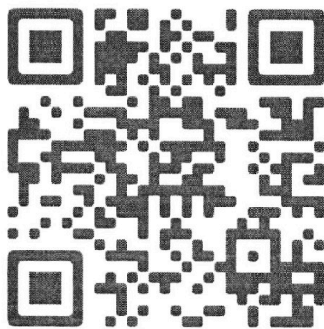




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

1) A - четырехзначное число, составленное из одинаковых цифр $\Rightarrow$
 $A = 1111 \cdot k_1$, где $k_1 \in \mathbb{Z}$, $1 \leq k_1 \leq 9$.

2) $1111 = 101 \cdot 11$, 101 - простое число $\Rightarrow$ чтобы $A \cdot B \cdot C$ было квадратом, либо B , либо C тоже должно делиться на 101 . C - двухзначное, т.е. $C < 101 \Rightarrow B : 101$

3) $B : 101$, а оно трехзначное, содержит $1 \Rightarrow B = 101$,
т.е. из чисел $101 \cdot 1$, $101 \cdot 2$, $101 \cdot 3$ и т.д. до $101 \cdot 9$ только оно содержит 1 .

4) $B : 11$, $A : 11 \Rightarrow C$ должно $: 11$, из двухзначных чисел, которые содержат 5 , такое только $55 \Rightarrow C = 55$.

5) $C : 5$, $B : 5 \Rightarrow A : 5 \Rightarrow k_1 = 5 \Rightarrow A = 5555$.
н.н. среди $k_1 \cdot 1111$ только оно $: 5$

В итоге ответ: $A = 5555$, $B = 101$, $C = 55$.

Других решений нет (т.е. все числа из условия окр. одинаково), а наша тройка работает, т.е.

$A \cdot B \cdot C = 5555 \cdot 101 \cdot 55 = 5^2 \cdot 101^2 \cdot 11^2 = (5 \cdot 101 \cdot 11)^2$ - верно, это квадрат.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

~~Итого~~ По условию:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

Тогда: 1) либо $x+y+1=0$, но это невозможно, т.к. x, y — положительные.

2) либо $xy = (x-3)(y+3)$

$$xy = xy + 3x - 3y - 9$$

~~Итого~~ $x - y - 3 = 0$
 $y = x - 3$

Подставим в M:

$$\begin{aligned} & x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3) = x^3 - (x-3)(x^2 - 6x + 9 + 9x) = \\ & = x^3 - (x-3)(x^2 + 3x + 9) = x^3 - (x^3 + 3x^2 + 9x - 3x^2 - 9x - 27) = \\ & = \cancel{x^3} - \cancel{x^3} - \cancel{3x^2} + \cancel{9x} + \cancel{3x^2} + \cancel{9x} + 27 = \mathbf{27} \end{aligned}$$

Ответ: $M = 27$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3 (начало)

$$a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$(\sin^2(\pi x) - \cos^2(\pi x)) = (\cos \pi y \cdot \cos \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x)$$

$$-\cos(2 \cdot (\pi x)) = \cos(\pi y - \pi x)$$

$$\cos(\pi y - \pi x) + \cos(2\pi x) = 0$$

$$2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi x + \pi y - \pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi x - \pi y + \pi x}{2}\right) = 0$$

$$1) \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0$$

$$2) \cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi x + \pi y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x + y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$3\pi x - \pi y = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$3x - y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: пары $(x; y)$, удовлетворяющие условию: все пары действительных чисел такие, что либо $x + y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$, либо $3x - y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}$.

$$b) \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

Зная ограничения $\arccos$: $\arccos \frac{x}{4} \leq \pi, \arccos \frac{y}{9} \leq \pi \Rightarrow$

случай, где $\begin{cases} \arccos \frac{x}{4} = \pi \\ \arccos \frac{y}{9} = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{4} = -1 \\ \frac{y}{9} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -9 \end{cases}$

Значит, нам нужно отобрать $(x; y)$, удовлетво-



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3 (продолжение)

рядящие $(\sin \pi x - \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$,
лежащие в промежутках $-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$, $-1 \leq \frac{y}{3} \leq 1$, или

исключая пару $(-4, -9)$:

1) $x+y = 1+2k$, $k \in \mathbb{Z}$: любая пара нечётного числа с чётным,

2) $3x-y = 1+2n$, $n \in \mathbb{Z}$: любая пара нечётного числа с чётным.

