_x^4 — всего исходов выбрать 4 случайных

C_{x-2}^2 — все исходы отдать 2 билета Пете и Васе, а оставшиеся отдать одноклассникам

$$\text{Вероятность: } \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{\frac{(x-2)!}{(x-4)! \cdot 2!}}{\frac{x!}{(x-4)! \cdot 4!}} =$$

$$= \frac{(x-2)! \cdot (x-4)! \cdot 4!}{x! \cdot (x-4)! \cdot 2!} = \frac{(x-2)! \cdot 4!}{x! \cdot 2!}$$

Вероятность в конце месяца:

C_x^{4+k} — всего исходов выбрать $4+k$ случайных

C_{x-2}^{2+k} — с Петей и Васей

Вероятность:

$$\frac{C_{x-2}^{2+k}}{C_x^{4+k}} = \frac{\frac{(x-2)!}{(x-4-k)! \cdot (2+k)!}}{\frac{x!}{(x-4-k)! \cdot (4+k)!}} = \frac{(x-2)! \cdot (4+k)!}{x! \cdot (2+k)!}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Нам известно, что вероятность увеличилась
6 раз:

$$6 \cdot \frac{(x-2)! \cdot 4!}{x! \cdot 2!} = \frac{(x-2)! \cdot (4+k)!}{x! \cdot (2+k)!} \quad | : \frac{(x-2)!}{x!}$$

$$6 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2+k) \cdot (3+k) \cdot (4+k)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2+k)}$$

$$6 \cdot 12 = (3+k)(4+k)$$

$$72 = 12 + 7k + k^2$$

$$k^2 + 7k - 60 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 60}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

$$k_1 = -12$$

$$k = 5$$

не подходит
по условию

значит, добавили 5 билетов; Тогда ~~еще~~ всего
их было в конце месяца вывели

$$4 + 5 = 9 \text{ билетов}$$

Ответ: 9



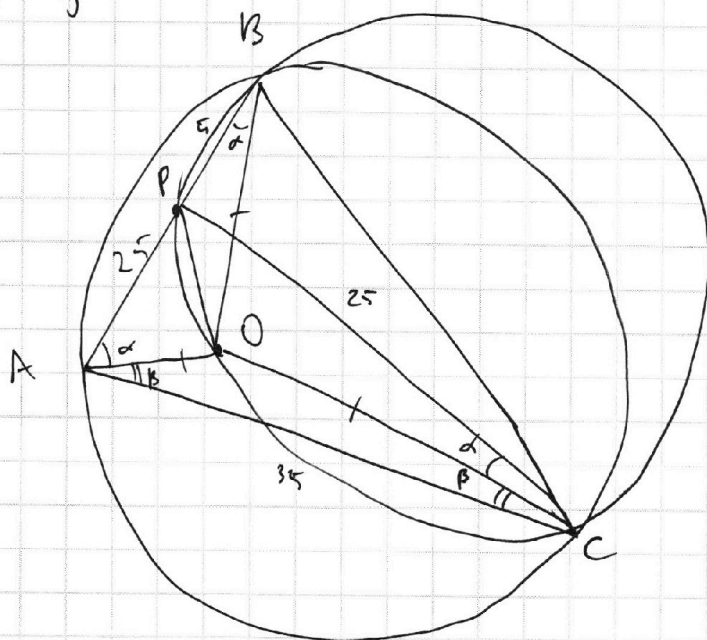
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5



$$PB = 5$$

$$AP = 25$$

$$AC = 35$$

выбрав

$$\angle BAO = \alpha$$

$$\angle CAO = \beta$$



$$\angle ABO = \alpha \text{ т.к.}$$

$$AO = OB \text{ как}$$

радиус

$$\angle OAC = \angle OCA = \beta$$

но тогда не причина

проблем PC. $\angle PCO \neq \angle PBO = \alpha$ т.к.

$\angle OCB$ - вписан $\Rightarrow \angle BAC = \alpha + \beta$ ~~как впис.~~ $\Rightarrow \angle PCA = \alpha + \beta$
 $\Rightarrow \angle BAC = \angle PCO = \angle PBO = \alpha \Rightarrow \angle BAC = \angle PCA = \alpha + \beta$
 как впис.



$$AP = PC \text{ как } P/\delta$$

но т.к. cos.:

$$PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2 \cdot AP \cdot AC \cdot \cos(\alpha + \beta)$$

$$25^2 = 25^2 + 35^2 - 2 \cdot 25 \cdot 35 \cdot \cos(\alpha + \beta) \quad | : 25$$

$$25 = 25 + 49 - 2 \cdot 35 \cdot \cos(\alpha + \beta)$$

$$49 = 70 \cos(\alpha + \beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{7 \cdot 7}{7 \cdot 10}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{7}{10}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☒☐☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Тога } \sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{49}{100}} = \sqrt{\frac{51}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

$$\text{Тога } S_{ABC} = AB \cdot AC \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(\alpha + \beta) =$$

$$= 30 \cdot 35 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{51}}{10} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 35 \cdot \sqrt{51} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{105\sqrt{51}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

~~$(x + 5\sqrt{2})(y + 5\sqrt{2})$~~

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cdot \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \cdot \sin \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 169 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x \leq -5\sqrt{2} \cdot \cos \alpha \\ y \geq -5\sqrt{2} \cdot \sin \alpha \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -5\sqrt{2} \cdot \cos \alpha \\ y \leq -5\sqrt{2} \cdot \sin \alpha \end{cases} \\ x^2 + y^2 \leq 169 \end{cases}$$

Последнее неравенство задает окружность с центром $(0; 0)$ и радиусом 13

Заметим, что первая система совокупность задает собой две "четверти" плоскости, которые ограничены прямыми, параллельными осям координат. Движение этих прямых ограничено косинусом и синусом.

