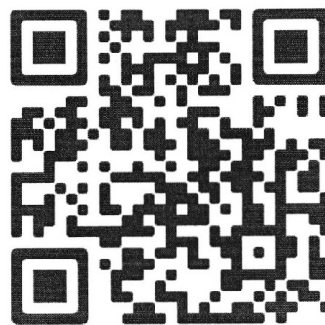




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+y+z)^2 - 2(y+yz+xz) + 8(x+y+z) + 48 = 0$$
$$= \sigma_1^2 - 2\sigma_2 + 8\sigma_1 + 48,$$

Подставим известные нам значения пар чисел σ_1 и σ_2 .

$$\sigma_1 = -12; \sigma_2 = 32; \text{ тогда } 144 - 64 - 8 \cdot 12 + 48 = 80 - 48 = 32.$$

$$\sigma_1 = -4; \sigma_2 = 0; \text{ тогда } 16 - 0 + 8 \cdot (-4) + 48 = 48 - 32 = 16.$$

При обоих значениях σ_1 и σ_2 значение выражения равно 32.

Ответ: 32.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

①

$$\begin{aligned} xy &= 4x + x^2 \\ yx &= 4x + x^2 \\ zx &= 4y + y^2 \end{aligned}$$

Сложим все уравнение:

$$xy + yx + zx = 4(2 + x + y) + x^2 + x^2 + y^2$$

$$\sigma_2 = 4\sigma_1 + \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

$$\sigma_1^2 + 4\sigma_1 - 3\sigma_2 = 0 \quad (1)$$

Заменим: $x + y + z = \sigma_1$

$$xy + xz + yz = \sigma_2$$

$$\text{Тогда } x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

Перемножим все уравнение:

$$(xyz)^2 = x(4 + z) \cdot x(4 + x)(4 + y)y$$

Поскольку числа x, y, z ненулевые, то разделим на xyz

$$xyz = (4 + z)(4 + x)(4 + y)$$

$$xyz = (16 + 4x + 4y + 4z + xz + xy + yx + xz)(4 + y)$$

$$xyz = 64 + 16x + 16y + 16z + 4xz + 16y + 4xy + 4yx + 4yz$$

$$64 + 16\sigma_1 + 4\sigma_2 = 0 \quad (2)$$

Объединим уравнение (1) и (2) в систему:

$$\begin{cases} \sigma_1^2 + 4\sigma_1 - 3\sigma_2 = 0 \\ 16\sigma_1 + 4\sigma_2 + 64 = 0 \end{cases}$$

$$16\sigma_1 + 4\sigma_2 + 64 = 0 \quad |:4 \quad \sigma_2 = -4\sigma_1 - 16$$

$$\sigma_1^2 + 4\sigma_1 + 12\sigma_1 + 48 = 0$$

$$\sigma_1^2 + 16\sigma_1 + 48 = 0$$

По Т Виета: $\sigma_1 = -12$ или $\sigma_1 = -4$
 $\sigma_2 = 32$ $\sigma_2 = 0$

$$\begin{aligned} \text{Упростим выражение: } (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 &= \\ = x^2 + y^2 + x^2 + 8(x+y+z) + 16 \cdot 3 &= 0 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2 Пусть $n+1=x$, где десятичная запись числа x имеет 25000 нулей и 1 единицу.

$$n^3 = (x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1.$$

x^3 - число с $25000 \cdot 3$ нулей и 1 единицей

$-3x^2$ - число с $25000 \cdot 2$ нулей и 3 тройки

$3x$ - число с 25000 нулей и 1 тройкой

$$x^3 - 3x^2 = \underbrace{99 \dots 97000 \dots}_{25000 \cdot 2 - 1}$$

$25000 \cdot 3 - 25000 \cdot 2 - 1$, т.к. начальная единица убивается

$$(x^3 - 3x^2) + 3x - 1 = \underbrace{99 \dots 9700 \dots 0}_{24999} \underbrace{3000 \dots 0}_{25000} - 1 = \underbrace{99 \dots 9700 \dots 0}_{24999} \underbrace{299 \dots 9}_{25000}$$

Тогда количество всех девятки в числе n^3 будет равно $24999 + 25000 = 49999$.

