



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

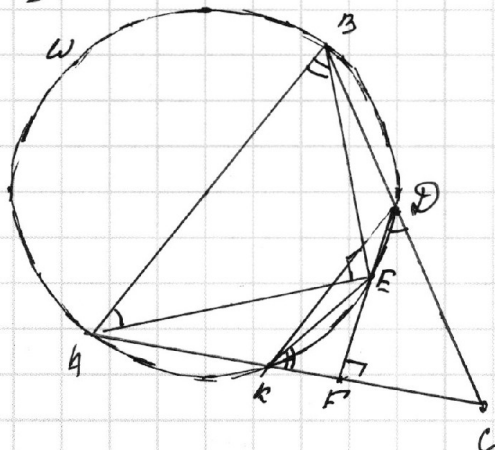
1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3



Дано: $\triangle ABC$ - остроугольный,
AB диаметр ω , BC пересекает ω в D, B,
 $DF \perp AC$, $F \in AC$, E пересечение DF и ω
 $AC=10$, $AB=8$, $BE=6$

Найти: AF

Решение:

Пусть K пересечение BC и ω 2 раз

- 1) т.к. AB - диаметр ω и $E \in \omega$ то $\angle BEA = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABE$ - прямоугольный
- 2) по теореме Пифагора для $\triangle ABE$: $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7}$
- 3) $\angle FDC = 180^\circ - \angle BDE$, а $\angle BAE = 180^\circ - \angle BDE$ т.к. в сумме их дуги дают $360^\circ \Rightarrow \angle FDC = \angle BAE$ и $\angle BEA = 90^\circ = \angle DFC$, тогда $\triangle ABE \sim \triangle DFC$
- 4) также как и в п. 3 докажем что $\angle ABE = \angle EKF$ и $\angle BEA = 90^\circ = \angle EFK$ значит $\triangle ABE \sim \triangle EFK$
- 5) $\angle ADB = 90^\circ$ т.к. опирается на диаметр AB и $\angle ABK = 90^\circ$ т.к. опирается на диаметр AB, тогда AD и BK - высоты и $\triangle ABC \sim \triangle DKC$ ($\angle ABC$ - общий, а $\angle CDK = \angle BAC$ доказательство такое же как в п. 3)
- 6) пусть $CF = x$, т.к. $\triangle ABE \sim \triangle DFC \Rightarrow \frac{CD}{CF} = \frac{AB}{BE} \Rightarrow CD = CF \cdot \frac{AB}{BE} = x \cdot \frac{8}{6} = \frac{4}{3}x$
- 7) т.к. $\triangle ABC \sim \triangle DKC$, то $\frac{KD}{CD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow KD = CD \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{4}{3}x \cdot \frac{8}{10} = \frac{16}{15}x$
- 8) $\triangle ABE \sim \triangle DCF \Rightarrow \frac{FD}{CF} = \frac{BE}{AE} \Rightarrow FD = CF \cdot \frac{BE}{AE} = x \cdot \frac{6}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}x$
- 9) $\triangle KDF$ - прямоугольный $\angle KFD = 90^\circ$ тогда по теореме Пифагора $KF = \sqrt{KD^2 - DF^2} = \sqrt{x^2 \cdot \frac{16^2}{15^2} - x^2 \cdot \frac{7}{3^2}} = x \sqrt{\frac{16^2 - 7 \cdot 15^2}{15^2}} = \frac{9}{15}x = \frac{3}{5}x$
- 10) т.к. $\triangle ABE \sim \triangle EFK$, то $\frac{EF}{KF} = \frac{AE}{BE} \Rightarrow EF = KF \cdot \frac{AE}{BE} = \frac{3}{5}x \cdot \frac{2\sqrt{7}}{6} = \frac{\sqrt{7}}{5}x$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

11) $\triangle AEF$ - прямоугольный, $\angle EFA = 90^\circ$ тогда по теореме Пифагора

$$AF = \sqrt{AE^2 - EF^2} = \sqrt{28 - \frac{7}{25}x^2} \quad \text{и} \quad AF = AC - FC = 10 - x$$

$$\sqrt{28 - \frac{7}{25}x^2} = 10 - x, \quad 10 - x \geq 0 \quad \text{и} \quad x \geq 0$$

$$28 - \frac{7}{25}x^2 = 100 - 20x + x^2$$

$$\frac{32}{25}x^2 - 20x + 72 = 0 \quad | :4$$

$$\frac{8}{25}x^2 - 5x + 18 = 0 \quad | \cdot 25$$

$$8x^2 - 125x + 450 = 0$$

$$x = \frac{125 \pm \sqrt{125^2 - 4 \cdot 8 \cdot 450}}{16} = \frac{125 \pm 35}{16}$$

