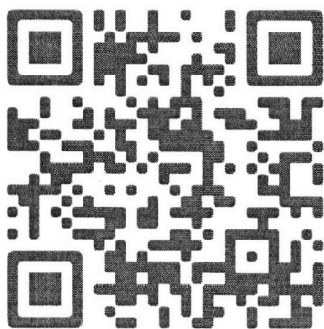




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел $(x; y)$ удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Число A имеет вид $\overline{aaaa}$, где a - некоторая цифра и $a \neq 0$, тогда $A = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101 = 7A \cdot B \cdot C : 101$ и $A \cdot B \cdot C = k^2$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow k^2 : 101$ и 101 - простое $\Rightarrow k^2 : 101^2$, т.к. k^2 в разложении входит в четных степенях. Заметим, что тогда $A \cdot B \cdot C : 101^2$; $a \in \{1, 9\}$ и $a \in \mathbb{N}$ и 101 - простое $\Rightarrow a < 101 \Rightarrow \text{НОД}(a, 101) = 1 \Rightarrow B \cdot C : 101$, но C - двузначное $\Rightarrow C \leq 99 < 101 \Rightarrow \text{НОД}(C, 101) = 1 \Rightarrow B : 101$; B - трехзначное взаимно простое. Выпишем все трехзначные числа, делящиеся на 101 : $101 \cdot 1 = 101$; $101 \cdot 2 = 202$; $101 \cdot 3 = 303$; $101 \cdot 4 = 404$; $101 \cdot 5 = 505$; $101 \cdot 6 = 606$; $101 \cdot 7 = 707$; $101 \cdot 8 = 808$; $101 \cdot 9 = 909$, далее числа, делящиеся на $101 \neq 1$ или $101 \cdot 10 = 1010$ - не трехзначные $\Rightarrow$ из всех нам подходит только $606 \Rightarrow B = 606 = 6 \cdot 101$. Также $A : 11$, 11 - простое $\Rightarrow a$ кратно 11 и $k^2 : 11^2 \Rightarrow a < 11$ и $\text{НОД}(a, 11) = 1 \Rightarrow B \cdot C : 11$, но $B = 6 \cdot 101$ и $(101, 11) \neq 1$ и $B < 11 \Rightarrow \text{НОД}(6, 11) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(B, 11) = 1 \Rightarrow C : 11$, C - двузначное и C содержит 11 . Все двузначные числа: 11 : $11 \cdot 1 = 11$; $11 \cdot 2 = 22$; $11 \cdot 3 = 33$; $11 \cdot 4 = 44$; $11 \cdot 5 = 55$; $11 \cdot 6 = 66$; $11 \cdot 7 = 77$; $11 \cdot 8 = 88$; $11 \cdot 9 = 99$ - далее $110 \Rightarrow$ не подходит или 33 (также) $\Rightarrow C = 33 \Rightarrow A \cdot B \cdot C = a \cdot 101 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = a \cdot 101^2 \cdot 11^2 \cdot 2 \cdot 3^2 = k^2 \Rightarrow 2a = \left(\frac{k}{101 \cdot 11 \cdot 3} \right)^2$ - квадрат $\Rightarrow 2a$ - квадрат $\Rightarrow 2$ входит в разложение a в чет. степени и $a \leq 9$. Выпишем $2a \leq 9$: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; 2 входит в четной степени только $62, 6, 8$; $2 \cdot 2 = 4$ - квадрат; $2 \cdot 6 = 12$ - не квадрат; $2 \cdot 8 = 16$ - квадрат $\Rightarrow$ нам подходит $A = 2 \cdot 11114$, $A = 8 \cdot 1111$. $\Rightarrow$ Ответ: $(2222; 606; 33)$ и $(8888; 606; 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) x, y > 0 \Rightarrow k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{x+y} = \frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} + \frac{5}{x+y} = \frac{x+y+5}{xy}$$

при уменьшении x на 2 и увеличении y на 2:

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)} = \frac{y+2+x-2}{(x-2)(y+2)} + \frac{5}{(x-2)(y+2)} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\Rightarrow k = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)} = \frac{x+y+5}{xy} \quad | : (x+y+5)^{70} = 7$$

$$\frac{1}{(x-2)(y+2)} = \frac{1}{xy} \Rightarrow \text{при } x \neq 2, y \neq -2 \text{ имеем условие}$$

$$\Rightarrow xy = xy + 2x - 2y - 4 \Rightarrow 2x - 2y = 4 \Rightarrow x - y = 2$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6xy = (x-y)((x-y)^2 + 3xy) - 6xy =$$

$$= (x-y)^3 + 3xy(x-y) - 6xy = (x-y)^3 + 3xy(x-y-2) =$$

$$= 2^3 + 3xy(2-2) = 2^3 = 8 \Rightarrow \text{т.к. } x-y=2, \text{ то } M=8 \text{ единств.}$$

возможное значение "0"

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x &= (\cos \pi x - \cos \pi y) \cdot \cos \pi x \Leftrightarrow \\
 \sin^2 \pi x + \sin \pi x \cdot \sin \pi y &= \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cdot \cos \pi x \Leftrightarrow \\
 (\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x) &= (\cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi x \cdot \sin \pi y) \Leftrightarrow \\
 \cos(2\pi x) &= \cos(\pi x - \pi y) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi x = \pi x - \pi y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = -(\pi x - \pi y) + 2\pi t, t \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x - y + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = -x + y + 2t, t \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k - y, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{y + 2t}{3}, t \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{— так как}
 \end{aligned}$$

преобразования равносильны, то и наоборот — решения уравнения.