Ответ: 49999.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) Пусть x - общая мера дуг. CF и FD , тогда
 $CF = 2x$; $FD = 3x$

10) В $\triangle CDA$ - прямоугольном. По теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике

$$AC \cdot CF = CD^2 \Rightarrow 20 \cdot 2x = 3x^2 \quad (\text{т.к. } x \neq 0)$$

$$x = \frac{40}{3}$$

$$CF = 2x = \frac{80}{3}$$

$$11) AF = AC - CF = 20 - \frac{80}{3} = \frac{180 - 80}{3} = \frac{100}{3} = 11 \frac{1}{3}$$

Ответ: $AF = 11 \frac{1}{3}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

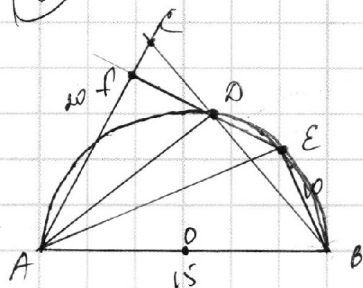
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3



Дано: ΔABC - остроугольный
 $\text{опр}(O; R)$; AB - диаметр $\text{опр}(O; R)$
 $AB = 15$
 $AC = 10$; $BE = 10$
 $(\circ) D \in BC \cap \text{опр}(O; R)$
 $DF \perp AC$; $(\circ) F \in AC$
 $DF \cap \text{опр}(O; R) = (\circ) E$

Найти: AF .

Решение:

1) По Тоб измерении вписанного угла, опирающегося на диаметр: $\angle AEB = 90^\circ$

2) В ΔAEB - прямоугольном. По определению синуса острого угла. прямоугольного треугольника

$$\sin \angle EAB = \frac{BE}{AB} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \Rightarrow \angle EAB = \arcsin \frac{2}{3}$$

3) $\angle EAB = \angle EDB = \arcsin \frac{2}{3}$ (так как они оба вписанные и опираются на одну и ту же дугу)

4) $\angle EDB = \angle CDF = \arcsin \frac{2}{3}$ (как вертикальные)

5) По Тоб измерении вписанного угла, опирающегося на диаметр: $\angle DAB = 90^\circ \Rightarrow AD \perp CB$.

6) из (5) $\Rightarrow \angle CDA = 90^\circ$

7) По условию $AC \perp DF \Rightarrow \angle DFC = 90^\circ$

8) В ΔDFC - прямоугольном: $\sin \angle CDF = \frac{CF}{CD}$ (по определению синуса острого угла прямоугольного треугольника):
 $\frac{CF}{FD} = \sin(\arcsin \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По Т Влета: $a_4 + a_5 = a^2 - a$, т.к. a_4 и a_5 — корни уравнения: $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2 - a^3}{3} = 0$

По Т Влета: $a_2 + a_7 = \frac{a^3 - a^2}{2}$, т.к. a_2 и a_7 — корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$

По свойству арифметической прогрессии:

$$a_2 + a_7 = a_4 + a_5 \Rightarrow a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{2}$$

$$a(a-1) = \frac{1}{2}a^2(a-1)$$

$$a(a-1)\left(\frac{1}{2}a - 1\right) = 0 \Rightarrow a = 0; a = 1; a = 2.$$

при $a = 0$: $x^2 + \frac{2}{3} = 0$ — нет корней. Значит $a = 0$ — не решение

при $a = 1$: $x^2 + \frac{2-1}{3} = 0$ — нет корней. Значит $a = 1$ — не решение.

$$\text{при } a = 2: x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3} \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$2x^2 - 4x - 128 - 64 - 4 = 0$$

Предположим, что прогрессия возрастающая, тогда

$$x^2 - 2x - 64 - 16 - 2 = 0$$

$$x^2 - 2x - 74 = 0$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{75}$$

$$x_{1,2} = 1 \pm 5\sqrt{3}$$

$$a_4 = 1 - \sqrt{3}; a_5 = 1 + \sqrt{3};$$

$$a_2 = 1 - 5\sqrt{3}; a_7 = 1 + 5\sqrt{3}.$$

Такая прогрессия существует.
у неё $a_1 = 1 - 7\sqrt{3}; d = 2\sqrt{3}.$

Значит $a = 2$ — решение

Ответ: $a = 2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7) $OK \perp AK$; $ON \perp AN$. (по T о касательной и симметрии)