$$x = \left\{ \frac{45}{8}, 10 \right\}$$

при $x = 10$ $\triangle ABC$ будет остроугольным т.к. $\angle F$ совпадает с $\angle A$

$$\alpha \angle DFC = 90^\circ \Rightarrow \angle BAC > 90^\circ \text{ значит } CF = \frac{45}{8} \Rightarrow AF = 10 - CF = 10 - \frac{45}{8} = \frac{35}{8}$$

$$\text{Ответ: } AF = \frac{35}{8}$$



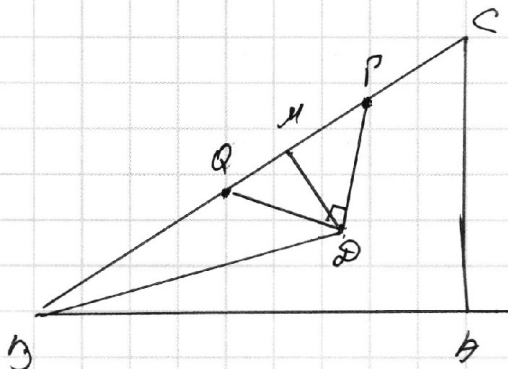
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7



Дано: $\triangle ABC$ прямоугольный
 $\angle A = 50^\circ$, $P, Q \in BC$, $AC = CQ$, $AB = BP$,
 $DQ = DP$, $\angle PDQ = 90^\circ$, $D \in \triangle ABC$,
 $\angle BCA = 50^\circ$

Найти: $\angle DBC$

Решение:

1) т.к. $DP = DQ$ то и $\triangle DQP$ - равнобедренный с основанием QP и
 $\angle PDQ = 90^\circ \Rightarrow \triangle DQP$ - прямоугольный с гипотенузой QP , тогда
 $\angle PQD = 45^\circ$

2) пусть M - середина QP , тогда DM и высота

3) пусть $BC = x \Rightarrow AC = x \cos 50^\circ$, $BA = x \sin 50^\circ$.

4) $QP = CA + BA - BC = x(\cos 50^\circ + \sin 50^\circ - 1)$ и $QM = \frac{QP}{2}$

5) $\triangle BMD$ - прямоугольный $\Rightarrow \angle DMB = 90^\circ$

6) $DM = \frac{QP}{2}$ т.к. $\triangle DQP$ - прямоугольный

7) $BM = BP - MP = AB - \frac{QP}{2} = x\left(\sin 50^\circ - \frac{\sin 50^\circ + \cos 50^\circ - 1}{2}\right) =$
 $= x \frac{1 + \sin 50^\circ - \cos 50^\circ}{2}$

8) $\tan \angle DBC = \frac{DM}{BM} = \frac{\frac{\sin 50^\circ + \cos 50^\circ - 1}{2}}{\frac{1 + \sin 50^\circ - \cos 50^\circ}{2}} = \frac{\sin 50^\circ + \cos 50^\circ - 1}{1 + \sin 50^\circ - \cos 50^\circ}$
 $= \frac{\sin 50^\circ + \sin 40^\circ - 1}{1 + \sin 50^\circ - \sin 40^\circ}$

9) $\frac{2 \sin \frac{50+40}{2} \cdot \cos \frac{50-40}{2} - 1}{1 + 2 \sin \frac{50+40}{2} \cdot \cos \frac{50+40}{2}} = \frac{2 \sin 45^\circ \cdot \cos 5^\circ - 1}{1 + 2 \sin 50^\circ \cdot \cos 45^\circ}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

1) Пусть в игре n -коробок, тогда количество способов выбрать любые 5 из них $C_n^5 = \frac{n!}{(n-5)! \cdot 5!}$, чтобы выиграть в этой игре надо выбрать 3 коробки с шариками и 2 любых других коробки, значит количество способов выиграть 5 выигрышных коробок это количество способов выбрать любые 2 не выигрышные коробки $C_{n-3}^2 = \frac{(n-3)!}{(n-5)! \cdot 2!} \Rightarrow$ вероятность выиграть $\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} =$

$$= \frac{\frac{n!}{(n-5)! \cdot 5!}}{\frac{n!}{(n-5)! \cdot 2!}} = \frac{(n-3)! \cdot 2!}{(n-5)! \cdot 5!} = \frac{(n-3)! \cdot 2!}{n! \cdot 5!} = x$$