Ответ: $x, y \in \mathbb{R}$ и $\begin{cases} x = 2k - y, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{y + 2t}{3}, t \in \mathbb{Z} \end{cases}$ — все такие решения.

б) функция $\arcsin$ определена от $\frac{x}{6}$ и $\frac{y}{2} \Rightarrow$ необходимо, чтобы $-1 \leq \frac{x}{6} \leq 1$ и $-1 \leq \frac{y}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 6$ и $-2 \leq y \leq 2$; заметим, что $x \in [-1; 1]$: $\arcsin a \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ для $-6 \leq x \leq 6$ и $-2 \leq y \leq 2$:

$\arcsin\left(\frac{x}{6}\right) + \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ и равенство лишь

при $\frac{x}{6} = 1 = \frac{y}{2}$, т.е. $x = 6$ и $y = 2$. $\Rightarrow$ нам подойдут

все $x, y \in \mathbb{Z}$: $x \in [-6; 5]$ и $y \in [-1; 1]$, подпадающие

под условие п. а; т.е. $y = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2k - 1, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{1 + 2t}{3}, t \in \mathbb{Z} \end{cases}$ (1)

(2): $x \in [-6; 5] \Rightarrow -6 \leq 2k - 1 \leq 5 \Rightarrow -5 \leq 2k \leq 6 \Rightarrow -2.5 \leq k \leq 3.5, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ все $k \in \mathbb{Z}$: $k \in [-2; 3]$ подпадают: $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ — их 6 и x принимает

значения от -5 до 5 — их 11. (2): $x = \frac{2t + 1}{3}, t \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2t + 1 \leq 3 \Rightarrow$

$2t \leq 2 \Rightarrow t \leq 1$. Также $-6 \leq \frac{1 + 2t}{3} \Rightarrow -18 \leq 1 + 2t \leq 15 \Rightarrow$

$-19 \leq 2t \leq 14 \Rightarrow -9.5 \leq t \leq 7$ и $t \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ нам подойдут $7, 4, 1, -2, -5, -8$

и x принимает все целые значения от $\frac{-8 \cdot 2 + 1}{3} = -5$ до $\frac{7 \cdot 2 + 1}{3} = 5$

— их тоже 11, получаем $\Rightarrow$ всего x и y получим $\Rightarrow$ вкл. все 11 решений



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1а. $y = 1$. Заметим, что $\forall x \in \mathbb{Z}$: $\sin(\pi x) = 0 = \sin(\pi y) \forall y \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow \sin \pi x + \sin \pi y = 0$ для $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ также $|\cos \pi x| = 1 \forall x \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow$ тогда нулю бы выполнялся необходимо, тогда $\cos \pi x - \cos \pi y = 0 \Rightarrow \cos \pi x = \cos \pi y$. Тем самым $x, y \in \mathbb{Z}$ ^{или упр-ние}
 $\Rightarrow$ тогда $\cos \pi x = \cos \pi y \Rightarrow x \equiv y$ одной четности.

при $y = 1$. из $x \in [-6; 5]$ нам подходят нечетные, т.е.

5, 3, 1, -1, -3, -5 — 6 чисел.

2а. $y = 0$ — аналогично 1а. нам подходят числ.: -6, -4, -2, 0, 2, 4 — 6 чис.

при $y = -4$ и $y = -2$ аналогично: по 6 x к каждому y из

$y \Rightarrow$ итого 4 вкл. y и по 6 вкл. x для каждого: 24 парц.

Ответ: 24



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N72, т.к. билетов 4 или больше = 111 комбинаций

1) Пусть всего есть N 11-машинков. Тогда всего вариантов распределить 4 билета между N машин случайным образом = C_N^4 - кол-во вариантов выбрать 4 словеска

из N. ~~Тогда~~ ^{или} ~~вариантов~~, при которых Тетя и Вова пойдут - это варианты, где им дали 2 билета, а остальные

2 случайно распределены миз N-2 оставшимися машинками:

итого C_{N-2}^2 вариантов $\Rightarrow$ в начале месяца никакая вероятность = $\frac{\text{кол-во удачл. исходов}}{\text{кол-во исходов}} = \frac{C_{N-2}^2}{C_N^4}$; аналогично:

если K - кол-во билетов в конце месяца, то вероят-

ность в конце месяца = $\frac{C_{N-2}^{K-2}}{C_N^K} \Rightarrow \frac{C_{N-2}^2}{C_N^4} = \frac{1}{6} \cdot \frac{C_{N-2}^{K-2}}{C_N^K}$

$$\Rightarrow \frac{(N-2)!}{2(N-4)!} \cdot \frac{1}{N!} = \frac{1}{6} \cdot \frac{(N-2)!}{(K-2)!(N-K)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(N-2)! \cdot 4!}{2 \cdot N!} = \frac{1}{6} \cdot \frac{(N-2)! \cdot K!}{N! \cdot (K-2)!} \Rightarrow \frac{4!}{2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{K!}{(K-2)!}$$

$$K! = \frac{(K-2)! \cdot 6}{2} \cdot 4! \Rightarrow K! = (K-2)! \cdot 3 \cdot 4! \Rightarrow$$

$$(K-2)! (K-1) \cdot K = (K-2)! \cdot 72 \Rightarrow K^2 - K = 72 \Rightarrow$$

$$K^2 - K - 72 = 0 \Rightarrow (K-9)(K+8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} K=9 \\ K=-8 \end{cases}, \text{ но } K \geq 4$$

$\Rightarrow K=9$, тогда упрощаем на вероятность верию,

т.к. т.к. $K=9$ всё корректно (та все переходы корректны с обеих сторон при $K=9$)

Ответ: 9

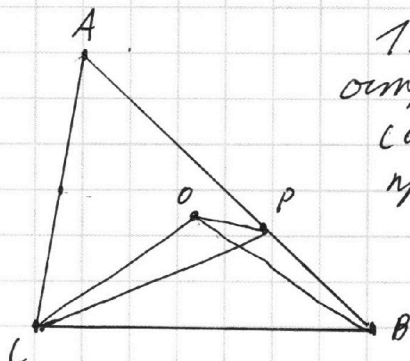


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

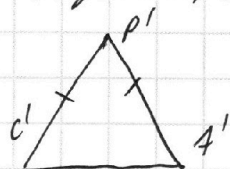
СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) O - центр описанной окружности
остроугольного $\triangle ABC \Rightarrow \angle BOC = 2\angle A$ и
 $\angle CPB$ - вписанный $\Rightarrow \angle CPB = \angle COB = 2\angle A$;
при этом $\angle CPB$ - внешний для $\triangle CPA \Rightarrow$
 $\angle CPB = \angle CAP + \angle PCA = \angle A + \angle PCA \Rightarrow$
 $2\angle A = \angle A + \angle PCA \Rightarrow \angle PCA = \angle A \Rightarrow$
 $\triangle CPA \sim \triangle PAB$ и $PC = PA = 25$. Тогда

в $\triangle APC$: $CP = PA = 25$ и $AC = 35$. Т.к. $\triangle PCA \sim \triangle PAB$
и подобный ему $\triangle PC'A'$, где $P'C' = P'A' = 5$ и $A'C' = 7$ (они
подобны, т.к. $\frac{P'C'}{PC} = \frac{P'A'}{PA} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{1}{5}$) Его периметр =



$$= \frac{5+5+7}{2} = \frac{17}{2} = 8,5 \Rightarrow \text{площадь по формуле Герона} =$$

$$= \sqrt{\frac{17}{2} \left(\frac{17}{2} - 5 \right) \left(\frac{17}{2} - 5 \right) \left(\frac{17}{2} - 7 \right)} = \sqrt{\frac{17}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{7^2 \cdot 3 \cdot 17}{2^4}} = \frac{7}{4} \sqrt{3 \cdot 17} = \frac{7}{4} \sqrt{51} \Rightarrow \text{площадь } \triangle PCA =$$

$$S_{PC'A'} \text{ возр. подобия в 25 раз} = \frac{7}{4} \sqrt{51} \cdot 25 = \frac{25 \cdot 7 \sqrt{51}}{4}$$

$$\frac{AP}{PB} = \frac{25}{5} = 5 \Rightarrow \frac{S_{ACP}}{S_{CPB}} = 5 \Rightarrow S_{CPB} = \frac{S_{ACP}}{5} \Rightarrow S_{ACB} =$$

$$= S_{ACP} + S_{CPB} = S_{ACP} + \frac{S_{ACP}}{5} = \frac{6}{5} \cdot S_{ACP} = \frac{6}{5} \cdot \frac{25 \cdot 7 \sqrt{51}}{4} =$$

$$= \frac{30 \cdot 7 \sqrt{51}}{4} = \frac{210 \sqrt{51}}{4} = \frac{105 \sqrt{51}}{2}$$

$$\text{Ответ: } S_{ACB} = \frac{105 \sqrt{51}}{2}$$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