Получается, пар всего (кол-во чётн. x) $\cdot$ (кол-во чётн. y) $= 1 +$
 $+ (\text{кол-во нечётн. } x) \cdot (\text{кол-во чётн. } y) = 3 \cdot 10 - 1 + 4 \cdot 9 =$
 $= 65$

Ответ: 65 пар.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4 (начало)

Пусть всего одинадцатиклассников x человек, а выделено билетов было y . Найдем y .

1) Вероятность в начале месяца Пете и Васе ~~была~~ попасть на концерт была равна (кол-во случаев, где Петья и Вася оба попали на концерт) / (кол-во случаев всех). Мы выбираем 4 человек из x одинадцатиклассников, т.е. кол-во всех случаев = C_x^4 .

кол-во случаев, где Петья и Вася попадут = C_{x-2}^2 потому что Петью и Васю на два билета мы уже выбрали, осталось выбрать 2-ух человек из оставшихся $(x-2)$ одинадцатиклассников.

$$\text{Получается, вероятность в начале месяца} = \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{(x-2)! \cdot (x-4)! \cdot y!^{3 \cdot 4}}{(x-4)! \cdot 2! \cdot x!} = \frac{3 \cdot 4}{(x-1)x}$$

2) Вероятность в конце месяца вычисляется аналогично, просто вместо 4 билетов у нас $(4+y)$ билетов, т.е: кол-во всех случаев = C_x^{4+y}

кол-во случаев, где Петья и Вася попадут = C_{x-2}^{y+2}

$$\text{А вероятность, что Петья и Вася попадут на концерт в конце месяца} = \frac{C_{x-2}^{y+2}}{C_x^{4+y}} = \frac{(x-2)! \cdot (y+2)! \cdot (x-4-y)!}{(y+2)! \cdot (x-2-(y+2))! \cdot x!} = \frac{(y+2)! \cdot (y+2)!}{(x-1) \cdot x}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 4 (продолжение)

$$= \frac{(4+y)(3+y)}{(x-1)x}$$

3) Тогда по условию:

$$\frac{3 \cdot 4}{x \cdot (x-1)} \cdot 3,5 = \frac{(4+y)(3+y)}{x(x-1)}$$

$$12 \cdot 3,5 = y^2 + 7y + 12$$

$$y^2 + 7y - 30 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 + 4 \cdot 30}}{2} = \begin{cases} 3 - \text{ответ} \\ -10 - \text{нестрогий} \end{cases}$$

| $x(x-1) \neq 0$, т.е. 11-мес-
сиков минимум двое
(Петя и Вася)

Ответ: билетов на концерт было выделено 3 в
конце месяца.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 6 (начало)

$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

Рассмотрим график фигуры $\Phi(\alpha)$:

1) $x^2 + y^2 \leq 9$ — закрашенная окружность с центром в т. $(0;0)$ и радиусом 3.

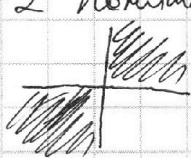
2) $(x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0$

~~или~~. С помощью метода областей:

$x = 2\cos\alpha$ — вертикальная прямая.

$y = 2\sin\alpha$ — горизонтальная прямая.

А закрасятся две области из четырёх, в которых $(x-2\cos\alpha)$ и $(y-2\sin\alpha)$ одного знака.

Из того, что $-2\cos\alpha \geq -2$, $-2\sin\alpha \geq -2$ понятно, что закрасятся следующие области: 
(правая верхняя и левая нижняя).

Получается, что наша фигура (б.о.о) выглядит примерно так:



