



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1 Заметим, что число A представляется в виде $1111 \cdot x$, где x — это цифра $\neq 0$. ~~Это равносильно за-~~
мисл $A = 101 \cdot 11 \cdot x$. Заметим, что x не делится
ни на 101 , ни на 11 (т.к. меньше $101 \Rightarrow$ т.к. 101 и 11 —
простые числа, то, чтобы $A \cdot B \cdot C$ было квадратом, нуж-
но, чтобы $B \cdot C$ делилось на $101 \cdot 11$. C не может делиться
на 101 (т.к. меньше 1) и не может делиться на 11^2 (т.к.
меньше $1 \Rightarrow C : 11$ и $(x \neq 11$. Т.к. в задании число C есть
 5 , то $C = 55$ (если есть ещё какой-то делитель y C , то
 $(\geq 55 \cdot 2 = 110$, что невозможно) — B должно делиться на
 101 и содержать в своей записи цифру $1 \Rightarrow B = 101$.
Получил $A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 11^2 \cdot x \cdot 5$ — квадрат $\Rightarrow$ т.к. x — цифра,
то $x = 5$. Получил искомого тройка чисел — это $(5555; 101; 55)$
Ответ: $(5555; 101; 55)$

XXXXXX



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N 2 \quad \text{Из условия: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+1}{xy} = \frac{(x-3)+(y+3)+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{x(x-3)(y+3)}$$

Возьмем 2 случая:

$$\begin{cases} x+y+1=0 & \Rightarrow y=-1-x \quad (1) \\ \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)} & \Rightarrow xy = (x-3)(y+3) \Rightarrow x-y=3 \Rightarrow y=x-3 \quad (2) \end{cases}$$

~~(1) $x^3 - y^3 - 9xy = x^3 - (-1-x)^3 - 9x(-1-x) = x^3 - (-1-3x-3x^2-x^3) + 9x + 9x^2 = x^3 + 1 + 3x + 3x^2 + x^3 + 9x + 9x^2 = 2x^3 + 12x^2 + 12x + 10$~~

Случай (1) невозможен, т.к. если $x > 0$ (или $x < 0$) то $-1-x < 0$ (> 0)

$\Rightarrow y < 0$, что противоречит условию.

$$(2) \quad x^3 - y^3 - 9xy = x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3) = x^3 - (x^3 - 9x^2 + 27x - 27) - 9x^2 + 27x = 27$$

$\Rightarrow$ Ответ: 27



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4 Пусть всего было x симметричных
Почти вероятности Теме и Вале почти на кон-
церт включе игра = $\frac{C_{x-2}^2}{C_x^2}$ (м.к. исключено спон-

сор, в котором есть Тёма и Валя = количество способов
выбрать еще двух человек, то есть C_{x-2}^2 всего спон-
сор - $C_x^2 = \frac{12}{(x-2)(x-1)}$. Если в конце игры первым было

y билетов, то вероятности Теме и Вале включено-
ности на концерт = $\frac{C_{x-2}^2}{C_x^2} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)}$

~~По условию~~ $\frac{7}{2} \cdot \frac{12}{(x-2)(x-1)} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)}$

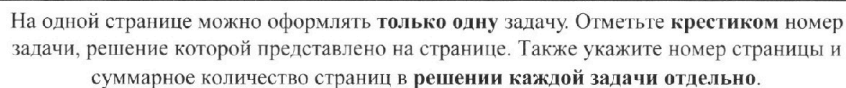
~~$\Rightarrow 42(x-2)(x-1) = y(y-1)x$~~

~~$= \frac{y(y-1)}{x(x-1)}$~~ По условию $\frac{7}{2} \cdot \frac{12}{x(x-1)} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)}$

$\Rightarrow y(y-1) = 42 \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \end{bmatrix} \Rightarrow y = 7$ (м.к. билетов