2) Если разрешили выбрать 7 коробок, то количество способов выбрать любые 7 из них $C_n^7 = \frac{n!}{(n-7)! \cdot 7!}$, чтобы выиграть надо выбрать 3 коробки с шариками и 4 без них, значит количество выигрышных способов выбора $C_{n-3}^4 = \frac{(n-3)!}{(n-7)! \cdot 4!}$, тогда вероятность выиграть в таком случае $\frac{C_{n-3}^4}{C_n^7} = \frac{\frac{(n-3)!}{(n-7)! \cdot 4!}}{\frac{n!}{(n-7)! \cdot 7!}} = \frac{(n-3)! \cdot 7!}{n! \cdot 4!} = y$

3) Вероятность выиграть выросла в $\frac{y}{x}$ раз

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{(n-3)! \cdot 7!}{n! \cdot 4!}}{\frac{(n-3)! \cdot 2!}{n! \cdot 5!}} = \frac{7! \cdot 2!}{5! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5! \cdot 2}{5! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{7}{2} = 3,5 \text{ раз}$$

Ответ: в 3,5 раза



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

Пусть $\{c_n\}$ - арифметическая прогрессия для корней, тогда

c_6 и c_7 корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$, а

c_4 и c_9 корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$, значит

$c_6 + c_7 = c_1 + 5d + c_1 + 6d = 2c_1 + 11d$, где d - разность арифметической

прогрессии $\{c_n\}$, а $c_4 + c_9 = c_1 + 3d + c_1 + 8d = 2c_1 + 11d = c_6 + c_7 \Rightarrow c_4 + c_9 = c_6 + c_7$,

по теореме Виета: $c_4 + c_9 = \frac{a^3 - 2a^2}{3}$ и $c_6 + c_7 = \frac{a^2 - 2a}{1}$, тогда

$$\frac{a^3 - 2a^2}{3} = \frac{a^2 - 2a}{1}$$

$$a^3 - 2a^2 = 3a^2 - 6a$$

$$a^3 - 5a^2 + 6a = 0$$

$$a(a-3)(a-2) = 0 \Rightarrow a = \{0; 2; 3\}, \text{ проверка}$$

при $a=0$: $3x^2 + 6 = 0$
 $\emptyset$

$$x^2 - 7 = 0$$

 $x = \pm\sqrt{7}$

при $a=2$: $3x^2 - (2^3 - 2 \cdot 2^2)x + 6 - 2^5 = 0$ $x^2 - (2^2 - 2 \cdot 2)x + 2^2 - 2 - 7 = 0$
 $x^2 = \frac{26}{3}$ $x^2 = 5$
 $x = \pm\sqrt{\frac{26}{3}}$ $x = \pm\sqrt{5}$

~~(видно что корни не образуют арифметическую прогрессию)~~

при $a=3$: $3x^2 - (3^3 - 2 \cdot 3^2)x + 6 - 3^5 = 0$ $x^2 - 3x + 3^2 - 3 - 7 = 0$
 $x^2 - 3x + 2 - 3^4 = 0$ $x^2 - 3x = 1$
 $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4(2 - 3^4)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{325}}{2} = \frac{3 \pm 5\sqrt{13}}{2}$ $x = \frac{3 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|c_7 - c_6| = |d|$$

$$|c_9 - c_4| = |c_1 + 8d - (c_7 + 3d)| = |5d| \Rightarrow |d| = \frac{|c_9 - c_4|}{5} = |c_7 - c_6|$$

$$\text{при } a=2, |c_7 - c_6| = |\sqrt{5} - (-\sqrt{5})| = 2\sqrt{5}$$

$$\frac{|c_9 - c_4|}{5} = \frac{(-\frac{\sqrt{26}}{3} - \frac{\sqrt{26}}{3})}{5} = \frac{2\sqrt{26}}{5\sqrt{3}} \neq 2\sqrt{5}$$

$$\text{при } a=3, |c_7 - c_6| = \left| \frac{3+\sqrt{13}}{2} - \frac{3-\sqrt{13}}{2} \right| = \sqrt{13}$$

$$\frac{|c_9 - c_4|}{5} = \frac{\left| \frac{3+5\sqrt{13}}{2} - \frac{3-5\sqrt{13}}{2} \right|}{5} = \sqrt{13} = |c_7 - c_6|$$