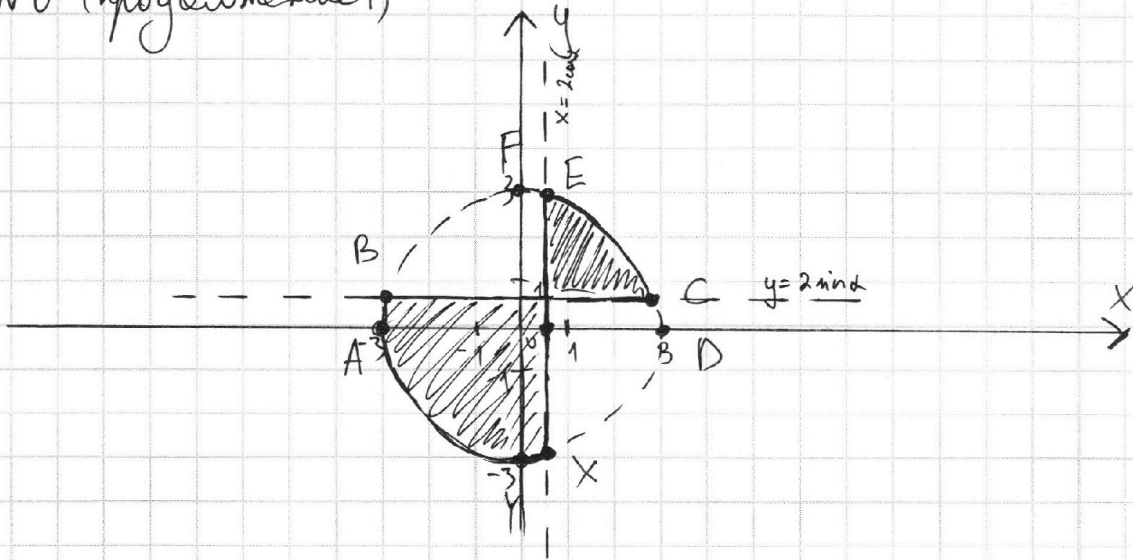
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6 (продолжение)

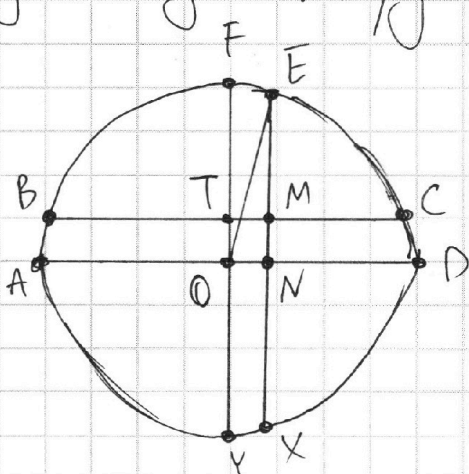


Поставим точки A, B, C, D, E, F, X, Y для упрощения на-
числения.

Заметим, что $\sqrt{AB} = \sqrt{CD}$, $\sqrt{FE} = \sqrt{XY}$.

Тогда часть периметра, лежащая на окружности,
всегда равна $\sqrt{AY} + \sqrt{FD} = \pi r = 3\pi$.

Т.е. величина периметра зависит только от
суммы длин хорд. Найдем её:



$$EX = EN + NX \xrightarrow{\text{в силу симметрии}} 2 \cdot EN$$

Найдем EN в $\triangle OEN$ по т. Пифагора:

$$EN = \sqrt{OE^2 - ON^2} = \sqrt{r^2 - ON^2}$$

А мы помним, что $EX \in$ прямой

$$x = 2 \cos \alpha$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
3 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 (продолжение 2)

значит, $ON = |2 \cos \alpha|$

$$\text{Тогда } EN = \sqrt{r^2 - ON^2} = \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha}$$

$$\text{Аналогично } CT = \sqrt{r^2 - OT^2} = \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}$$

Тогда сумма хорд равна $2 \cdot \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} + 2 \cdot \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}$

Значит, нам нужно найти максимум функции

$$2(\sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha})$$

Для этого возьмем производную:

$$(2(\sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}))' = 2 \cdot ((9 - 4 \cos^2 \alpha)^{\frac{1}{2}})' + ((9 - 4 \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}})'$$

$$((9 - 4 \cos^2 \alpha)^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot (9 - 4 \cos^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-4 \cdot 2 \cdot \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha)) = \frac{1}{2} \cdot (9 - 4 \cos^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}} \cdot 8 \cos \alpha \cdot \sin \alpha = 4 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot (9 - 4 \cos^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}}$$

$$((9 - 4 \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot (9 - 4 \sin^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-4 \cdot 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha) = -4 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (9 - 4 \sin^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}}$$

$$2 \cdot ((9 - 4 \cos^2 \alpha)^{\frac{1}{2}})' + ((9 - 4 \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}})' =$$

$$= 2 \cdot (4 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot (9 - 4 \cos^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}} - 4 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (9 - 4 \sin^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}})$$

$$= 8 \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot ((9 - 4 \cos^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}} - (9 - 4 \sin^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}})$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
4 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6 (продолжение 3)