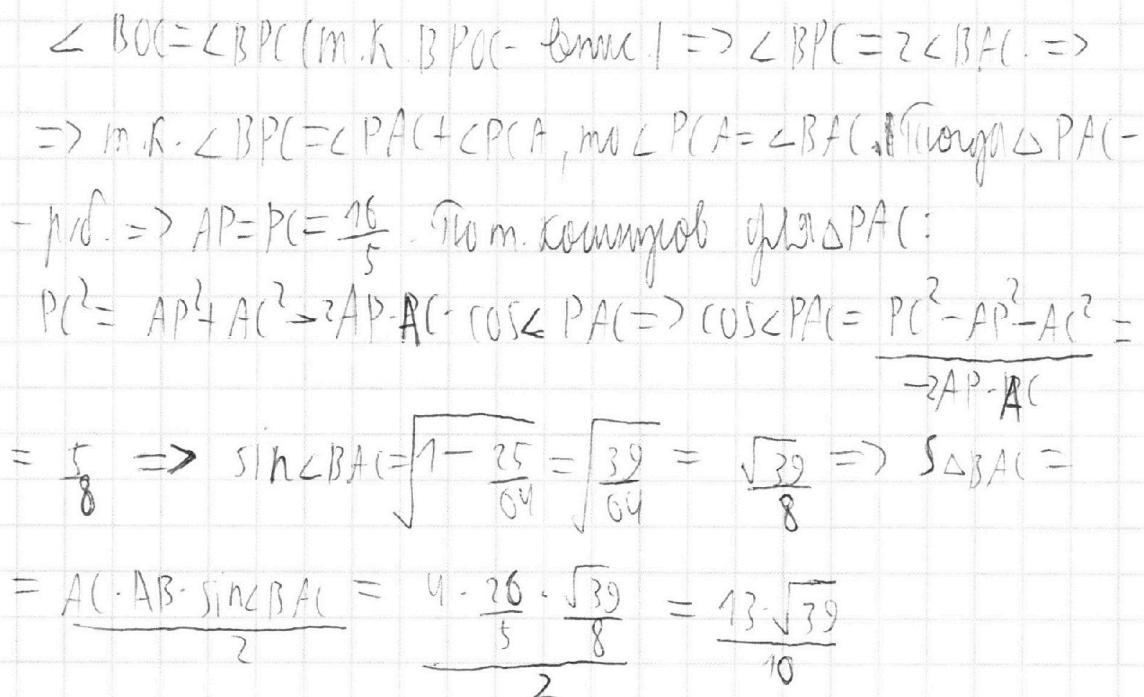
билетов > 0

билетов 7



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Ombem: $13\sqrt{39}$
10



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

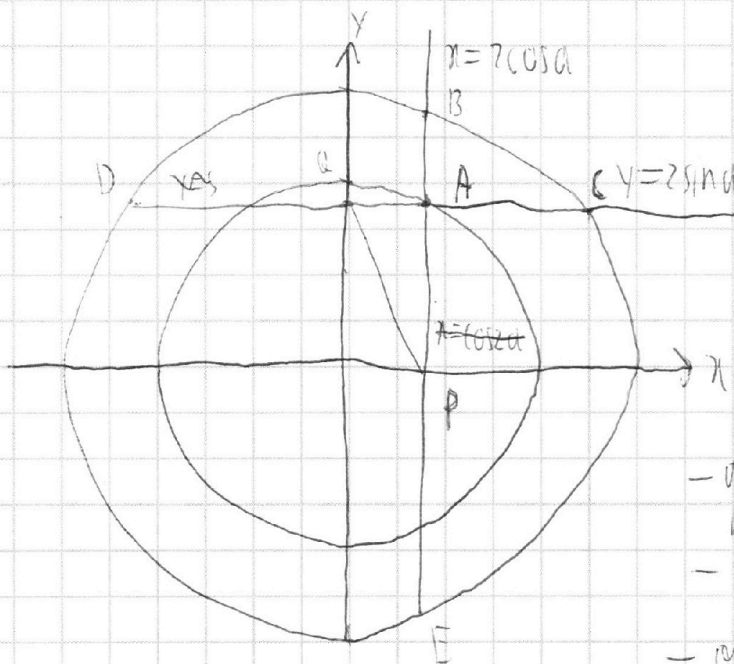
СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 6 Точка A - точка (координаты) $(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$.

Заметим, что эта точка лежит на окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 4$. Точки, для которых

$(x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0$ - это точки внутри угла BAC и угла DAE. Искомые точки, для которых $x^2 + y^2 \leq 9$ -



- это круг с центром в начале координат и радиусом 3. Точка A принадлежит фигуре $\Phi(\alpha)$ с центром в A .

- дуги BC

- дуги DE

- отрезков DA, AB, AC, AE.