Давайте рассмотрим крайние ~~положения~~ позиции этих прямых:

1) $\cos \alpha = 1$ $\sin \alpha = 0$

2) $\cos \alpha = -1$ $\sin \alpha = 0$

3) $\cos \alpha = 0$ $\sin \alpha = 1$

4) $\cos \alpha = 0$ $\sin \alpha = -1$

5) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

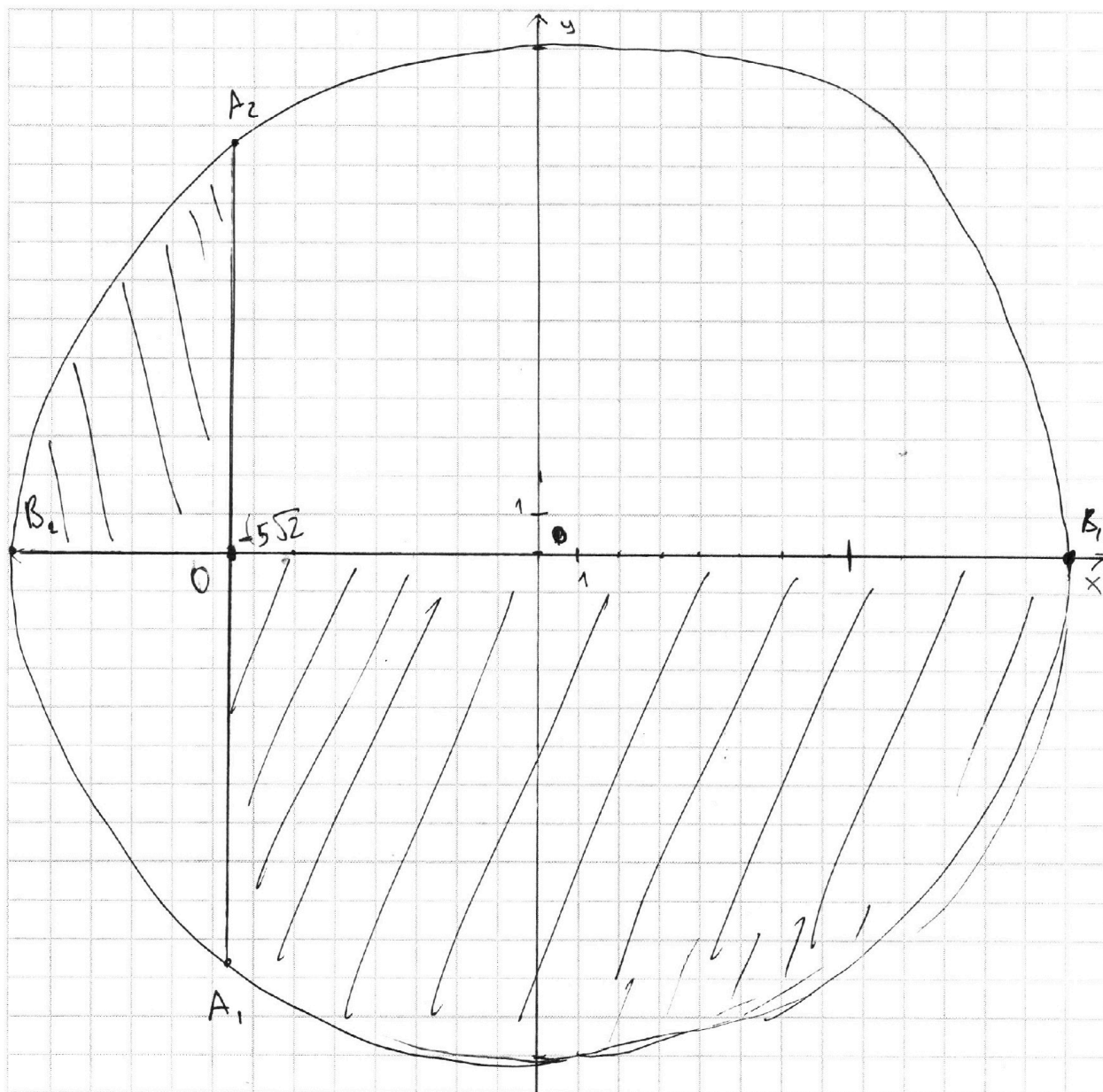


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



По сути первые 4 случая симметричны относительно ~~всех~~ начала координат (одна фигура задается с помощью одной оси координат и прямой $y = \pm 5\sqrt{2}$ или $x = \pm 5\sqrt{2}$). Поэтому рассмотрим на графике первый ($\cos \alpha = 1$; $\sin \alpha = 0$)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
3 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Давайте искать периметр этой фигурки.

Обозначим точки как на чертеже $A_1; A_2; B_1; B_2; O$

$$B_1 = (13; 0) \quad B_2 = (-13; 0) \quad O = (-5\sqrt{2}; 0)$$

$$A_2(x_1; y_1)$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 169$$

$$x_1 = -5\sqrt{2}$$

$$50 + y_1^2 = 169$$

$$y_1^2 = 119$$

$$y_1 = \sqrt{119} \Rightarrow A_2 = (-5\sqrt{2}; \sqrt{119})$$

Аналогично $A_1 = (-5\sqrt{2}; -\sqrt{119})$

Найдем угол $\angle B_2 A_1 A_2 = \arccos \frac{A_1 O}{B_2 O} = \arccos \frac{\sqrt{119}}{13-5\sqrt{2}}$

$$= \arccos \left(\frac{\sqrt{119}}{13-5\sqrt{2}} \right)$$

Тогда угол $B_2 A_2$ — это $2 \arccos \left(\frac{\sqrt{119}}{13-5\sqrt{2}} \right)$

Значит угол $A_1 B_1$ — это $\pi - 2 \arccos \frac{\sqrt{119}}{13-5\sqrt{2}}$

Но также π — это угол $13 \cdot 2 \arccos \frac{\sqrt{119}}{13-5\sqrt{2}}$

Тогда $A_1 B_1$ — это $13 \cdot (\pi - 2 \arccos \frac{\sqrt{119}}{13-5\sqrt{2}})$