Приравняем к нулю, чтобы найти точки, в которых может быть максимум всей нашей функции:

$$8 \cdot \cos x \cdot \sin x \cdot \left((9 - 4 \cos^2 x)^{-\frac{1}{2}} - (9 - 4 \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} \right) = 0$$

$$1) \cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k_1, k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$2) \sin x = 0$$

$$x = \pi k_2, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$3) (9 - 4 \cos^2 x)^{-\frac{1}{2}} - (9 - 4 \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{9 - 4 \cos^2 x}} - \frac{1}{\sqrt{9 - 4 \sin^2 x}} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{9 - 4 \cos^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{9 - 4 \sin^2 x}}$$

$$\sqrt{9 - 4 \cos^2 x} = \sqrt{9 - 4 \sin^2 x}$$

$$9 - 4 \cos^2 x = 9 - 4 \sin^2 x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 0$$

$$\cos 2x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k_3, k_3 \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k_3}{2}, k_3 \in \mathbb{Z}$$

(оба подкоренных выражения всегда положительны, т.к. $-1 \leq \sin x \leq 1$, $-1 \leq \cos x \leq 1$), поэтому не надо ничего проверять для возведения в квадрат)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
5 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6 (продолжение 4)

Итого у нас имеем:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k_1, \quad \alpha_2 = \pi k_2, \quad \alpha_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k_3}{2}, \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$$

Учитывая, что $\sin$ и $\cos$ входят в выражение только во второй степени, достаточно рассматривать первую четверть.

Подставим все возможные корни в первую четверть:

① $\alpha = 0 + 2\pi k_2, \quad k_2 \in \mathbb{Z}$

$$2(\sqrt{9-4\cos^2\alpha} + \sqrt{9-4\sin^2\alpha}) = 2(\sqrt{9-4 \cdot 1} + \sqrt{9-0}) = 2(\sqrt{5} + 3)$$

② $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k_3, \quad k_3 \in \mathbb{Z}$

$$2(\sqrt{9-4\cos^2\alpha} + \sqrt{9-4\sin^2\alpha}) = 2(\sqrt{9-2} + \sqrt{9-2}) = 4\sqrt{7}$$

③ $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k_1, \quad k_1 \in \mathbb{Z}$

$$2(\sqrt{9-4\cos^2\alpha} + \sqrt{9-4\sin^2\alpha}) = 2(\sqrt{9-0} + \sqrt{9-4}) = 2(\sqrt{5} + 3)$$

Теперь сравним их, чтобы найти максимум:

$$2(\sqrt{5} + 3) \vee 4\sqrt{7}$$

$$4\sqrt{5} + 3 \vee 2\sqrt{7}$$

$$5 + 9 + 6\sqrt{5} \vee 28$$

$$36.5 \vee 14^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА
6 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6 (продолжение 5)

$$180 < 196$$

$\Rightarrow$ максимум $- 4\sqrt{7}$ и достигается он в

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

А значение всего периметра будет равно
 ~~$\sqrt{FD} + \sqrt{AY} + \text{сумма хорд}$~~ $= (3\pi + 4\sqrt{7})$

Ответ: ~~то~~ максимальное значение равно $(3\pi + 4\sqrt{7})$,
оно достигается при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4.

$$y = 3 - x$$

$$x - y - 3 = 0$$

~~$$x^3 - (3-x)^3 - 9x(3-x)$$~~

$$x = y + 3$$

$$y = x - 3$$

$$x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3)$$

$$x^3 - (x-3)(x^2 + 3x + 9) - 9x(x-3)$$

$$\frac{-36}{9}$$

$$x^3 - (x-3)(x^2 + 3x + 9 + 9x)$$

$$x^3 - (x-3)(x^2 + 12x + 9)$$

~~$$x^3 - (x^3 + 12x^2 + 9x - 3x^2 - 36x - 27)$$~~

~~$$712x^2 - (9x^2 - 27x - 27)$$~~

$$\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4}$$

}5

$$-9(x^2 + 3x + 3)$$

$$\frac{C_{x-2}^{25}}{C_{x-2}^7}$$

~~$$\frac{-27}{-18} = \frac{3}{2}$$~~

$$\frac{1}{2} \cdot (9 - 4 \cos^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}}$$

$$x^2 - 6x + 9$$

~~$$-4 \cdot 2 \cdot \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha)$$~~

$$\frac{1}{\sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}}$$

$$\sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha} - \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha}$$

...