Заметим, что $\angle DAE = 90^\circ = \frac{1}{2} (\angle BOC + \angle DOE) \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BOC + \angle DOE = 180^\circ \Rightarrow$ градусы на дуге не зависят от

точки A. Точка A может быть любой точкой окружности

BA, DA, CA, EA. Это равнозначные направления движения

суммы BEUDC. Точнее, что итак верно, в какой чет-



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Вспомогательная точка A (вспомогательная), что если мы проведем все точки A в одной четверти, то, учитывая симметрию, проведем точку A в другой четверти. Будем считать, что A в первой четверти. Рассмотрим векторы $BE + CD$ в зависимости от точки $A \Rightarrow$ рассмотрим векторы $BP + CQ$, где P, Q — середины BE и CD соответственно, что P, Q — это проекции точки A на оси координат. Координаты точки $B = (9 - 4\cos^2 \alpha; 6\cos \alpha; \sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha})$, а координаты точки $C = (9 - 4\sin^2 \alpha; 2\sin \alpha; \sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha})$. Тогда $BP = \sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha}$; $CQ = \sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha} \Rightarrow BP + CQ = \sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha}$. По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим получим, что $\frac{\sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha}}{2} \leq \sqrt{\frac{18 - 4(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{2}}$
 $= \sqrt{\frac{18 - 4}{2}} = \sqrt{7} \Rightarrow \sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha} \leq 2\sqrt{7}$. Тогда

что получается, тогда $9 - 4\cos^2 \alpha = 9 - 4\sin^2 \alpha \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\max |M| = 2\sqrt{7}$ при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$



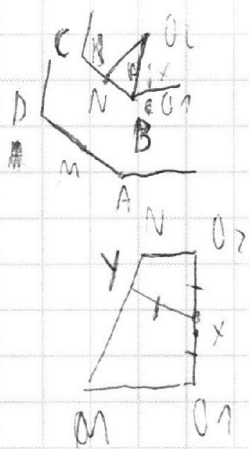
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7 Пусть в основании усеченной пирамиды лежит n -угольник, O_1, O_2 — центры этих многоугольников соответственно и являются центрами оснований. Расстояние между



оснований равен n -угольнику, лежащему в одной плоскости (пусть $M \in N$). Показать, что из симметрии следует, что центр O лежит на O_1O_2 . Пусть центр O — это X . Показать, что X — середина O_1O_2 (ведь $XO_1 = XO_2 =$ радиусу n). O_1MO_2 —

одна плоскость. $\Rightarrow$ основания перпендикулярны XY и соответствующим образом $XY \perp MN$ (пусть это основание Y). Тогда $XO_2 = XO_1 = XY \Rightarrow \triangle NYX = \triangle NO_2$ и $\triangle XO_1 = \triangle MYO_1 \Rightarrow NO_2 = MY$, $MO_1 = MY$. Тогда $O_1O_2 =$

$$= \sqrt{MN^2 - (MO_1 - NO_2)^2} = \sqrt{(MO_1 + NO_2)^2 - (MO_1 - NO_2)^2} = 2\sqrt{MO_1 \cdot NO_2}$$

Пусть теперь центр $O = Z$. Из симметрии следует, что O лежит на O_1O_2 . Пусть проекция XY на радиус-вектор XY — это T ($T \in MN$ по основанию XY). Проекция XY на $AB = F$. Заметим, что проекция Z на ребро



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

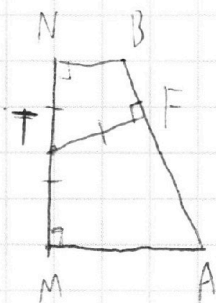
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$AD \perp CB \Rightarrow m \angle M \text{ и } \angle N \text{ ост. } \angle M = \angle N \neq 90^\circ$

$\Rightarrow \angle T = \angle F$ (проекции Z на $AB \Rightarrow m$

F по условию о лучах перпендикулярности

$\Rightarrow TM = TN = TF$ (п.к. $TM = TN = TF =$

$= ZM^2 - ZT^2 = ZN^2 - ZT^2 = ZF^2 - ZT^2$). Тогда $\triangle NTB = \triangle FTB$,

$\triangle MAT = \triangle FAT; \Rightarrow NB = BF, MA = AF. \Rightarrow NM = \sqrt{AB^2 - (MA - NB)^2} =$

$= \sqrt{(MA + NB)^2 - (MA - NB)^2} = \sqrt{4 \cdot MA \cdot NB} = 2\sqrt{MA \cdot NB}$. Значит,

что искомого угла $= \arcsin \frac{O_1 O_2}{MN} = \frac{2\sqrt{MO_1 \cdot MO_2}}{2\sqrt{MA \cdot NB}} =$

$= \frac{MO_1}{MA} \left(\text{п.к. } \frac{MO_1}{MA} = \frac{NO_1}{NB} \text{ из подобия треугольников} \right)$

$= +9 \text{ градусов угла треугольника} = +9 \left(\frac{n-2}{n} \cdot 90 \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{искомый угол} = \arcsin \left(+9 \left(\frac{n-2}{n} \cdot 90 \right) \right)$

Ответ: $\arcsin \left(+9 \left(\frac{n-2}{n} \cdot 90 \right) \right)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, including various equations, diagrams, and geometric figures.