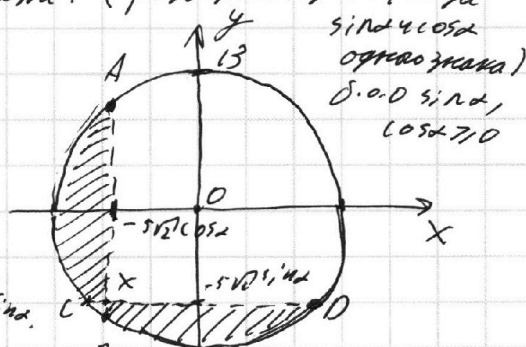
1)
$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2}\cos\alpha)(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 169 & (2) \end{cases}$$

Заметим, что
(2): $x^2 + y^2 \leq 169$ —
задаёт все точки
внутри и на границе
круга с центром $(0; 0)$ и
радиусом $\sqrt{169} = 13$.

(1): $(x + 5\sqrt{2}\cos\alpha)(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5\sqrt{2}\cos\alpha & (1.1) \\ y \geq -5\sqrt{2}\sin\alpha & (1.2) \\ x \geq -5\sqrt{2}\cos\alpha & (1.3) \\ y \leq -5\sqrt{2}\sin\alpha & (1.4) \end{cases}$

Положим условия (1) и (2) на
терми: (разберём случай, когда



Здесь A, B, C, D — точки на окр. (центром $(0, 0)$ и радиусом 13; и AB — прямая

$x = -5\sqrt{2}\cos\alpha$ и CD — прямая $y = -5\sqrt{2}\sin\alpha$.

Они пересекаются в т. X: $x_X = -5\sqrt{2}\cos\alpha$ и $y_X = -5\sqrt{2}\sin\alpha$ — если

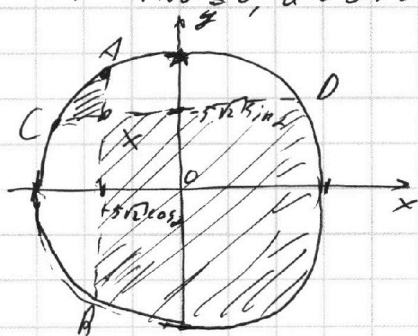
O — центр окр., то $OX = \sqrt{x_X^2 + y_X^2} = \sqrt{25 \cdot 2 \cos^2\alpha + 25 \cdot 2 \sin^2\alpha} =$
 $= \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2} = \sqrt{100} < \sqrt{169} = 13 \Rightarrow X$ внутри окр.

Получи 1 вариант — когда выполнены (1.1) и (1.2). Это фигура, ограниченная справа (+B), слева — окр. и снизу (CD) и есть вторая фигура, ограниченная снизу окр.; сверху — (CD) и слева — (+A). Они (фигуры) заштрихованы. Их общий периметр — $M(2)$. Теперь разн. случаи когда $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ разн. знаки

(0, 0, 0) $\sin\alpha \leq 0$, а $\cos\alpha \geq 0$: теперь нам подойдут все точки внутри фигуры 1 (ограничена справа (+B) и снизу (CD)) и фигура 2 (ограничена сверху (CD) и ~~справа~~ слева (+A)).

Эти фигуры заштрихованы.

Заметим также, что при любой сумме $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ —





На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) Тангенс угла для $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ 7 знака. Тогда
Заметим, что $\angle B \times D = 90^\circ \Rightarrow$ меньшие дуги DA и AC в сумме
(в градусной мере) $= \pi \Rightarrow$ дуги DA и AC (меньше) в сумме
по длине = половине длины границы круга $= \frac{2\pi \cdot 13}{2} = 13\pi$.

Еще так. Также периметр фигур $ABCD$ можно рассмотреть -
ныя дуги складываются из отрезков $AX, CX, DX, BX \Rightarrow$

$$M(\alpha) = 13\pi + AX + CX + DX + BX = 13\pi + AB + CD. \quad \text{Если же } \sin \alpha \text{ и } \cos \alpha$$

разны знаков, то собственно периметр фигур $ABCD$
складывается из AX, CX, BX, DX ~~дуг~~ дуг, в

сумме по длине = половине длины границы круга (т.к.
 $\angle B \times D$ также $= 90^\circ$) $\Rightarrow$ здесь тоже $M(\alpha) = 13\pi + AB + CD$.
Потому в обоих случаях у нас периметр длины AB и CD .

Тогда для максимизации $M(\alpha)$ необходимо максимизиро-
вать $13\pi + AB + CD$, т.е. $AB + CD$ (т.к. 13π - константа).