$AK \perp AN$ (по определению прямого угла в треугольнике)

$$KO = ON = r$$

8) из (7) $\Rightarrow AKON$ - квадрат. По свойству сторон. квадрата:

$$AK = ON = r = \frac{AB + AC - BC}{2}$$

$$9) BK = AB - AK = AB - \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{BC + AB - AC}{2}$$

10) По T о касательных, проведенных к окружности из одной точки:

$$BK' = BK = \frac{BC + AB - AC}{2}$$

11) $BK' = BK$ (по 10 и 9) $\Rightarrow OK$ и OK' совпадают

12) из (11) $\Rightarrow OK$ и OK' совпадают так как из одной точки к одной прямой можно провести единственную перпендикуляр

13) Вспомогательная линия на биссектрисах углов B и C . (BD - бисс $\angle B$ и CD - бисс $\angle C$)

14) $\angle ABC = 2\angle DBC = 70^\circ$ (по определению биссектрисы)

15) По T о сумме сторон углов в прямоугольном треугольнике

$$\angle ACB = 90^\circ - \angle ABC = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$$

16) $\angle DCB = \frac{\angle ACB}{2} = 10^\circ$ (по определению биссектрисы угла)

Ответ: $\angle DCB = 10^\circ$.



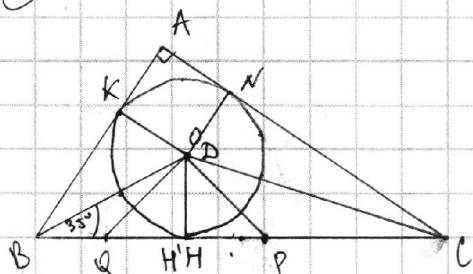
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7



Дано: $\triangle ABC$ - прямоугольный
(1) P и (2) $Q \in BC$.

$BP = AB$; $CQ = AC$.

(3) $D \in ABC$.

$AP = QD$, $\angle PDQ = 90^\circ$

$\angle DBC = 35^\circ$

Найти: $\angle DCB$

Решение

1). Впишем в треугольник окружность $(O; r)$

2). Проведем $OH \perp BC$ и $OH' \perp DC$ (O и $H, H' \in BC$)

Проведем $OK \perp AB$ (O и $K \in AB$)

3). $BP = AB$; $CQ = AC$.

$$QP = BC + BP + CQ = AB + AC - BC$$

4). Рассмотрим $\triangle PQA$ - равнобедренный и прямоугольный (по условию)

OH - медиана (по свойству высоты равнобедренного треугольника)

$$OH = \frac{1}{2} QP = \frac{AB + AC - BC}{2} \text{ (по свойству медианы прямоугольного треугольника)}$$

$$OH = HP = \frac{AB + AC - BC}{2} \text{ (по определению медианы треугольника)}$$

$$5) BH = BP - HP = AB - \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{BC + AB - AC}{2}$$

6). По Тоб из измерения радиуса вписанной окружности в прямоугольный треугольник:

$$r = \frac{a + b - c}{2} = \frac{AB + AC - BC}{2} \Rightarrow OH' = \frac{AB + AC - BC}{2} = OH$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$S_n = 4S_1 + S_1^2 - 2S_2$$

$$S_1^2 + 4S_1 - 3S_2 = 0$$

$$(x-1)^3 =$$

$$S_n = \frac{S_1(S_1+4)}{3}$$

$$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$(100-1)^3 = 1000000 - 30000 + 300 - 1$$

$$(1000-1)^3 = 1000000000 - 3000000 + 3000 - 1$$

$$997002999$$

$$409999999$$

$$\begin{array}{r} 89 \\ \times 99 \\ \hline 801 \\ + 891 \\ \hline 88209 \\ \times 99 \\ \hline 88209 \\ + 88209 \\ \hline 970299 \end{array}$$

$$(a^2+2ab+b^2)(a-b) =$$

$$= a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$$

$$\begin{cases} xy = 4x + x^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases}$$