Значит весь периметр:

$$O A_1 + O B_1 + O B_2 + O A_2 + A_1 B_1 + B_2 A_2 =$$

$$2\sqrt{119} + 13 + 5\sqrt{2} + 13 - 5\sqrt{2}$$

$$= 2\sqrt{119} + 13 + 5\sqrt{2} + 13 - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{119} + 13 \cdot 2 \arccos \frac{\sqrt{119}}{13-5\sqrt{2}} +$$

$$+ 13 \cdot (\pi - 2 \arccos \frac{\sqrt{119}}{13-5\sqrt{2}}) = 2\sqrt{119} \cdot 2 + 26 + 13\pi$$



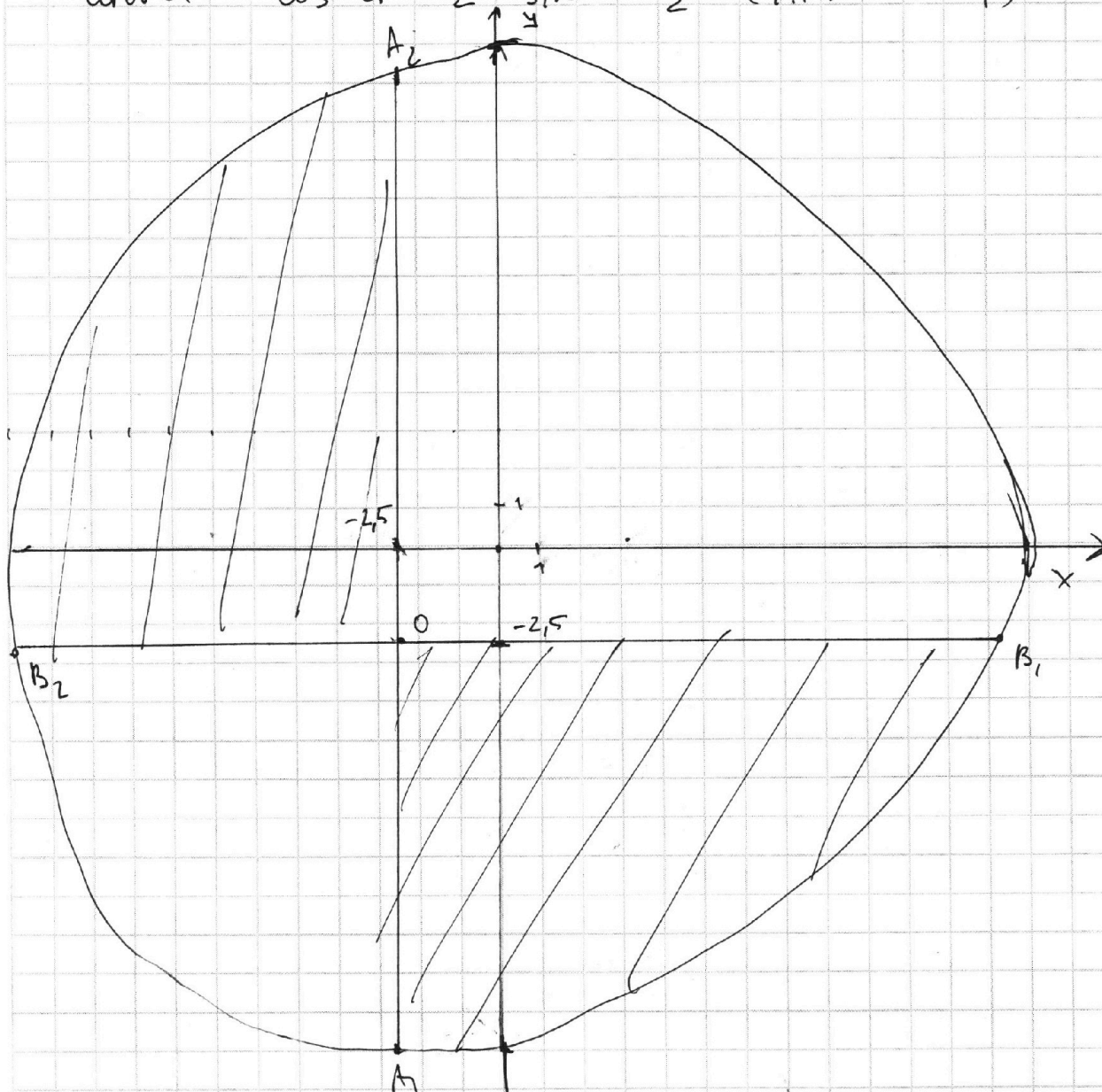
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дайте теперь номером так,
чтобы $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (т.е. $\alpha = \frac{\pi}{4}$)



Дайте номер червяк той фигуры)
 $O = (-2.5; -2.5)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
5 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что сумма дуг $\overline{A_2 B_2}$ и $\overline{A_1 B_1}$ по дуге — это 13π (исходя из предыдущих вычислений). Остатке найти дуги $A_2 A_1$ и $B_2 B_1$.

$A_1(x_1; y_1)$:

$$x_1^2 + y_1^2 = 169$$

$$\frac{25}{4} + y_1^2 = 169$$

$$y_1^2 = \frac{13^2 \cdot 4 - 25}{4}$$

$$y_1^2 = \frac{651}{4}$$

$$y_1 = -\frac{\sqrt{651}}{2}$$

$$A_1\left(-\frac{5}{2}; -\frac{\sqrt{651}}{2}\right)$$

Аналогично

$$A_2\left(-\frac{5}{2}; \frac{\sqrt{651}}{2}\right)$$

$B_2(x_2; y_2)$

$$x_2^2 + y_2^2 = 169$$

$$x_2^2 + \frac{25}{4} = 169$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{651}}{2}$$

$$B_2\left(-\frac{\sqrt{651}}{2}; -\frac{5}{2}\right)$$

Аналогично

$$B_1\left(\frac{\sqrt{651}}{2}; -\frac{5}{2}\right)$$

Тогда $A_1 A_2 = \sqrt{651}$ и $B_1 B_2 = \sqrt{651}$

Тогда общий периметр это $13\pi + \sqrt{651} \cdot 2$

Сравним их:

$$2\sqrt{119} + 26 + 13\pi \quad \vee \quad \sqrt{651} \cdot 2 + 13\pi$$

$$2\sqrt{119} + 26 \quad \vee \quad 2\sqrt{651}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
 6 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{119} + 13 \sqrt{651}$$