Для точек A и B : по x координата $= -5\sqrt{2} \cos \alpha$, а по y :

$$\text{т.к. } A, B \in \text{окр.}, \text{ то } y = \pm \sqrt{169 - x^2} = \pm \sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha} \Rightarrow$$

$AB =$ разность по y координат A и $B = 2\sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}$. Анало-

$$\text{гично: } CD = 2\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha} \Rightarrow AB + CD = 2\sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha} + 2\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha} \leq$$

$$\leq 2 \sqrt{\frac{4(169 - 50 \sin^2 \alpha) + 4(169 - 50 \cos^2 \alpha)}{2}} = 2 \sqrt{\frac{4(169 \cdot 2 - 50)}{2}} =$$

$$= 2 \sqrt{4 \cdot (169 - 25)} = 2 \sqrt{4 \cdot 144} = 2 \cdot 2 \cdot 12 = 4 \cdot 12 = 48 - \text{по неравенству}$$

Юнга $\left(\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \right) \Rightarrow$ и равенство при $169 - 50 \cos^2 \alpha = 169 - 50 \sin^2 \alpha$

т.е. при $\cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \sin \alpha \\ \cos \alpha = -\sin \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k, k \in \mathbb{Z}, \text{ тогда}$

$$M(\alpha) \leq 13\pi + 48 \Rightarrow \text{ответ: } M(\alpha)_{\max} = 13\pi + 48 \text{ и } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$$

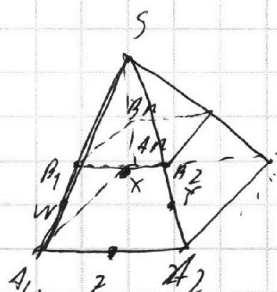


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ и $B_1, B_2, \dots, B_n$ — нижние и верх. основания пирамиды соотв. Тогда $\{S\} = \bigcap_{i=1}^n A_i B_i$. Пусть Ω касается $A_1, A_2, A_1 B_2, B_1 B_2, A_1 B_1$ в точках Z, Y, X, W соотв, тогда $A_1 A_2$: $A_1 Z$ и $A_2 Y$ — отрезки касательных к Ω

$$\Rightarrow A_1 Z = A_2 Y. \text{ Аналогично: } B_2 Y = B_1 X; B_1 X = B_1 W; A_1 W = A_1 Z \Rightarrow$$

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = A_1 Z + A_1 W + B_1 X + B_2 Y = A_1 W + B_1 W + A_2 Y + B_2 Y =$$

$$= A_1 B_1 + A_2 B_2 \Rightarrow A_1 A_2 B_1 B_2 - \text{опианная пирамида} \Rightarrow \text{если}$$

$$A_1 A_2 = a \text{ и } B_1 B_2 = b, \text{ то, т.е. } A_1 B_1 = A_2 B_2, \text{ то } A_1 B_1 = A_2 B_2 = \frac{a+b}{2}.$$

Пусть Ω — касательная, то тогда по т. Фалеса $\frac{A_1 B_1}{A_1 A_2} = \frac{A_2 B_2}{A_2 B_1}$.

$\frac{S_{B_1 B_2}}{S_{A_1 A_2}} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$; Пусть B_1', B_2' — проекции (перпендикуляры) точек B_1 и B_2 на $(A_1 A_2)$. Тогда, т.к.

$$\Rightarrow \frac{S_{A_1 B_1 B_2}}{S_{A_1 A_2}} = \left(\frac{b}{a}\right)^2; \text{ Пусть } B_1', B_2' - \text{проекция (перпендикуляры) точек } B_1 \text{ и } B_2 \text{ на } (A_1 A_2). \text{ Тогда, т.к.}$$

$$A_1 B_1 B_2 - \text{прямая, то } A_1 B_1' = A_2 B_1' =$$

$$= \frac{a-b}{2} \Rightarrow \text{впл. } S_{A_1 B_1 B_2'}: B_1 B_1' = \sqrt{A_1 B_1^2 - A_1 B_1'^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{ab} \Rightarrow S_{A_1 B_1 B_2} = B_1 B_1' \cdot \frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \cdot \frac{a+b}{2}$$

$\Rightarrow$ если у пирамиды n боковых граней, то площадь боковой поверхности $= n \sqrt{ab} \cdot \frac{a+b}{2}$; пусть r — радиус окр. вписанной в пирамиду.

Заметим, что Ω также касается в $S_{A_1 \dots A_n}$ — пирамиду. $S_{A_1 A_2} - S_{A_1 B_1 B_2} = S_{A_1 A_2 B_1 B_2} \Rightarrow S_{A_1 A_2} - \left(\frac{b}{a}\right)^2 S_{A_1 A_2} = \sqrt{ab} \cdot \frac{a+b}{2}$

$$\Rightarrow S_{A_1 A_2} = \frac{\sqrt{ab} \cdot \frac{a+b}{2}}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{ab} \cdot \frac{a+b}{2}}{\frac{(a-b)(a+b)}{a^2}} = \frac{\sqrt{ab} \cdot a^2}{2(a-b)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$S_1 \dots S_n = S$$

$$\frac{S_{n+2}}{S_{n+1}} = \cos \alpha$$

$$S_1 \dots S_n = S \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{b}{a+b}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi (S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} \cdot \cos \alpha) = S_{\text{бок}} \cdot \cos \alpha \cdot H \cdot \frac{1}{3}$$