$$b_2 = 4b_1 + (b_1)^2 - 2b_2$$

$$b_2 = 2(4+x) + x(4+x) + y(4+y)$$

$$b_2 = x^2 + 4x + x^2 + 4x + y^2 + 4y$$

$$b_3 = (4+x)(4+x)(4+y)$$

$$b_3 = x^2y +$$

$$(16+4x+4x+x^2)(4+y) =$$

$$= 64 + 16x + 16x + 4xx + 16y + 4xy + 4yz + xyx =$$

$$xyx = 64 + 16(x+y+x) + 4(xx+xy+yx) + xyx$$

$$64 + 16b_1 + 4b_2 = 0$$

$$16 + 4b_1 + b_2 = 0$$

$$b_1^2 - 3b_2 + 4b_1 = 0$$

$$64 + 16b_1 + \frac{4b_1(b_1+4)}{3} = 0$$

$$\frac{4}{3}b_1^2 + \frac{16}{3}b_1 + 16b_1 + 64 = 0$$

$$40b_1 + 64b_1 + 192 = 0$$

$$b_1^2 + 16b_1 + 48 = 0$$

$$(b_1 + 4)(b_1 + 12) = 0$$

$$b_1 = -4 \text{ или } b_1 = -12$$

$$\text{Итого } b_2 = -20 + 12 \cdot 12 - 2 \cdot 20 =$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 8x + 16 \\ + y^2 + 8y + 16 \\ + x^2 + 8x + 16 \end{array}$$

$$= b_1^2 - 2b_2 + 8b_1 + 48 = ?$$

$$b_1 = -12$$

$$b_2 = 32$$

$$144 - 2 \cdot 32 + 8 \cdot (-12) + 48 =$$

$$= 144 - 64 - 96 + 48 =$$

$$= 144 - 64 - 48 = 80 - 48 =$$

$$= 32$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

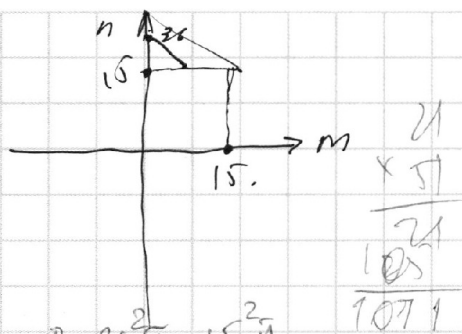
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$m > 15, n > 15 \quad m+n \leq 36$$

$$m > 15, n \leq 15 \quad m-n \leq 6$$

$$m \leq 15, n > 15 \quad n-m \leq 6$$

$$m \leq 15, n \leq 15 \quad m+n \geq 24$$



$$\begin{aligned} & 36^2 n - 15^2 n \\ & n(36-15)(36+15) = \\ & = n \cdot 51 \cdot 21 = 2107n \end{aligned}$$

$$\boxed{0 \ 0 \ 0} \cdot \dots$$

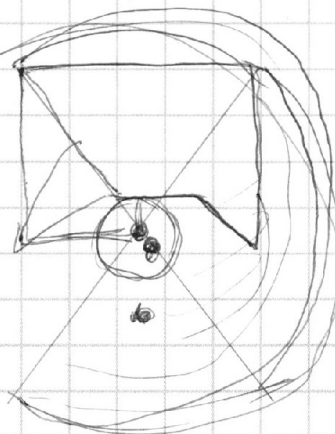
$$n-4+n-5$$

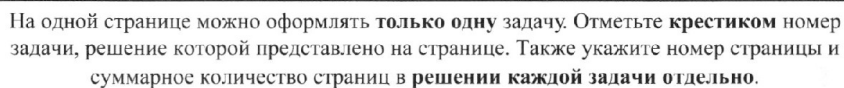
$$1) \ y - \frac{x}{6\sqrt{3}} > 15; \ y + \frac{x}{6\sqrt{3}} > 15 \Rightarrow y \leq 18$$

$$2) \ y - \frac{x}{6\sqrt{3}} < 15; \ y + \frac{x}{6\sqrt{3}} > 15 \Rightarrow \frac{2x}{3\sqrt{3}} \leq 6$$

$$3) \ y - \frac{x}{6\sqrt{3}} > 15; \ y + \frac{x}{6\sqrt{3}} < 15 \Rightarrow \frac{x}{3\sqrt{3}} \geq 6$$

$$4) \ y - \frac{x}{6\sqrt{3}} < 15; \ y + \frac{x}{6\sqrt{3}} < 15 \Rightarrow y \geq 12$$





СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