Ответ: $a=3$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\operatorname{tg} \angle DBC = \frac{2 \sin 45^\circ \cos 5^\circ - 1}{1 + 2 \sin 5^\circ \cos 45^\circ} = \frac{\sqrt{2} \sin 5^\circ - 1}{1 + \sqrt{2} \sin 5^\circ}$$

$$\angle DBC = \arctg \left(\frac{\sqrt{2} \cos 5^\circ - 1}{1 + \sqrt{2} \sin 5^\circ} \right)$$

$$\text{Ответ: } \angle DBC = \arctg \left(\frac{\sqrt{2} \cos 5^\circ - 1}{1 + \sqrt{2} \sin 5^\circ} \right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

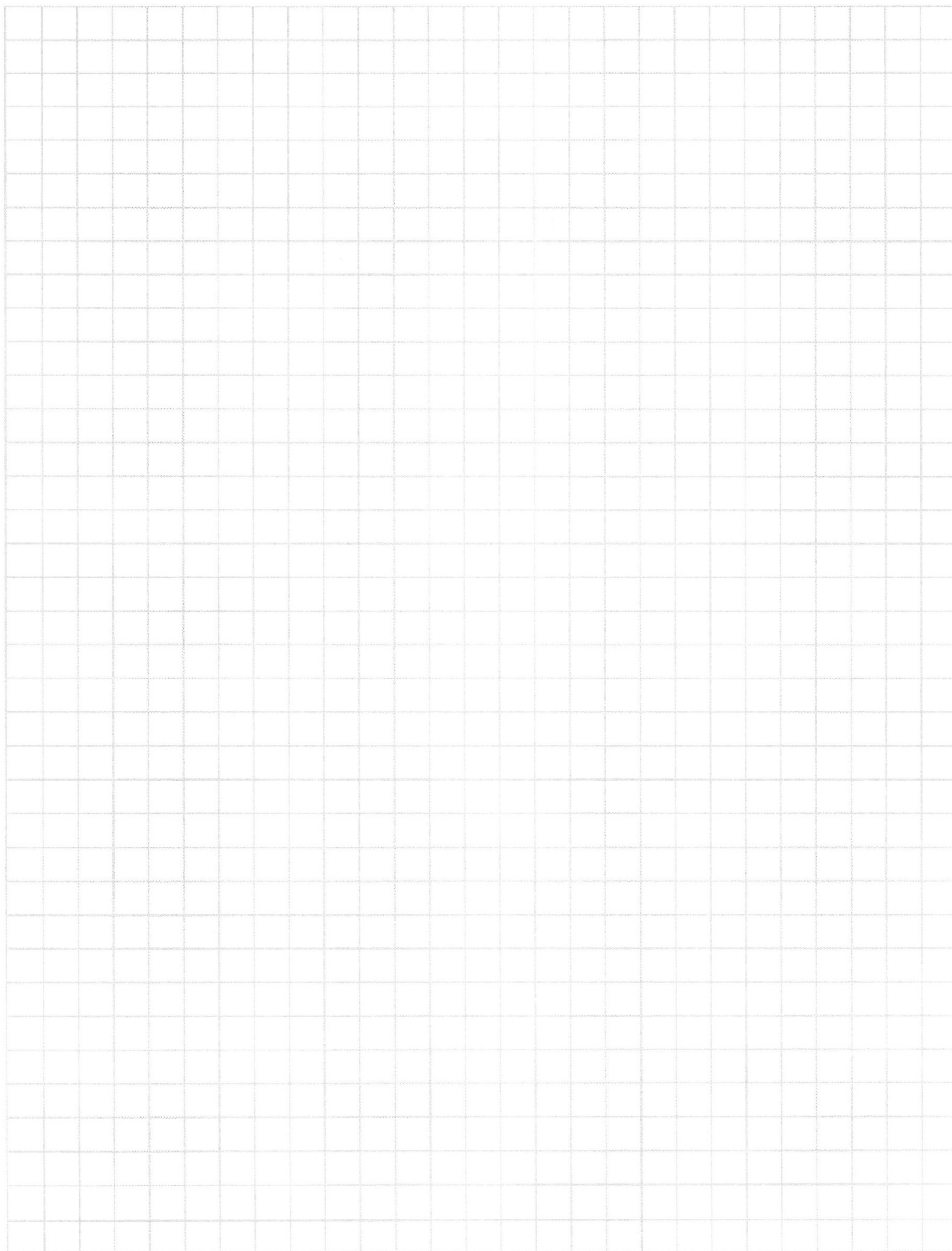
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 90 \\ 16 \overline{) 160} \\ \underline{-80} \\ 80 \\ \underline{-45} \\ 35 \end{array}$$