$$+ S_{\text{бок}} (1 + \cos \alpha) = S_{\text{осн}} \cdot \cos \alpha \cdot H$$

$$H (1 + \cos \alpha) = H \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{H}{1} = \frac{1 + \cos \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\frac{H}{H} = \frac{b}{a}$$

$$H = \frac{b}{a} H$$

$$S_1 \dots S_{n+2} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \cdot a^2}{2(a-b)} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \cdot b^2}{2(a-b)}$$

$$\frac{1}{3} \pi \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \cdot b^2}{2(a-b)} - \frac{1}{3} \pi \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \cdot b^2}{2(a-b)} \cdot \cos \alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3} \pi \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \cdot a^2}{2(a-b)}\right) +$$

$$+ \frac{1}{3} \pi \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \cdot a^2}{2(a-b)} \cdot (\cos \alpha)$$

$$b^2 - b^2 \cdot \cos \alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^3 (a^2 + a^2 \cos \alpha) =$$

$$b^2 - b^2 \cos \alpha = b^3 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a} \cos \alpha\right) \frac{S}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1} = \frac{S}{\frac{a-b}{b^2}}$$

$$\frac{S \cdot 2}{a-b} \cdot \frac{a-b}{a+b} \cdot b \cdot 1 - \cos \alpha = \frac{b}{a} (1 + \cos \alpha)$$

$$\left(\frac{b}{a+b}\right)^2$$

$$\frac{a-b}{a+b}$$

$$S_0 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 S_1$$

$$S_0 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 S_1$$

$$S_0 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 S_1$$

$$S_0 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 S_1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

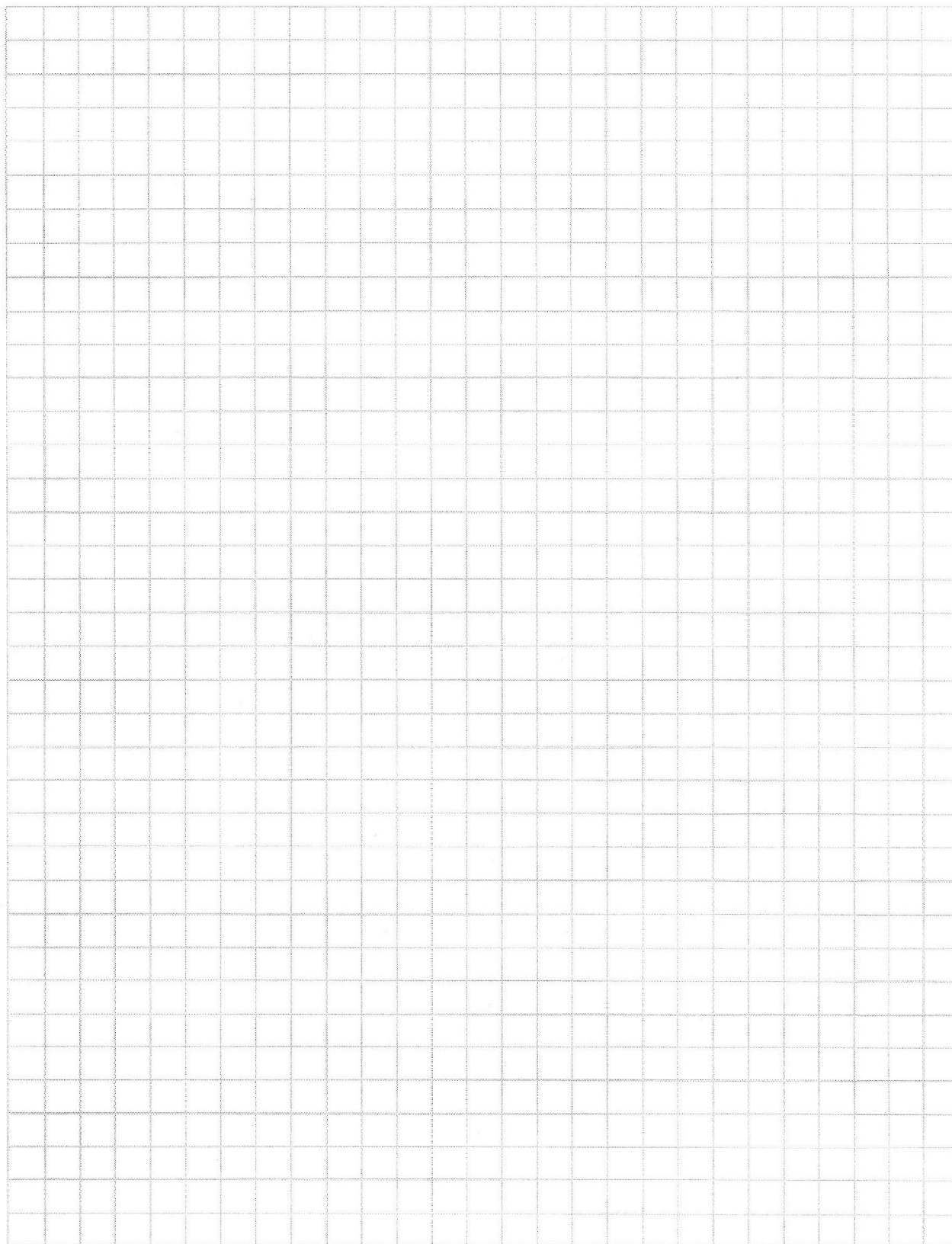
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