199

$$119 + 26\sqrt{119} \sqrt{651} + 163 \sqrt{651}$$

$$26\sqrt{119} \sqrt{363}$$

$$26^2 \cdot 119 \sqrt{363^2}$$

$$60344 \sqrt{131769}$$

Т.е. периметр второй фигуры больше.
 Если α мы будем двигать эти прямые
 дальше, они будут сдвигаться к

суммации, где одна из прямых это

$$x \geq 0 \text{ и } y = 0 \Rightarrow \text{она будет уменьш.}$$

$$\text{т.к. } \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} - \text{это "сердечко"}$$

Значит, максимальный периметр это

$$\sqrt{651} + 13\pi \text{ и достигают он при}$$

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$$

~~Ответ~~

$$\text{Ответ: } \max(M) = \sqrt{651} + 13\pi$$

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa}$$

$$B = \overline{bbb} \text{ или } \overline{bbb} \text{ или } \overline{bbb}$$

$$C = \overline{3c} \text{ или } \overline{c3}$$

$$a \cdot 1111 \cdot (600 + \cancel{1116}) \cdot (30 + c)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+2} + \frac{5}{xy} - \frac{5}{(x-2)(y+2)} = 0$$

$$\frac{x-2-x}{x(x-2)} + \frac{y+2-y}{(y+2)y} + \frac{5(x-2)(y+2)-5xy}{xy(x-2)(y+2)} = 0$$

$$-\frac{2}{x(x-2)} + \frac{2}{(y+2)y} + \frac{5xy + 10x - 10y - 20 - 5xy}{xy(x-2)(y+2)} = 0$$

$$\frac{-2y(y+2) + 2(x-2)x}{xy(y+2)(x-2)} + \frac{10x - 10y - 20}{xy(x-2)(y+2)} = 0$$

$$x^2 + 3y$$

$$\frac{10x - 10y - 20 - 2y^2 - 4y + 2x^2 - 4x}{xy(y+2)(x-2)} = 0$$

$$3x - y^2$$

$$\frac{6x - 14y - 2y^2 + 2x^2 - 20}{xy(y+2)(x-2)} = 0$$

$$2x^2 + 6x - (2y^2 + 14y) - 20 = 0$$

$$x^2 + 3x - (y^2 + 7y) - 10 = 0$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy = x(x^2 - 3y) - y^3($$

$$x^2 + 3x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arcsin\left(\frac{x}{6}\right) + \arcsin\left(\frac{3x-2k}{2}\right) < \pi$$

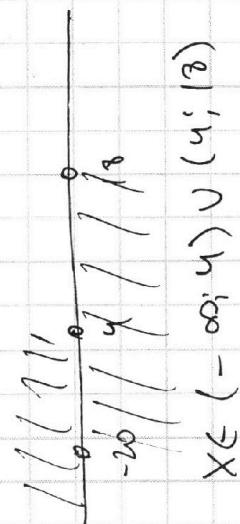
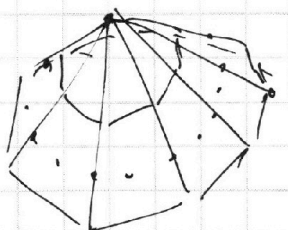
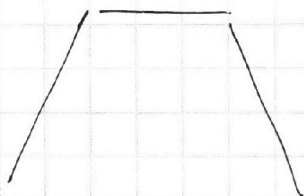
$$\arcsin\left(\frac{x}{6}\right) < \pi - \arcsin\left(\frac{3x-2k}{2}\right)$$