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{9-4\cos^2\alpha} + \sqrt{9-4\sin^2\alpha}$$

$$1) \alpha=0$$

$$\sqrt{9-4} + \sqrt{9} = \sqrt{5} + 3$$

$$2) \sqrt{9-4\cdot\frac{1}{2}} + \sqrt{9-4\cdot\frac{1}{2}} = 2\sqrt{7}$$

$$3) \sqrt{9-0} + \sqrt{9-4} = \sqrt{5} + 3$$

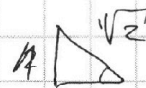
$$2\sqrt{7} \quad \sqrt{5} + 3$$

$$28 \quad \sqrt{5} + 9 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5}$$

$$14 \quad \sqrt{6\sqrt{5}}$$

$$14^2 \quad \sqrt{36 \cdot 5}$$

$$196 \quad \sqrt{180}$$



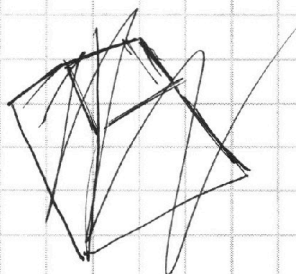
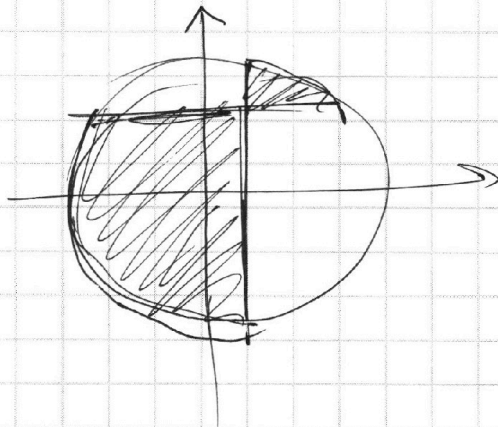
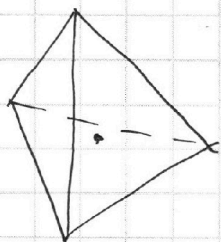
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \cdot 14 \\ \hline 56 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \cdot 136 \\ \hline 196 \\ \cdot 36 \\ \hline 5 \\ \hline 180 \end{array}$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi 4}{2}$$

$$4\sqrt{7} + \pi r = 4\sqrt{7} + 3\pi$$



$$4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \cdot (\cancel{9} - 4 \cos^2 \alpha - \cancel{9} + 4 \sin^2 \alpha)$$