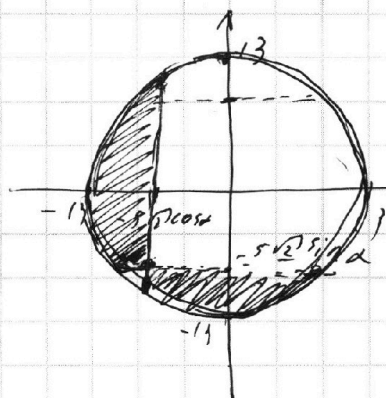
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

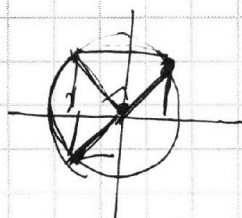
$$\begin{cases} (x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0 & 2\pi R & 13\pi + 48 \\ x^2 + y^2 \leq 169 & \pi R \end{cases}$$



$$(x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0$$

$$\frac{n}{n+15} = \frac{6}{\alpha}$$

$$\begin{cases} x \leq -5\sqrt{2}\cos\alpha \\ y \geq -5\sqrt{2}\sin\alpha \\ x \geq -5\sqrt{2}\cos\alpha \\ y \leq -5\sqrt{2}\sin\alpha \end{cases}$$



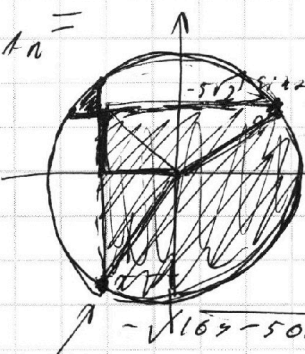
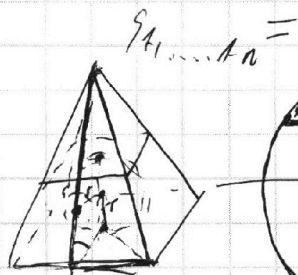
$$\cos\alpha \geq 0$$



$$-5\sqrt{2}\sin\alpha$$

$$(5\sqrt{2}\cos\alpha)^2 + (5\sqrt{2}\sin\alpha)^2 = 25 \cdot 2 + 25 \cdot 2 = 25 \cdot 4 = 100$$

$$\sqrt{169-25} = \sqrt{144} = 12$$



$$x = -5\sqrt{2}\cos\alpha$$

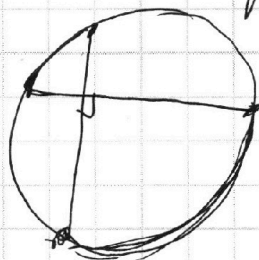
$$50\cos^2\alpha + y^2 = 169$$

$$y^2 = 169 - 50\cos^2\alpha$$

$$y = \pm\sqrt{169-50\cos^2\alpha}$$

$$\frac{\sqrt{169-50\cos^2\alpha} + \sqrt{169-50\sin^2\alpha}}{2} \leq \sqrt{\frac{169-50}{2}} = 2\sqrt{169-50\cos^2\alpha}$$

$$\frac{169-50}{2} = 69$$



$$2\sqrt{169-50\cos^2\alpha} + 2\sqrt{169-50\sin^2\alpha}$$

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

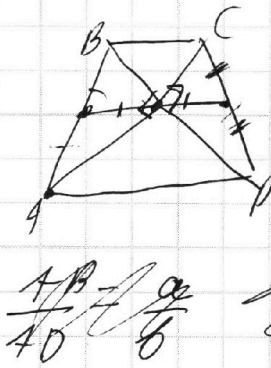
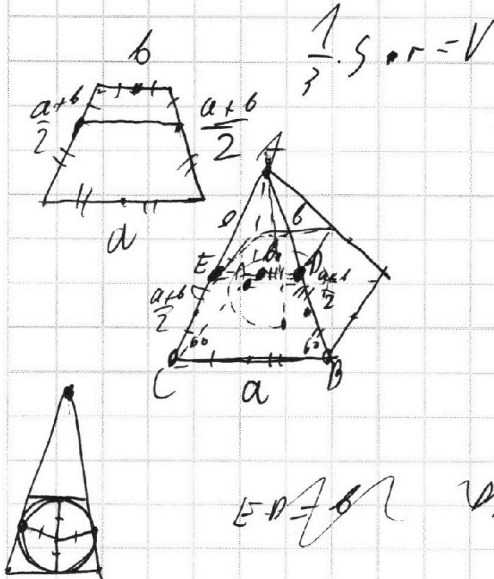