$$\frac{x}{6} < \frac{3x-2k}{2}$$

$$x < 9x - 6k$$

$$6k < 8x$$

$$3\frac{3}{4}k < x$$



$$\sin(x) = -\sin(-x)$$
$$\sin(-x) = -\sin(\pi - x)$$

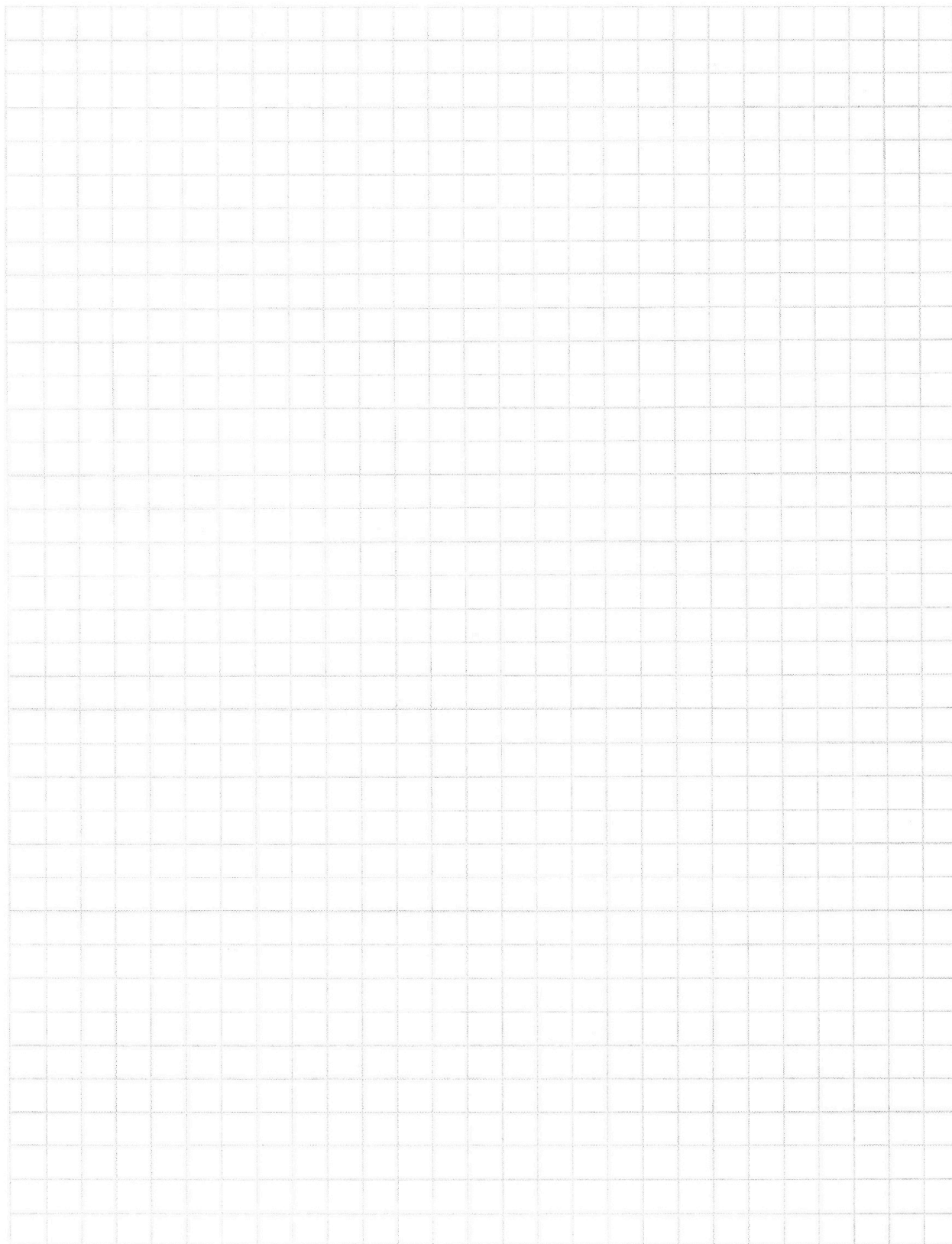


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



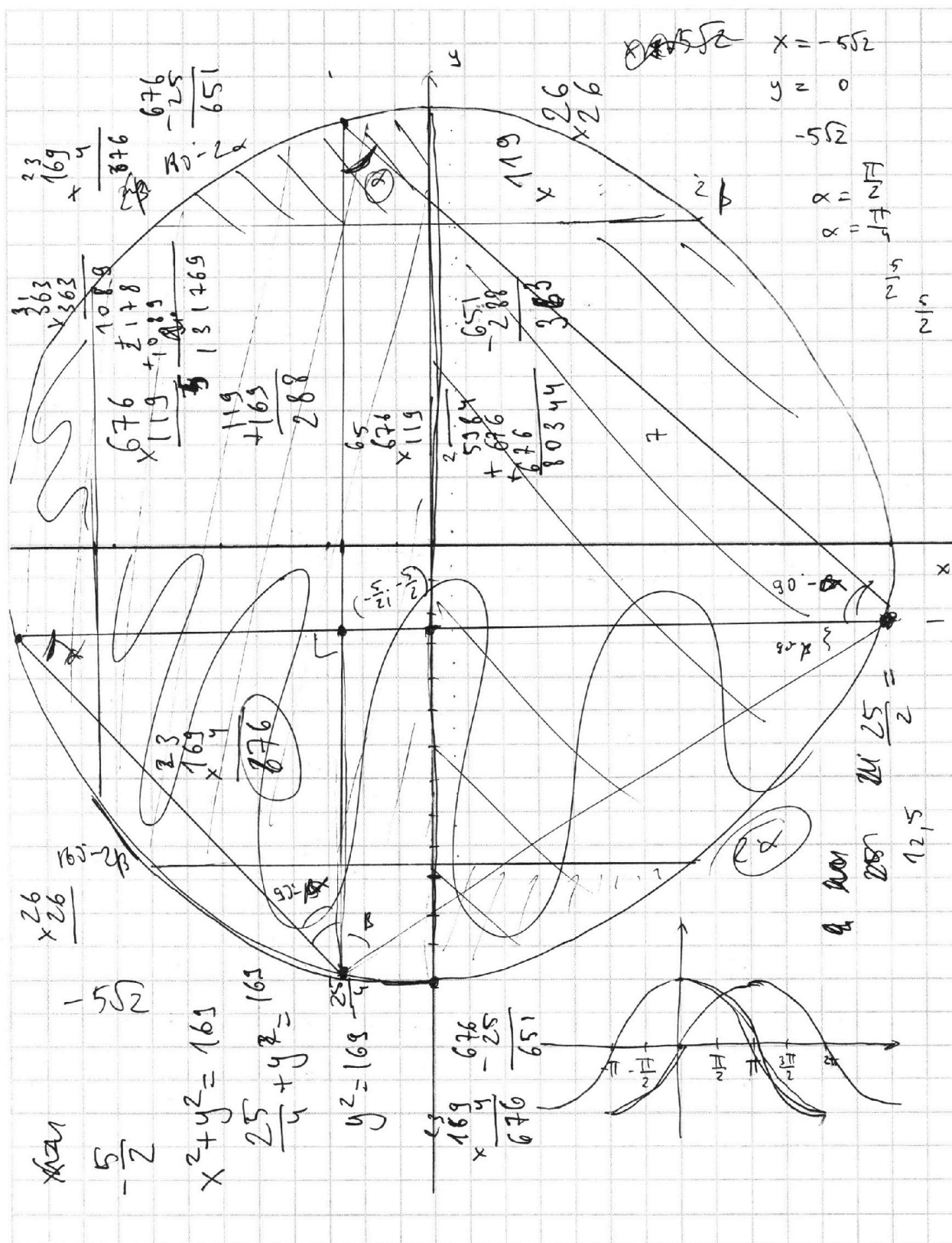


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



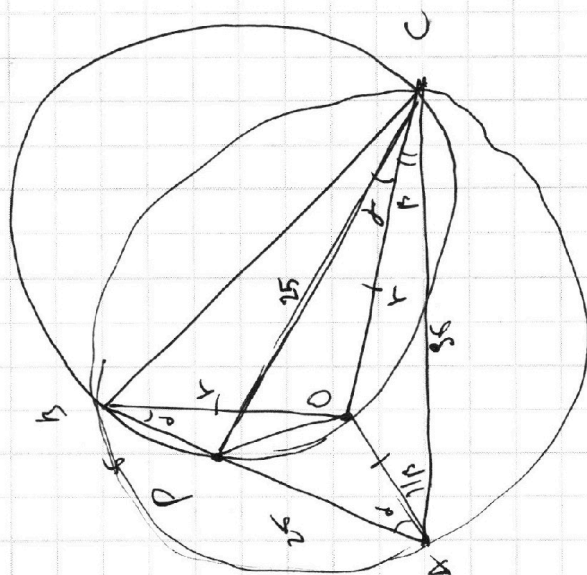


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$PB \cdot OC + PO \cdot BC = PC \cdot BO$$

$$5r + PO \cdot BC = 25$$

$$35^2 = 2 \cdot 25^2 - 2 \cdot 25^2 \cdot \cos \alpha$$

$$1225 = 625 - 2 \cdot 25 \cdot \cos \alpha$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 35 \\ \hline 175 \\ 1050 \\ \hline 1225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 25 \\ \hline 125 \\ 625 \\ \hline 1250 \end{array}$$