Equations and expressions:

- $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$
- $\frac{x+4xy}{xy} = \frac{x+4+1}{xy} = \frac{xy+3+1}{(x-3)(y+3)}$
- $6+5=21=11$
- $15=28$
- $x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3)$
- $(x+y)^2 - (y-x)^2 = xy = (x-3)(y+3)$
- $3(x^2 + x(x-3) + (x-3)^2)$
- $xy = xy + 3x - 3y - 9$
- $6(x-x)$
- $x-y=3$
- $x+y=-1$
- $x \neq 3$
- $x \neq 2$
- $x^2 + y^2 = y^2 + (2\sqrt{xy} + 1)^2$
- $x^2 - y^2 + 4xy = 0\sqrt{xy} + x^2 + y^2 = y^2 + 4xy - 4\sqrt{xy} + 1 + y^2$

Diagrams and Geometric Figures:

- A right triangle with legs x and y , and hypotenuse $\sqrt{x^2 + y^2}$.
- A cube.
- A pyramid.
- A rectangular prism.
- A triangle with base x and height y .
- A hexagon.
- A heptagon.
- A diagram showing a point M inside a triangle, with distances MA , MB , and MC marked.

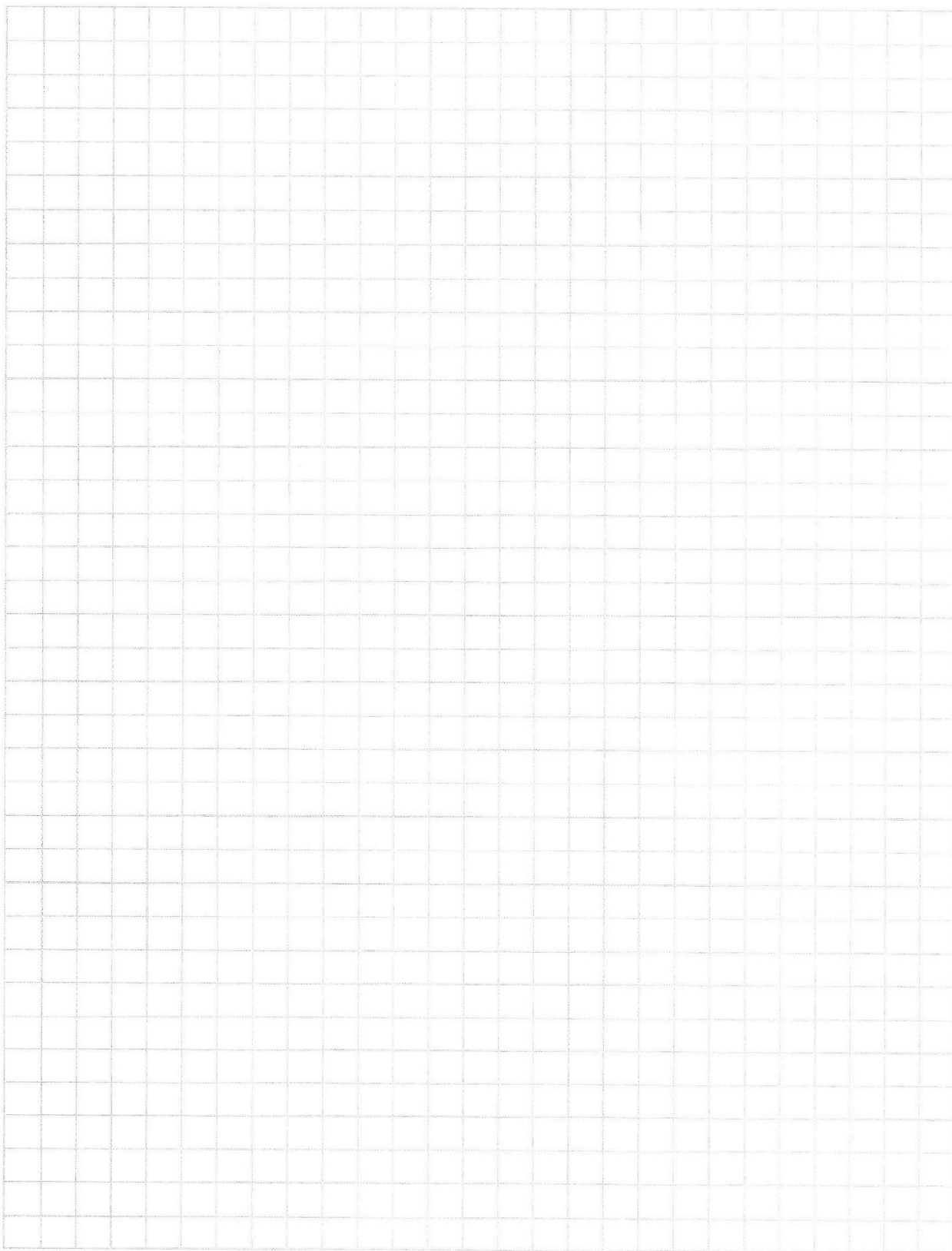


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, featuring geometric diagrams and algebraic calculations.

Top Left: A triangle with vertices A, B, and C. A circle is inscribed within it, tangent to the sides AB and AC at points P and Q respectively. The base BC is labeled with '16/5'. The side AB is labeled with '4'. The side AC is labeled with '10/5'. The angle at vertex A is labeled '0'.

Top Right: Algebraic calculations involving fractions and polynomials. A large circle contains the expression $\frac{16}{5}$. To the right, there are several lines of algebraic manipulation, including $\frac{10}{5}$ and $\frac{16}{5}$.

Middle Left: A circle with a horizontal diameter. A vertical line segment is drawn from the center of the circle to the top edge, labeled '2' and '8'. The radius is labeled '4'.

Middle Right: A right-angled triangle with a vertical side of length '10/5' and a horizontal side of length '16/5'. The hypotenuse is labeled '2'. To the right, there are several lines of algebraic manipulation, including $\frac{16}{5}$ and $\frac{10}{5}$.