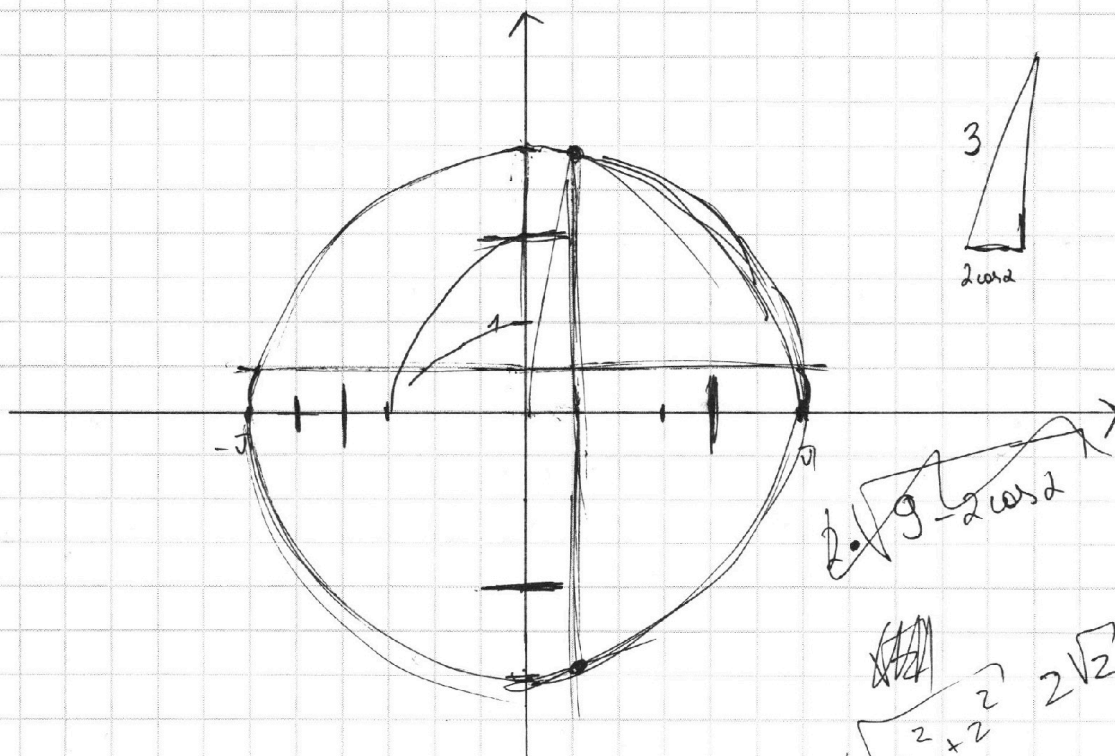


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x = 2 \cos \alpha$$

$$y = 2 \sin \alpha$$

$$\frac{\pi r}{2} \approx 4.5$$

$$2\pi r$$

$$2 \cdot \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha}$$

$$\sqrt{3^2 + 3^2}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$\sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha}$$

$$2 \left(\sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha} \right)$$

$$y = \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}$$

$$\left((9 - 4 \cos^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} \right)' =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

1111
 2222
 3333
 4444

$$\begin{array}{r} 1111 \\ - 7 \\ \hline 41 \\ - 36 \\ \hline 61 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ - 11 \\ \hline 11 \\ - 11 \\ \hline 01 \end{array}$$

~~X~~
 2
 3
 4
 5
 6
 7

$$1111 = 101 \cdot 11$$

1) $A = 1111 \cdot t$, $C = \overline{5x}$, $B = \overline{ab1}$
 $\overline{101 \cdot 11}$ $\begin{array}{r} :5 \\ 25 \end{array}$ $\begin{array}{r} :5 \\ 15 \end{array}$

~~$5455 \cdot 101$~~
 $\cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = -1$
 $\cos \pi + \cos \pi = 1 + 1 = 2$
 $\cos \pi \cdot \cos \pi + \sin \pi \cdot \sin \pi = 1 + 0 = 1$

$t \cdot 101 \cdot 11 \cdot 5^2 \cdot B = ?^2$ $B = 101 \cdot 11 \cdot t \cdot 4 = X$

2) $C = \overline{5x}$; $A = 1111 \cdot t$; $B = \overline{ab1} = 101 \cdot 11$

$?^2 = \overline{5x} \cdot 101 \cdot 11 \cdot 101$

$A = 5555$ $C = 55$ $B = 101$

$5 \cdot (101 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11) \cdot 101$

$2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

$(x-3)(y+3) = xy - 3y + 3x - 9$

$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$

$(x^3 - y^3 - 9xy) = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$

$\frac{x+y+1}{xy}$

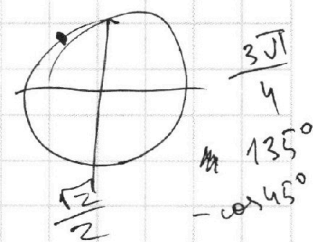
$\frac{x+y}{xy}$

$\frac{x}{xy} + \frac{y}{xy} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}$

$2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\frac{2\sqrt{xy} + 1}{xy}$

$\frac{2}{\sqrt{xy}}$



$\frac{2}{\sqrt{xy}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{y+x+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$xy = (x-3)(y+3)$$

$$xy = xy - 3x + 3y - 9$$

$$\text{Вн } y - x - 3 = 0$$

$$y = x + 3$$

$$C_{x-2}^2 = \frac{(x-2)!}{(x-4)! \cdot 2!} = \frac{(x-3)(x-2)}{2}$$

$$x^3 - (x+3)^3 - 9x \cdot (x+3) \quad C_x^4 = \frac{(x-1)!}{(x-5)! \cdot 4!} = \frac{(x-3)(x-2)(x-1)x}{4!}$$

$$(x-x-3)(x^2 + x(x+3) + (x+3)^2) - 9x(x+3)$$

$$\Pi \quad B \quad -3(x^2 + x^2 + 3x + x^2 + 6x + 9)$$

$$\frac{54}{-40}$$

$$-3(3x^2 + 9x + 9) - 9x^2 - 27x$$

$$\Pi \quad B \quad \cdot C_{x-2}^2 \quad -9x^2 - 27x - 27 - 9x^2 - 27x$$

$$C_x^4$$

$$-18x^2 - 27 \cdot 2x - 27 =$$

$$= -9 \cdot (2x^2 + 6x + 3)$$

$$\frac{(x-3)(x-2) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot (x-3)(x-2)(x-1)x}$$