$$625 \cdot \cos \alpha =$$

$$1225 = 1250 - 1250 \cdot \cos \alpha$$

$$1250 \cdot \cos \alpha = 25$$

$$\cos \alpha = \frac{25}{1250}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{50}$$

$$\cos \alpha = 0,02$$

$$\begin{array}{r} 250 \\ -1250 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 3 \\ \hline 105 \end{array}$$

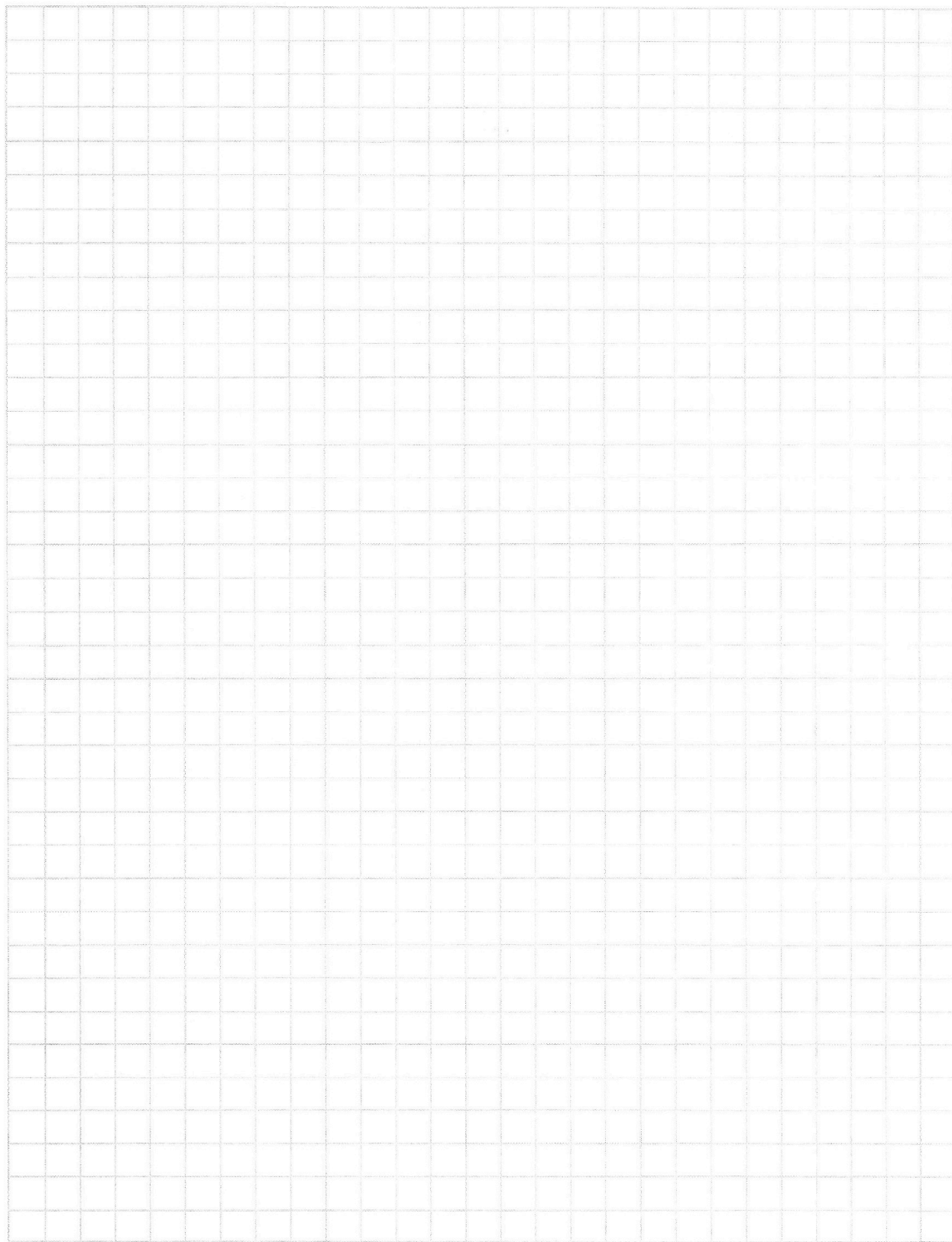


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

x - одиннадцатиклассников

k - кол-во билетов, на которые увеличили

C_x^4 - всего

C_{x-2}^2 - подходящих

$\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4}$ - была вероятность

C_x^{4+k}

C_{x-2}^{2+k}

$\frac{C_{x-2}^{2+k}}{C_x^{4+k}}$ - стала

$$6 \cdot \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{C_{x-2}^{2+k}}{C_x^{4+k}}$$