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AD + AC = a + AD$$

$$AD = \frac{a + AD}{2}$$

$$CE = \frac{CB + ED}{2}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{a}{b}$$

$$\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{S_{\text{тре}}}{S_{\text{тре}}} = K$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{b}{a} \quad \frac{AD}{AD + \frac{a+b}{2}} = \frac{b}{a}$$

$$a \cdot AD + b \cdot AD = b \left(\frac{a+b}{2} \right) \Rightarrow AD = b \left(\frac{a+b}{2} \right) = \sqrt{ab}$$

$$a \cdot AD = b \cdot AD + b \left(\frac{a+b}{2} \right) \quad \frac{h}{h+2r} = \frac{S_{\text{тре}} - \left(\frac{b}{a} \right)^2}{S_{\text{тре}}}$$

$$AD = \frac{b}{2} \cdot \frac{a+b}{a \cdot b}$$

V

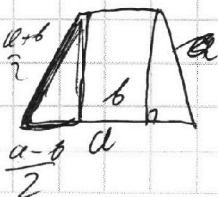
$$S = S_{\text{тре}} + n \cdot K \cdot \left(\frac{a}{b} \right)^2$$

$$S_{\text{тре}} = S_{\text{тре}} \cdot \frac{a}{b}$$

$$\sqrt{ab} \cdot \frac{a+b}{2}$$

$$n \sqrt{ab} \cdot \frac{a+b}{2} = S_{\text{тре}} \cdot \frac{1}{3} \cdot r \quad \frac{1}{3} S_{\text{тре}} \left(\frac{n}{k} + 1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right) \cdot r$$

$$S_{\text{тре}} = \frac{S_{\text{тре}}}{K} \cdot n + S_{\text{тре}} + S_{\text{тре}} \cdot \left(\frac{a}{b} \right)^2$$



$$V = S \cdot \frac{1}{3} \cdot r$$

$$S \cdot \frac{1}{3} \cdot r \cdot \left(1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right) = S_{\text{тре}} \cdot \frac{1}{3} \cdot r \cdot \left(\frac{n}{k} + 1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right) \cdot r$$

$$S \left(1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right) = S_{\text{тре}} \left(\frac{n}{k} + 1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\overline{aaaa} = a \cdot \overline{1111}$$

$$A \cdot A \cdot C = K^2$$

4A

$$11 \cdot 101$$

$$a \cdot 11 \cdot 101$$

$$B \cdot 101$$

$$101 \cdot$$

$$C \mid 101 \Rightarrow (C, 101) = 1$$

$$B = 606$$

$$a \cdot 101^2 \cdot 6 \cdot 11$$

$$(C, 11)$$

$$a = 2$$

$$a = 8$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$$

$$x^2 - 2xy + y^2 =$$

$$= (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6xy =$$

$$= (x-y)((x-y)^2 + 3xy) - 6xy \cdot (x-2)(y+2) = x^2$$

$$= (x-y)^3 + (x-y) \cdot 3xy - 6xy$$

$$= (x-y)^3 + 3xy(x-y-2)$$

$$xy + 2x - 2y - 4 = x^2$$

$$2x - 2y = 4$$

$$x - y = 2$$

$$= x^2(2n+5) - x^2(2n+5)$$

$$x^2(2n+5) \cdot 5x^2(2n+5) - x^2(2n+5) = x^2(2n+5) \cdot 5x^2(2n+5) + x^2(2n+5)$$

$$x^2(2n+5) \cdot (5x^2(2n+5) - x^2(2n+5)) = x^2(2n+5) (5x^2(2n+5) + x^2(2n+5))$$

$$1010$$

$$101$$

$$101$$

$$105$$

$$17$$

$$17$$

$$17$$

$$17$$

$$17$$

$$17$$

$$17$$

$$17$$

$$17$$

$$17$$

$$17$$

$$17$$

$$17$$

$$17$$

$$17$$

$$17$$

$$202, 308, 404, 509, 606, 707,$$

$$808, 909$$

$$12, 25$$

$$a \cdot 101^2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 11^2 =$$

$$= a \cdot 2 \cdot 101^2 \cdot 11^2 \cdot 3 \cdot 11^2 + 8507 \cdot 8507$$

$$= 29a + 8507$$

$$= (2-n)507$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

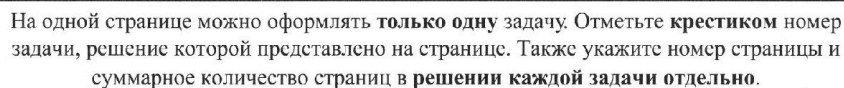
$$\frac{x+y}{xy} + \frac{5}{xy} = \frac{5+x+y}{xy}$$

$$\frac{y+2+x-2}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$x = y + 2$$

$$507$$



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