$$2 \cdot (x-3)(x-2)(x-1)x$$

$$x_0 = \frac{27 \cdot 2}{-18 \cdot 2} = -\frac{27}{18} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{12}{x(x-1)}$$

$$(-27)$$

$$y_0 = -18 \cdot \frac{9}{4} + 27 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} - 27 =$$

$$= -\frac{81}{2} + 81 - 27 = 13,5$$

$$\frac{(x-2)!}{(x-2-2+y)! \cdot (2+y)!}$$

$$= \frac{(-27; -\infty)}{(x-4-y+1) \dots (x-2)} \cdot \frac{C_{x-2}^{2+y}}{C_x^{4+y}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$1) \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0$$~~

~~$$k \in \mathbb{Z} \quad 2) \sin \frac{3\pi x - \pi y}{2} = 0$$~~

~~$$\pi x + \pi y = 2\pi k$$~~

~~$$x + y = 2k$$~~

~~$$3\pi x - \pi y = 2\pi k$$~~

~~$$3x - y = 2k$$~~

~~$$3x = y + 2k$$~~

~~$$y = 3x - 2k$$~~

~~$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$~~

~~$$[0; \pi] - \arccos$$~~

использовать:

~~$$\arccos \frac{x}{4} = \pi$$~~

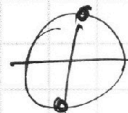
~~$$\frac{x}{4} = -1$$~~

~~$$x = -4$$~~



~~$$\arccos \frac{y}{9} = \pi$$~~

~~$$y = -9$$~~



~~$$-4 \leq x \leq 4 \quad \frac{\pi}{2} + \pi k$$~~

~~$$-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$$~~

~~$$-9 \leq y \leq 9$$~~

~~$$\cos 2\pi x + \cos(\pi y - \pi x)$$~~

~~$$2 \cdot \cos \frac{2\pi x + \pi y - \pi x}{2} \cdot \cos \frac{2\pi x - \pi y + \pi x}{2} = 0$$~~

~~$$\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0$$~~

~~$$\cos \frac{3\pi x - \pi y}{2} = 0$$~~

~~$$\pi x + \pi y = \pi + 2\pi k$$~~

~~$$x + y = 1 + 2k$$~~

~~$$x = 1 \quad y = 2$$~~

~~$$3\pi x - \pi y = \pi + 2\pi k$$~~

~~$$3x - y = 1 + 2k$$~~

~~$$(\sin \pi - \sin 2\pi) \sin \pi = (\cos \pi + \cos 2\pi) \cdot \cos \pi$$~~

~~$$(\sin(-4\pi) - \sin(-9\pi)) \cdot \sin(-4\pi) =$$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{x!}{(x-y)! \cdot (y)!} = \frac{(x-y+1) \cdot \dots \cdot x}{(y)!}$$

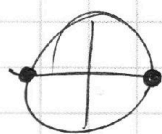
$$\frac{(x-y+1) \cdot \dots \cdot (x-2) \cdot (y)!}{(2+y)! \cdot (x-y+1) \cdot \dots \cdot x}$$

$$= \frac{(3+y)(4+y)}{(x-1)x}$$

$$\frac{12 \cdot 3,5}{x(x-1)} = \frac{(3+y)(4+y)}{x(x-1)}$$

$$42 = 12 + y^2 + 7y$$

$$y^2 + 7y - 30 = 0$$



$$2 = 14 + 4 \cdot 30 = 28 + 120 = 148$$

$$49 + 4 \cdot 30 = 169$$

$$y_{1,2} = \frac{-7 \pm 13}{2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$-4, -3, -1, 6+1$$

$$-4, -3, -1, 0$$

чем: $4 \cdot 2 + 1$

кем: $4 \cdot$

$$30 - 1 + 36 = 66 - 1$$

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos \pi y \cdot \cos \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x$$

$$-\cos(2\pi x) = \cos(\pi y - \pi x)$$

$$-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0$$

$$\cos 2\pi x - \cos(\pi y - \pi x) = 0$$

$$\text{кем: } 4 \cdot 2 + 1 = 9$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi x + \pi y - \pi x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi x - \pi y + \pi x}{2}\right) = 0$$

$$\text{кем: } 5 \cdot 2 = 10$$