$$6 \cdot \frac{\frac{(x-2)!}{(x-4)! \cdot 2!}}{x!} = \frac{\frac{(x-2)!}{(x-4-k)! \cdot (2+k)!}}{x!}$$

$$6 \cdot \frac{\frac{1}{2!}}{\frac{1}{4!}} = \frac{\frac{1}{(2+k)!}}{\frac{1}{(4+k)!}}$$

$$6 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2+k) \cdot (3+k) \cdot (4+k)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2+k)}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

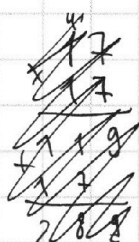
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6 \cdot 12 = (3+k)(1+k)$$

$$72 = 12 + 7k + k^2$$

$$k^2 + 7k - 60 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 60}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} =$$

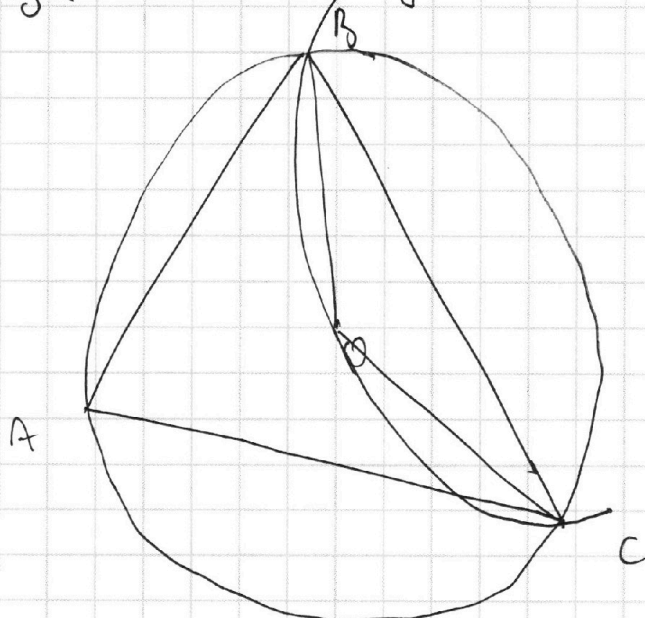


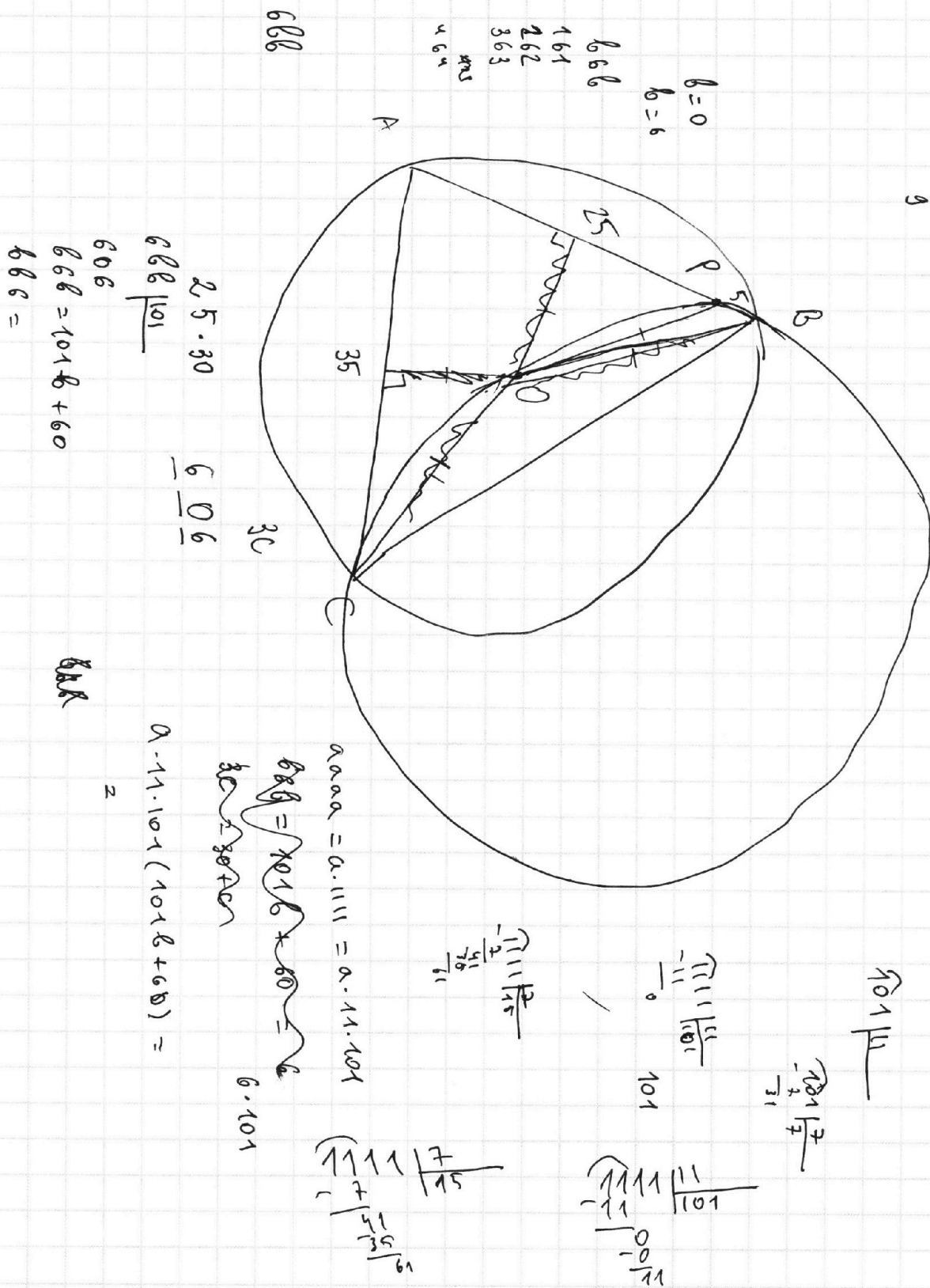
$$= \frac{-7 \pm 17}{2}$$

$$k_1 = -12 \quad k_2 = 5$$

↑
не подходит
по условию

Тогда билетов увеличилось на 5





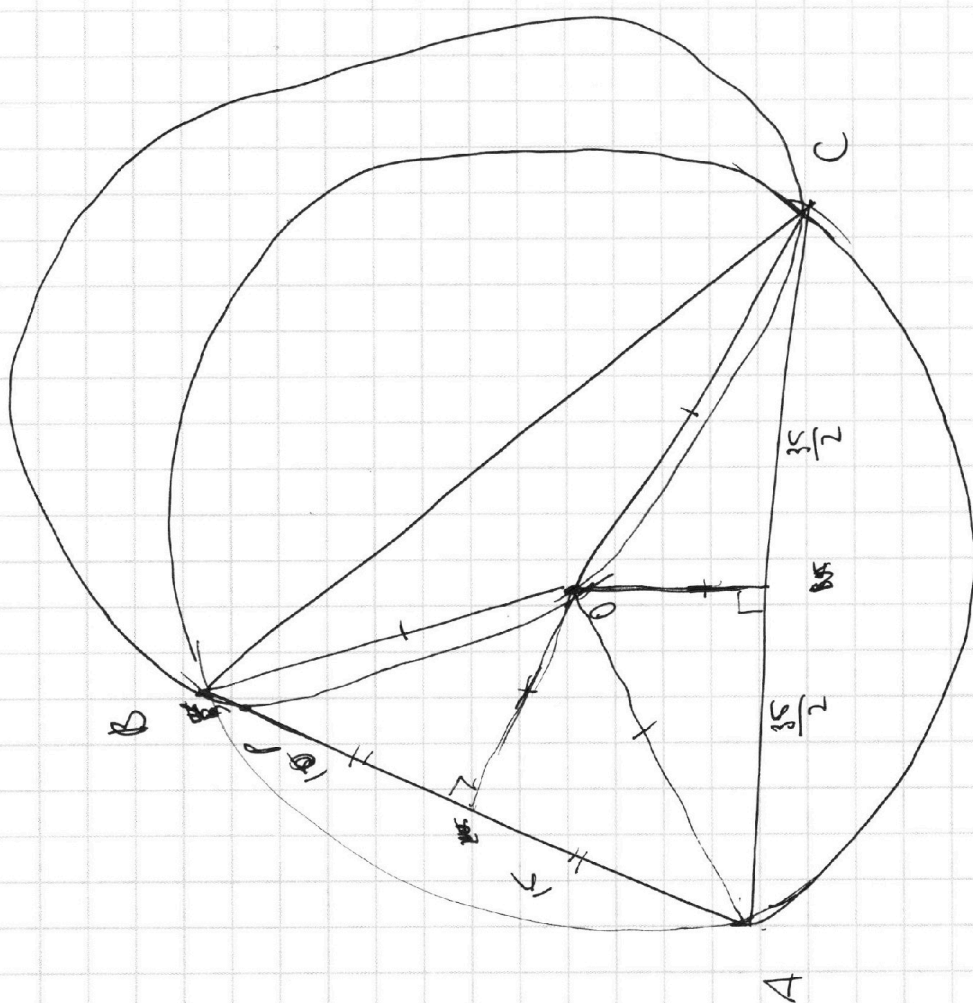


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{дан } \alpha = 45^\circ$$

$$\begin{cases} x y \leq 0 \\ \begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$x = -5\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$y = -5\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$\cos \alpha \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

45° -5\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2}

	0	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$		