Bottom Left: A circle with a horizontal diameter. A vertical line segment is drawn from the center of the circle to the top edge, labeled '2' and '8'. The radius is labeled '4'.

Bottom Right: Algebraic calculations involving fractions and polynomials. A large circle contains the expression $\frac{16}{5}$. To the right, there are several lines of algebraic manipulation, including $\frac{10}{5}$ and $\frac{16}{5}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{9999}{9} = x$$

$$101 \cdot 11 \cdot x$$

$$\begin{array}{r} \times 101 \\ 11 \\ \hline 1101 \\ 1101 \\ \hline 1111 \end{array}$$

$$101 \cdot 11 \cdot x$$

$$55$$

$$4(t-1)^2 - 12(t-1)$$

$$(1111, 101, 55)$$

$$(5555, 101, 55)$$

$$4(t-1)(t-4)$$

$$K =$$

$$\frac{1}{x}$$

$$2 \sqrt{M G_1 \cdot N G_2}$$

$$\frac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x-3} + 1} = t$$

$$\frac{2 \sqrt{M G_1 \cdot N G_2}}{M A + N B}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{(x-3)(x+3)}$$

$$4 \sin^2 \alpha + x^2 = 9$$

$$\left(\frac{1}{x} + 1\right) \left(\frac{1}{y} + 1\right) = \left(\frac{1}{x-3} + 1\right) \left(\frac{1}{y+3} + 1\right)$$

$$\sqrt{18 - 4} = \frac{14}{2} \frac{2 \times \sqrt{a}}{\sqrt{1(1+a)}} = \frac{2 \sqrt{20x}}{\sqrt{10y}}$$

n

$$\frac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x-3} + 1} = \frac{\frac{1}{y+3} + 1}{\frac{1}{y} + 1}$$

$$y = x + 3$$

$$-3(x^2 + x(x+3) + (x+3)^2) - 9x^2 - 27x$$

$$-3x^2 - 3x^2 - 9x - 3x^2$$

$$x^3 - (x+3)^3 - 9x(x+3)$$

$$y = \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha}$$

$$\sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}$$

$$v^2 + 4 \cos^2 \alpha = 9$$

30

$$x^2 = 9 - 4 \sin^2 \alpha$$

$$\frac{(n-2) \cdot 120}{2}$$

$$\frac{(n-2) \cdot 120}{n}$$