cos	1				

$$\begin{cases} x \leq -5\sqrt{2} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

-5\sqrt{2}

$$\alpha \geq 0$$

$$\begin{cases} x \leq -5\sqrt{2} \\ y \geq 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 3x - y = 2k \\ x + y = -2k \end{cases}$$

ВЖА
 $y = 3x - 2k$

$$\arcsin\left(\frac{x}{6}\right) + \arcsin\left(\frac{3x-2k}{2}\right)$$

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{6} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{2} \leq 1 \end{cases}$$

$$y = 3x - 2k$$

$$\begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ -2 \leq 3x - 2k \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ -2 + 2k \leq 3x \leq 2 + 2k \end{cases}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{(y+2)} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x-2+y+2+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$xy = (x-2)(y+2) \quad (x-2)$$

$$xy = xy - 2y + 2x - 4 = x^2 - 2x^2 - 4x^2 + 8x + 4x - 8 =$$

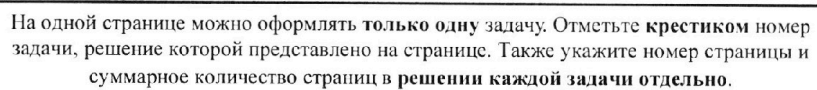
$$2y = 2x - 4 \quad = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

$$y = x - 2$$

$$M = 2x(2x) x^3 - (x-2)^3 - 6x(x-2) =$$

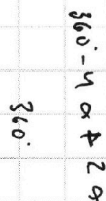
$$= x^3 - x^3 + 6x^2 - 12x + 8 - 6x^2 + 12x =$$

$$= 8$$



СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arcsin\left(\frac{x}{6}\right) + \arcsin\left(\frac{3x-2k}{2}\right) < \pi$$

~~16/11~~

